Tesis Doctoral



Juicios por comparación,
inferencias lingüísticas
y actos de decisión
en sistemas
de representación de conocimiento
efectivamente computables
basados en unidades vagamente perfiladas

Juan Miguel León Rojas

Julio, 2003

Juicios por comparación,
inferencias lingüísticas
y actos de decisión
en sistemas de representación de conocimiento
efectivamente computables
basados en
unidades vagamente perfiladas

Comparison judgments,
linguistic inferences
and decision acts
in effectively computable
knowledge representation systems
based on
vague shaped units



UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
ÁREA DE LENGUAJES Y SISTEMAS INFORMÁTICOS

Juicios por comparación, inferencias lingüísticas y actos de decisión en sistemas de representación de conocimiento efectivamente computables basados en unidades vagamente perfiladas



Juan Miguel León Rojas
Julio de 2003

Autor:
Juan Miguel León Rojas
Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura
Escuela Politécnica
Avda. de la Universidad s/n
10003, Cáceres, España
Tel.: 34-927-257-224
Fax: 34-927-257-203
Correo-e: jmleon@unex.es
jmleonrojas@gmail.com

Director: Dr. D. José Moreno del Pozo

Tribunal:
Presidente: Dr. D. Félix Monesterio Huelin-Maciá
Vocales: Dr. D. Alfonso Mateos Caballero
Dra. Dª Rosa Pérez Utrero
Dr. D. Jacinto Ramón Martín Jiménez
Secretario: Dr. D. Carlos Ongallo Chanclón
Fecha de lectura: 9 de enero de 2004.

Calificación: Sobresaliente cum laude por unanimidad.

Esencialmente con respecto a su contenido científico, esta versión de la tesis doctoral se identifica como 0.0; las siguientes, de haberlas, serán las versiones 0.1, 0.1.2, 0.1.2.3.5, 0.1.2.3.5.7, etcétera, según la sucesión de números primos.

(Existe otra edición digital de esta versión 0.0, en CD-Rom, realizada por VicMac informática y editada por el Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, con I.S.B.N.: 84-7723-648-8).

Lo que esto es *exactamente*,
queda aún por ver.



UNIVERSITY OF EXTREMADURA
COMPUTER SCIENCE DEPARTMENT
COMPUTER LANGUAGES AND SYSTEMS DIVISION

Comparison judgments, linguistic inferences and decision acts in effectively computable knowledge representation systems based on vague shaped units



Juan Miguel León Rojas

July, 2003

Author:
Juan Miguel León Rojas
Department of Mathematics
University of Extremadura
Escuela Politécnica
Avda. de la Universidad s/n
10003, Cáceres, España
Tel.: 34-927-257-224
Fax: 34-927-257-203
E-mail: jmleon@unex.es
jmleonrojas@gmail.com

Director: Dr Mr José Moreno del Pozo

Thesis tribunal:
President: Dr Mr Félix Monesterio Huelin-Maciá
Vocals: Dr Mr Alfonso Mateos Caballero
Dr Ms Rosa Pérez Utrero
Dr Mr Jacinto Ramón Martín Jiménez
Secretary: Dr Mr Carlos Ongallo Chanclón
Defense date: January 9, 2004.

Qualification: Summa cum laude.

Regarding essentially to its scientific content, this version of the doctoral thesis is identified as 0.0. The following ones, if any, will be 0.1, 0.1.2, 0.1.2.3.5, 0.1.2.3.5.7 and so on, according to the series of prime numbers.

(There is another digital edition of this version 0.0, on CD-Rom, built by VicMac informática and edited by the University of Extremadura, Servicio de Publicaciones, with I.S.B.N.: 84-7723-648-8).

```
What this is exactly,
remains yet to be seen.
```

Juicios por comparación, inferencias lingüísticas y actos de decisión en sistemas de representación de conocimiento efectivamente computables basados en unidades vagamente perfiladas

Juan Miguel León Rojas

Tesis Doctoral

—Que incluye estudios y ejemplos ilustrativos en:
Administración con y para las personas en las organizaciones (elección de candidatos o puestos, trabajadores o grupos de trabajo especializados o polivalentes; actos de comunicación interna y externa; etc.); Evaluación de los aprendizajes; Evaluación de las destrezas de ejecución; Ingeniería del Software basada en componentes; Comparación de imágenes digitales; Reconocimiento de lenguas de signos; Salud medioambiental; Diagnosis y prognosis sintomática y por imagen; Teoría de Juegos de votación ponderada; Pensamiento estereotipado—

DIRECTOR: Dr. José Moreno del Pozo

Julio de 2003

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
ÁREA DE LENGUAJES Y SISTEMAS INFORMÁTICOS



DPTO. DE INFORMÁTICA
Área de Lenguajes
y Sistemas Informáticos

ESCUELA POLITÉCNICA
Avda. de la Universidad s/n
Tel.:927.257195
Fax: 927.257203

D. **JOSÉ MORENO DEL POZO**, Profesor Titular de Universidad del área de Lenguajes y Sistemas Informáticos en el Departamento de Informática de la Universidad de Extremadura, **AUTORIZA**:

La presentación de la Tesis Doctoral titulada:

«Juicios por comparación, inferencias lingüísticas y actos de decisión en sistemas de representación de conocimiento efectivamente computables basados en unidades vagamente perfiladas»,

realizada por D. **Juan Miguel León Rojas**, bajo mi supervisión, en el Departamento de Informática, y que presenta para la obtención del grado de Doctor en Informática por la Universidad de Extremadura.

En Cáceres, a 1 de Julio de 2003

EL DIRECTOR DE LA TESIS
Dr. José Moreno del Pozo

A la memoria de mis padres
CARIDAD y JOSÉ
por enseñarme que cualquier cosa que merezca la pena, requiere
dedicación y trabajo duro,
y a mi familia
MONTAÑA, MARINA y SARA
por su amor y por el tiempo irrecuperable
que me entregaron para trabajar en estas páginas.

To the memory of my parents
CARIDAD and JOSÉ
for teaching me that anything worthwhile
requires dedication and hard work,
and to my family
MONTAÑA, MARINA and SARA
for their love and the irrecoverable time
they gave up in order for me to work on this pages.

TESIS DOCTORAL

Juicios por comparación, inferencias lingüísticas y actos de decisión en sistemas de representación de conocimiento efectivamente computables basados en unidades vagamente perfiladas

Autor: Juan Miguel León Rojas

Director: Dr. José Moreno del Pozo

Universidad de Extremadura
Departamento de Informática
Julio de 2003

«*El acto de indicar cualquier ser, objeto, cosa, o unidad, implica hacer un acto de distinción que distingue lo indicado de su fondo. Siempre que hacemos referencia a algo, implícita o explícitamente, estamos especificando un criterio de distinción, que indica sobre qué estamos hablando y especifica sus propiedades como ser, unidad u objeto.*
Esta situación es frecuente y no es única: necesaria y permanentemente estamos inmersos en ella.
Una unidad (entidad, objeto) procede de un acto de distinción. Recíprocamente, siempre que nos referimos a una unidad en nuestras descripciones, implícitamente lo hacemos a la operación de distinción que la define y la hace posible.»
—Humberto R. MATURANA y Francisco J. VARELA (p. 40, de la versión inglesa revisada de 1998*)

Resumen: Partiendo de nuestra firme creencia en que todo acto de decisión (o indecisión), conlleva uno o varios juicios por comparación, hemos:

✓ Definido un marco teórico adecuado para comparar conjuntos borrosos, ordinarios o no (**Φ**-borrosos, de nivel n, de tipo n, etc.), que se constituye en un espacio de representación y comparación de las unidades (objetos, entidades) vagamente perfiladas, fruto de los actos de distinción posibles en los sistemas de representación de conocimiento efectivamente computables, en los que presumimos que podemos operar, es decir, en los sistemas humanamente manipulables de unidades humanamente interpretables.

Como muchos actos de decisión conllevan actos previos de inferencia (transducciones, deducciones, inducciones, abducciones o retroducciones), de sentido común, circunscripciones, convicciones, percepciones, etc., y muchos de ellos, por mor de nuestra condición humana, se razonan lingüísticamente, hemos:

✓ Definido un marco teórico adecuado para trabajar con expresiones lingüísticas de asignaciones de probabilidad acerca de sucesos relativos a unidades vagas, preocupándonos por cómo se actualizan estas probabilidades, en particular, por cómo se propaga la vaguedad a través de las inferencias bayesianas.

Para intentar exponer mejor nuestras ideas, hemos:

✓ Incluido estudios y ejemplos ilustrativos en:
- Administración con y para las personas en las organizaciones (elección de candidatos o puestos, trabajadores o grupos de trabajo especializados o polivalentes; actos de comunicación interna y externa; etc.);
- Evaluación de los aprendizajes;
- Evaluación de las destrezas de ejecución;
- Ingeniería del Software basada en componentes;
- Comparación de imágenes digitales;
- Reconocimiento de lenguas de signos;
- Salud medioambiental (molestias por exposición al ruido);
- Diagnosis y prognosis sintomática y por imagen;
- Teoría de Juegos (de votación ponderada);
- Pensamiento estereotipado.

---

* [1]: *El Árbol del Conocimiento*, Editorial Universitaria, Santiago de Chile, 1987 (<The Tree of Knowledge: The Biological Roots of Human Understanding>, Shambhala Publications, Inc., Boston, Massachusetts, EE. UU., 1998)

Índice general



«Tenemos ante nosotros una tarea que debe ser cumplida velozmente. Sabemos que la demora será ruinosa. La crisis más importante de nuestra vida exige, a grandes voces, energía y acción inmediatas. Ardemos, nos consumimos de ansiedad por comenzar la tarea, y en la anticipación de su magnífico resultado nuestra alma se enardece. Debe, tiene que ser emprendida hoy y, sin embargo, la dejamos para mañana; y ¿por qué? [...] El día siguiente llega, y con él una ansiedad más impaciente por cumplir con nuestro deber, pero con este verdadero aumento de ansiedad llega también un indecible anhelo de postergación realmente espantosa por lo insondable. Este anhelo cobra fuerzas a medida que pasa el tiempo.»
—Edgar Allan Poe [2] (p. 188)

«"Pero, ¿cuál es la piedra que sostiene el puente?", pregunta el Kublai Khan.
"El puente no está sostenido por una u otra piedra", responde Marco, "sino por la línea del arco que forman."
El Kublai Khan se queda en silencio, reflexionando. Luego agrega: "¿Por qué me hablas de las piedras? Lo único que me interesa es el arco."
Polo responde: "Sin piedras no hay arco".»
—Italo CALVINO <Ciudades invisibles>, *via* Jerome S. BRUNER [3] (p. 47)

«Sopesemos la ganancia y la pérdida, eligiendo la cruz [cara, cuando se juega a cara o cruz] de que Dios existe. Consideremos estas dos posibilidades; si ganáis lo ganáis todo; si perdéis, no perdéis nada. Apostad que existe, sin vacilar.»
—Blaise PASCAL <Pensamientos>[4]

«De cara a nuestros propósitos actuales, deseamos explorar la característica fundamental del lenguaje que hace posible nuevos fenómenos tales como la reflexión y la conciencia. Esta característica fundamental consiste en que el lenguaje les permite a aquellos que operan con él, describirse a sí mismos *y a sus circunstancias mediante la distinción lingüística de distinciones lingüísticas. [...] De este modo, cuando un observador opera en un dominio de lenguaje, opera en un dominio de descripciones.»*
—Humberto R. MATURANA y Francisco J. VARELA [1] (pp. 210-211 de la versión inglesa revisada de 1998)

Íncipit

«El dibujo no es la forma, es la manera de ver la forma.»
—Edgar Degas

Para que una «medida» sea de utilidad en un entorno de trabajo, debe existir una gran correlación entre los valores observados (las mediciones) y los juicios subjetivos sobre cuáles deberían ser tales mediciones (si un procedimiento de medida hace que deduzca que la distancia de la puerta de mi casa a la puerta de la casa de mi vecino de enfrente es de 1km, de seguro que no me es de utilidad).

Esta correlación expresa la cohesión, coherencia y consistencia, que existe entre su representación (sintáctica) y su interpretación (semántica). Lo cierto es que se trata de un problema muy difícil el de aunar la expresividad y significación subjetiva con la propiedad de ser matemáticamente tratable (esto es, y por ahora, sintácticamente representable). Las soluciones de compromiso son inevitables. Asimismo, el problema se agrava por lo subjetivo del propio acto de aunamiento.

Pero, ¿por qué no emplear la lengua natural desde el principio?

Algo muy recurrido en las demostraciones matemáticas, en las derivaciones formales, o en los procedimientos de verificación, es imponer desde un principio conclusiones, tesis (o pre-tesis) como hipótesis (guíese por la conclusión, suele ser la máxima).

Lo característico del ser humano es el lenguaje. Entonces, ¿por qué no ir tras, o partir de, una matemática humana, una matemática lingüística, en la que la base del razonamiento sea el lenguaje y el significado, la semántica y no la sintaxis?

Porque es muy difícil.

Actualmente, aunque nuestra guía sea semántica, no deja de ser un lazarillo, pues el final expresivo es sintáctico. Piense el lector, que todo lo que lee, perteneciente a cualquier ámbito que imagine, está expresado sintácticamente. En otras palabras, una máquina podría hacerlo (en los modelos teóricos, la memoria de la máquina y el tiempo de que dispone para computar son infinitamente extensibles): es mera sintaxis, la semántica surge porque existe una unidad (entidad, objeto) con capacidad para generarla y otra unidad —que puede ser ella misma— que la observa.

J.M.L.R.

Preludio

«¿No dañamos las cosas al expresarlas?»
—Virginia Wolf<Al faro> (1927)

Todo lo escrito en las páginas siguientes tiene su origen en nuestra firme creencia en que **todo acto de decisión o indecisión, conlleva un juicio basado en la comparación**, entendiendo ésta en su sentido más genérico. Según el diccionario de la Real Academia Española (D.R.A.E.), *comparar* es «parangonar, fijar la atención en dos o más objetos para descubrir sus relaciones o considerar sus diferencias o semejanzas».

No somos los únicos en pensar esto. Así lo exponen Douglas L. Medin, Robert L. Goldstone y Arthur B. Markman en la introducción a su artículo *Comparison and choice: Relations between similarity processes and decision processes* [5] (p. 1). Ellos usan la expresión «*similarity judgment*», pero el sentido es el mismo.

Tanto los unos, los actos de decisión, como los otros, los juicios por comparación, están dominados por la subjetividad.

Somos diferentes. Los seres humanos son dispares, diversos, variables. Físicamente, es indudable: «Por lo general, el esquimal tiene un torso grande y fornido y extremidades cortas, mientras que el dinka africano es alto, delgado, de piernas y brazos muy largos» —ejemplo de Richard C. Lewontin [6], citado por Michael Ruse [7] (p. 181)—. Como discurre B. Roberto Colom Marañón [8] (p. 186), el comportamiento de una persona (su fenotipo), es el resultado de agregar la influencia genética (su genotipo[1]), mas las influencias del ambiente, tanto del ambiente no compartido, específico de la persona, como del ambiente compartido con otros, necesarios, ambos, para la expresión del genotipo. En este sentido caminan los **mundos artificiales** que proponen Jong-Chen Chen, Tze-Lan Lin y Mao-Hung Kuo [9] para investigar en la gestión de recursos humanos; en su caso, los rasgos genotípicos representan las características implícitas de un individuo (no genes biológicos reales), mientras que los rasgos fenotípicos representan las características explícitas que pueden observarse a partir de la apariencia de una persona. No podemos olvidar el problema conocido como detección del punto extremo (*endpoint-detection problem*): hasta qué grado debemos esforzarnos en la detección de las características, de modo que su contribución sea la mejor posible. Es un problema típico a la hora de clasificar patrones (desconocidos) en clases definidas por patrones de referencia (conocidos).

Y **podemos comparar**. Gordon [10] (pp.161-168) presenta un estudio del crítico francés de arte Roger De Piles [11], sobre lo estético en 56 pintores. Lo «novedoso» para la fecha en la que fue publicado (1708) consiste en que De Piles consideró cuatro características (composición, dibujo, color y expresión) y asignó un número entero, entre 0 y 20, para cada pintor y característica.

Imaginemos que esa gradación de 0 a 20 es adecuada para representar, de peor a mejor, la calidad de cada pintor con respecto a cada una de las características. En este caso podríamos buscar el mejor pintor entre los que analicemos. Cada pintor es pues una alternativa de elección. Podemos representar cualquier pintor mediante su perfil de características, cuya evaluación tendrá la funcionalidad de criterio para la decisión.

¿Cómo elegir las características?, ¿cuántas hay que considerar?, ¿son cuantitativas o cualitativas?, ¿cuánta capacidad discriminatoria poseen?, ¿qué captamos mejor, las diferencias o las similitudes?, son preguntas que debemos hacernos. Además, puede haber **categorías latentes**, no directamente observables, o **categorías emergentes**, categorías quasi-predeterminadas de modo indirecto o mediado, no listadas materialmente en el análisis actual, pero posiblemente en análisis futuros. Son **categorías supra-latentes**, pues se definen a partir de futuros observables y no de perpetuos no observables.

La finalidad, el porqué y el para qué de la comparación, condicionan *qué métodos usar*, *qué datos recoger*, *qué instrumentos utilizar*, *qué decisiones tomar* y *qué acciones emprender*.

Respecto de cómo agregar la información obtenida para todas y cada una de las características, resultado de su evaluación, básicamente podemos pensar en tres modelos: el conjuntivo, el disyuntivo, y el compensatorio.

[1] ¿Se da cuenta el lector, por ejemplo, que los hijos de gemelos, genéticamente, no son primos hermanos, sino hermanos?

En el primero los evaluados deben superar todos los umbrales particulares de satisfacción de cada una de las características, para obtener una puntuación global satisfactoria. En el segundo, basta que superen uno de los umbrales de satisfacción. En el tercero, se trata de agregar todas las puntuaciones obtenidas, de manera que las altas compensen las bajas.

El empleo de un modelo particular dependerá del problema. Por ejemplo, muchos defienden cinco características fundamentales que un buen médico debe poseer en su relación con el paciente: *conocimientos médicos, calidez*, *empatía*, *respeto* y *concreción.* Pero, por muy cálida y empática que sea una persona, esto no la convierte en médico (y por tanto, tampoco en buen médico) si carece de conocimientos médicos.

¿Y qué es poseer conocimiento? Quien tenga de nota media un cinco en su carrera, ¿posee conocimientos suficientes sobre la misma?

> *«Tengo por imposible conocer las partes en tanto partes sin conocer al todo pero tengo por no menos imposible la posibilidad de conocer al todo sin conocer singularmente a las partes.»*
> —Blaise PASCAL, *via* Edgar MORIN [12] (p. 144, de la edición española)

La carencia de un repositorio donde se almacene el conocimiento completo, compele a las personas y a sus organizaciones sociales a inclinarse hacia la búsqueda de **soluciones satisfactorias**, más que óptimas —*cfr.* ORTI [13] (p. 312); MINTZBERG, RAISINGHANI y THÉORÉT [14] (pp. 146ss.).

Repositorios con información de todos los recursos (humanos y materiales). Si el problema es, por ejemplo, la formación de un equipo de trabajo, esta multiplicidad de la procedencia de los recursos (tanto humanos como materiales) hace necesaria una labor de evaluación de sus características como «componentes» previas a su «ensamblaje».

Para esta ensambladura, debemos tener en cuenta los variados estudios de formalización de las **percepciones y relaciones de las partes con el todo** (*part-whole relations*) que existen en la literatura —*cfr. v. gr.* RESCHER y OPPENHEIM [15]; GERSTL y PRIBBENOW [16]; LATIMER y STEVENS [17]; MORTENSEN [18][2].

En esta sociedad, repleta de información, a la que nos vemos abocados, no podemos, ni debemos, olvidar el proceso de publicación y difusión de estos recursos. Las características de estos recursos no son atemporales, sino que van mejorando con el tiempo. Nos referimos a la creación de nuevos materiales y a la formación continua de las personas. Mi derecho a no cambiar acaba justo allí donde comienza el derecho de la sociedad al mejor profesional que llevo dentro, conviene en decirnos Miguel FERNÁNDEZ PÉREZ [22] (p. 32). En consonancia con la expresión «*software release management*», propuesta por André VAN DER HOEK y Alexander L. WOLF [23] (p. 78), proponemos denominar al conjunto de estos problemas: **gestión de la publicación de recursos**.

En los problemas de decisión, podrán emerger soluciones que incluyan más de una alternativa, y seremos nosotros, quienes al final deberemos decidir. Los algoritmos que se proponen *en toda la Tesis*, no son algoritmos de decisión, que deciden, sino que son **algoritmos que ayudan a decidir** —*cfr. v. gr.* RÍOS, BIELZA y MATEOS [24]—. No debemos relegar al olvido que los decisores son los seres humanos, y no los sistemas de apoyo a la decisión que estos elaboran. Las personas son las únicas responsables de las decisiones *finales.* Creemos firmemente en la existencia de decisiones que atañen a humanos, que nunca debieran ser adoptadas por automatismos[3]. Las máquinas podrán ayudar a esa toma de decisiones, pero insistimos, estamos convencidos que nunca deben sustituir al ser humano decisor.

Pero todo esto quizás sea preguntarnos mucho para lo rápido que discurre todo. Nuestra sociedad, en su

[2] No sólo eso; de cara a la «construcción» del equipo debemos considerar si queremos uno en el que sus unidades componentes posean especialidades distintas pero complementarias (**combinación modular**) o un equipo donde todas sean verdaderamente versátiles —un ensamblaje, una **ensambladura** (*ensamble*).

Aunque el término «ensamble» es el más frecuente [19, 20], en el entorno de redes de neuronas artificiales, también se usan de manera sinónima los términos «comité» [21] o «máquina comité». Las unidades componentes de la ensambladura deben ser «distintas» en el sentido de que generalicen de forma diferente (o dicho de otro modo, que los errores que posiblemente cometan sean diferentes). De nada nos sirve una ensambladura de individuos, todos *siempre* con la misma opinión. Lo que se intenta con una ensambladura es aprovechar lo bueno de las diferentes estrategias. Por ejemplo, la estructura de un tribunal evaluador es típicamente la de una ensambladura: n individuos que aportan a la ensambladura su vasta y *diferente* experiencia. Pero imaginemos que los miembros del tribunal evaluan, exhaustivamente, subconjuntos disjuntos de cuestiones (por ejemplo, si hay 10 cuestiones y 5 miembros, cada uno puede dedicarse a evaluar 2 cuestiones). Esto es una combinación modular: se han configurado 5 módulos.

Lo dicho, en una ensambladura, las estrategias componentes son redundantes en el sentido de que aportan una solución al mismo problema. Lo que resta es fusionar todas las soluciones en una única.

A diferencia de las ensambladuras —en las que los datos son procesados libremente por todos sus componentes—, en las combinaciones modulares se asume tradicionalmente la exclusividad mutua en el procesamiento de los datos. Lo que sí puede ocurrir es que cualquiera de las componentes de una ensambladura sea en realidad una combinación modular, o lo recíproco, las componentes de una combinación modular pueden ser ensambladuras.

[3] A colación de lo dicho, podemos mencionar a George BOOLE, quien en el capítulo XXI de su *Investigación sobre las Leyes del Pensamiento* [25] (pp. 335-353), trata de las posibles aplicaciones de la probabilidad a los juicios con jurado de causas criminales. Constituye éste un ejemplo de situación que, casando con nuestra opinión, nunca debiera estar en mano de ningún automatismo.

modo actual, no es la sociedad de la información, y mucho menos del conocimiento y ni por asomo, de la sabiduría. Es tal la inmensidad de datos en acecho, que no nos es posible su procesamiento para su trastrocamiento en información. Pero tampoco es, la nuestra, la sociedad de los datos, sino más bien, la **sociedad de los bosquejos**. La rapidez con la que transitamos por la vida, hace que lo incompleto valga por exhaustivo, lo dudoso, por seguro, y lo vago, por preciso.

Exordio

«Aquél a quien yo amo me arrebata parte de mi libertad, pero soy yo quien así lo ha querido. Quien me ama, me la arrebata totalmente.»
—Henry Millon dé MONTHERLANT <Les Jeunes Filles> (1936-1939)

Si ya nos interesaba la vaguedad desde nuestros estudios de licenciatura —y no en un único sentido, pues ya habíamos tomado apuntes del *Master para estudiantes vividores* de Warren LESLIE [26]—, el conocimiento de la existencia de la teoría de los conjuntos borrosos y de la lógica borrosa, se lo debemos a conversaciones, a sabor de cafés, chatos y tapeos, con dos compañeros de nuestra Universidad, allá por comienzos de los 90, a saber, Miguel Ángel JARAMILLO MORÁN, del Departamento de Electrónica e Ingeniería Electromecánica, y José Antonio GARCÍA MUÑOZ, del Departamento de Matemáticas —quien trabajaba por aquél entonces bajo la atenta mirada de Sixto RÍOS INSUA—. Nuestro interés se acrecentó en el año 1991, a partir del Primer Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica *Fuzzy*, y en concreto, a raíz de una conferencia del profesor Enric TRILLAS, en la que nos relataba su idea de la Lógica, de la *única* lógica, de la unificación de la Lógica.

Nuestra predilección por temas relacionados con los ámbitos que referimos a continuación, ha brotado y rebrotado durante estos años, por efecto de la sinestesia presente en el vivir diario: Administración con y para las personas (elección de candidatos o puestos —*recruiting*, insisten en llamarlo muchos gestores—, trabajadores o grupos de trabajo especializados o polivalentes; actos de comunicación interna y externa; etc.); Evaluación de los aprendizajes; Evaluación de las destrezas de ejecución; Ingeniería del Software basada en componentes; Comparación de imágenes digitales; Reconocimiento de lenguas de signos; Salud medioambiental (molestias por exposición al ruido); Diagnosis y prognosis sintomática y por imagen; Teoría de Juegos de votación ponderada; Pensamiento estereotipado.

Sin embargo, diversas circunstancias personales, muy dolorosas algunas, sumamente gozosas otras, así como el sinsentido que sufre mi mujer[4], conmovieron el curso natural de nuestras investigaciones, cuyos primeros

[4] **Acerca de por qué el autor piensa que la Junta de Extremadura menosprecia a algunas madres.-**

«Non hay tan buen thesoro
como el bien facer,
nin tan prescioso oro
ni tan dulce plaser.»
—Don SEM TOB DE CARRIÓN [27]

Igual que de justicia es agradecer, «porque el ser agradecido, la obligación mayor es para el hombre bien nacido» —Ángel de SAAVEDRA (Duque de Rivas): *Don Álvaro o la fuerza del sino*—, de justicia es perdonar. «Se puede perdonar, pero olvidar es imposible», decía Honoré de BALZAC en *Pequeñas miserias de la vida conyugal.* Aunque se intente perdonar, siempre están presentes las palabras de Alonso de ERCILLA en *La Araucana*: «Que en parte ya parece que consiente, quien perdona ligera y fácilmente».

Parece mentira que sea en España, un país anheloso de impulsar la natalidad, y sea en Extremadura, una comunidad que presume y se ensoberbece de ser puntera en la aplicación de la tecnología, donde la Administración siga produciendo situaciones, que según creo yo, son actos de **discriminación en el acceso al trabajo de la mujer**. Aquí voy a hablar de la discriminación hacia ciertas mujeres que acaban de dar a luz, a las que la Junta de Extremadura castiga, precisamente, por haber alumbrado.

Las antipatías mías que quiero reflejar en este punto se dirigen hacia dos personas: al Director General de Personal Docente, Diego MOSTAZO LÓPEZ, y al Secretario General de Educación, Ángel BENITO PARDO. **La Junta de Extremadura** —personificada en ellos, que son los firmantes de los nombramientos y tomas de posesión del personal docente no universitario de los Cuerpos de Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores Técnicos de Formación Profesional— **ha castigado a mi esposa por ser culpable de haber dado a luz** a nuestra segunda hija, Sara. Al castigarla a ella, me han castigado también a mí y a toda nuestra familia.

Resulta que la ley vigente obliga a la mujer que acaba de dar a luz, a descansar durante las seis semanas posteriores al parto (art. 30.3 de la Ley 30/1984, de 2 de agosto, de Medidas para la Reforma de la Función Pública, modificado por el art. 20 de la Ley 39/1999, de 5 de noviembre, de promoción de la conciliación de la vida familiar y laboral de las personas trabajadoras). Mi mujer es profesora interina de Enseñanza Secundaria. Los nuevos nombramientos y toma de posesión se llevan a cabo durante esas seis semanas, salvo el de mi mujer, que se pospone 16 semanas. ¿Por qué? Su delito o falta, llámese como quiera, es haber dado a luz a Sara. Si no hubiese estado obligada, por mor de Ley, a descansar durante las seis semanas inmediatas posteriores al parto, estaría en la misma situación que sus compañeros interinos varones, pues habría elegido el momento de solicitar el descanso por maternidad, de manera que no entrase en conflicto con el proceder de la Administración, y que no pudo hacerlo por el simple

resultados, por fin, exponemos en la presente Tesis Doctoral.

Debo mi reconocimiento a los Departamentos de Matemáticas e Informática de la Universidad de Extremadura, y a mi centro «oficial» de trabajo, la Escuela Politécnica, mi hogar académico, proveedora incansable de estudiantes a los que enseñar, y colegas con los que discutir. En especial, a mi amigo y director de tesis, José Moreno del Pozo, sin cuya supervisión, revisión y visto bueno definitivo, esta empresa no habríase redondeado en tesis doctoral.

Ciertos contenidos de esta Tesis se han ensayado y escrutado en diversos foros: congresos, talleres (*workshops*), revistas, y sobre todo, en pasillos, comidas y cafetines. Son todos ellos cuna de esenciales, a la par que complejos, nutrimentos intelectuales, de interesantísimas reflexiones, y de ricos debates. Como decía Séneca

---

hecho de ser mujer, ya que al marido no se le obliga a descansar durante las seis semanas posteriores al parto de su mujer (art. 30.3 de la Ley 30/1984, citado anteriormente).

Lo mire por donde lo mire, considero lesiva la actuación de la Administración. El efecto inmediato se refleja en el cómputo de la experiencia docente, y en cualquier cómputo basado en ella, pues la cuantía de la experiencia docente que la Administración reconoce disminuye en 16 semanas. De este modo, pienso que **la Junta de Extremadura menosprecia a algunas madres**, en contra de la protección integral que está obligada a asegurar por el art. 39.2 de la Constitución Española (CE), en cuanto a que este artículo atribuye a los poderes públicos el deber de asegurar «la protección integral de los hijos, iguales éstos ante la ley con independencia de su filiación, y de las madres, cualquiera que sea su estado civil», y en contra de lo propugnado por el art. 39.1 CE, en cuanto a que éste atribuye a los poderes públicos el deber de asegurar «la protección social, económica y jurídica de la familia». Asimismo, debido a este menoscabo del curriculum vitæ de la madre, pienso que **la Junta de Extremadura coarta el derecho al trabajo y a la promoción a través del trabajo**, propugnado por el art. 35.1 CE, la raíz de lo cual, estoy convencido, está en una **discriminación por razón de sexo**, como argumentaba en el párrafo anterior. Recordemos que la discriminación por razón de sexo, en relación al derecho al trabajo y a la promoción a través del trabajo, queda prohibida expresamente por el art. 35.1 CE.

Es mi opinión, que —y a renglón seguido, cito al **Tribunal Constitucional**— las actuaciones discriminatorias contrarias a la protección integral de la familia y en particular de las madres, «constituyen un grave obstáculo para la conservación de un bien tan preciado como es la permanencia en el mercado laboral que afecta de hecho mayoritariamente a las mujeres perpetuándose así la clara situación de discriminación que tradicionalmente ha sufrido la mujer en el ámbito de lo social y laboral (Sentencia del Tribunal Constitucional (STC) 166/1988, de 26 de septiembre, Fundamento Jurídico (FJ) 2).» (STC 240/1999, de 20 de diciembre, FJ 7, y STC 203/2000, de 24 de julio, FJ 6°).

He de resaltar que **en Andalucía esto ya no ocurre**. El art. 4.1.1 de la Base V de la Resolución de 9 de julio de 2001 (BOJA de 19 de julio de 2001) y de la Resolución de 2 de mayo de 2002 (BOJA de 25 de mayo de 2002), de la Dirección General de Gestión de Recursos Humanos de la Junta de Andalucía, por la que se establecen las bases aplicables al profesorado interino para los cursos académicos 2001-2002 y 2002-2003, respectivamente, dice: «Al personal interino con tiempo de servicios reconocido por Resoluciones de esta Dirección General se le contabilizará, a todos los efectos, el periodo que le haya correspondido, en cada momento, al sustituto que pase a ocupar el puesto que habría correspondido al afectado, salvo que a efectos económicos disponga otra cosa la normativa vigente reguladora del régimen general de la seguridad social.»

No entiendo el porqué de la obduración extremeña. Como ocurre en Andalucía, en el momento del llamamiento, las profesoras (es decir, personal interino con tiempo de servicios reconocido por Resoluciones de la Dirección General) que acaben de dar a luz —y más estando dentro del período de seis semanas, obligatorio de descanso por Ley—, deben ser contratadas para el puesto docente que les corresponda, de manera que cuando finalice su descanso maternal, se incorporen a su puesto de trabajo, y mientras, se contrate a otra persona para sustituir a la madre, persona que no le supone coste añadido al empleador, en cuanto a las cotizaciones a la Seguridad Social, por la Ley 39/1999, de 5 de noviembre, de promoción de la conciliación de la vida familiar y laboral de las personas trabajadoras.

Por el contrario, la no contratación de la madre sí que afecta a su vida laboral, pues al no ser contratada, no cotiza a la Seguridad Social. Como decíamos anteriormente, el efecto inmediato se refleja en el cómputo de la experiencia docente, y en cualquier cómputo basado en ella, lo que afecta a la valoración de sus méritos en las listas de interinidades a las que pertenezca, y por tanto, posiblemente, a un descenso en su orden de prelación. Además, dicha falta de cotización a la Seguridad Social, implica la posible pérdida de futuros beneficios en su vida laboral (por ejemplo, un trienio o un quinquenio), y **repercute negativamente en su jubilación**. Y todo ello por descansar después de haber dado a luz, descanso al que, insistimos, está la madre obligada por Ley.

En nuestro caso, en primera instancia, en Cáceres, la jueza, su Señoría D^{a}María José Javato Ollero, ha sentenciado a favor de la Junta de Extremadura —Procedimiento Abreviado 266/2002, seguido en el Juzgado de lo Contencioso-Administrativo N°1 de Cáceres; Sentencia N°329/2002—. Como ciudadanos, respetamos y cumplimos la sentencia, porque **creemos en nuestro Estado de Derecho y en nuestro Poder Judicial**. No obstante, como ser humano que soy, he opinado. Ahora, que sea el Tribunal Constitucional, el máximo intérprete de nuestra Constitución, quien tenga la última palabra.

En Extremadura, **si eres profesora interina** de Enseñanza Secundaria o profesora interina técnica de Formación Profesional —y como la Ley es común (Decreto 55/2001, de 17 de abril, regulador de la provisión interina de puestos de trabajo de personal docente no universitario, D.O.E. 45, de 19 de abril), suponemos que la actuación de la Administración es la misma en el caso del resto de los Cuerpos: Maestros, Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, Profesores de Música y Artes Escénicas, Profesores de Artes Plásticas y Diseño y Maestros de Taller de Artes Plásticas y Diseño—debes saber que **tienes prohibido dar a luz durante ciertos días de agosto y septiembre**, so pena de merma de tu curriculum vitæ, de mengua de tu vida laboral, y de pérdida de derechos de cara a tu jubilación.

Querido lector, la tendencia en toda persona es a vivir en estado de equilibrio espiritual, de homeostasis, toda vez que son bienes preciosos en la vida la paz y la tranquilidad del espíritu. La actuación de la Administración ha provocado, en el caso de nuestra familia, un **daño moral**, *manifestado subjetivamente en el sufrimiento (dolor, malestar, turbación, pesar, angustia y aflicción) que causa, transgediéndose nuestros derechos personalísimos a través de un agravio a nuestro sosiego e integridad psíquica, alterando la normalidad en nuestras facultades mentales y espirituales, ofendiendo a nuestra personalidad moral e hiriendo nuestros legítimos sentimientos.*

Todo este perjuicio moral, desconsuelo y desazón, que la actuación de estas personas ha generado en el *animus* de nuestra familia, en mi caso, ha provocado un retraso de dos años en la publicación de mi Tesis.

que hay que ser agradecido en todo momento y no sólo cuando la persona a la que se agradece está presente, debo decir que es enorme mi deuda con amigos y colegas, con diversos moderadores (*chairs*), con desconocidos revisores (*referees*) y con otros participantes en tales escenarios, a los que desde aquí, deseo expresar mi más sincera y enorme gratitud. Todos ellos han aportado una valiosísima realimentación de la Tesis. Y aunque casi no debería citar a nadie, por no parecer que desprecio al resto, sobre la aplicación del «minero de datos» —Caps. 15, 16 y 17— a la evaluación de los aprendizajes, agradecemos las palabras del Dr. Burghard RIEGER de la Universidad de Trier. También estamos muy agradecidos al Dr. Javier MONTERO DE JUAN, de la Universidad Complutense de Madrid, por facilitarnos algunas de sus ideas sobre la probabilidad, lo borroso y lo bayesiano.

Y esto no es todo, a ello se une que a los profesores interinos no universitarios de Enseñanzas Medias o Técnicos de Formación Profesional, la Junta de Extremadura les «echa de comer aparte». Resulta que una profesora interina perteneciente a cualquiera de esos cuerpos docentes no tiene derecho a una excedencia para cuidar de su hija menor de tres años. No sólo se le niega el derecho a la madre, sino también a la hija. De nuevo la Administración, menosprecia y desampara a la madre y a la hija, en contra de la protección integral que está obligada a asegurar por los arts. 39.2 y 39.1 CE, citados anteriormente.

Vox clamantis in deserto. En las dependencias de la Junta de Extremadura debes aguantar vilipendios y vituperios tales como «un interino no tiene derecho a nada» (sección de personal de la Dirección Provincial de Cáceres) o «Diego Mostazo es quien decide si te damos una excedencia o no» (sección de personal de la Dirección Provincial de Badajoz) —aunque a renglón seguido te explican procazmente que en realidad no es una excedencia, sino que todo consiste en un cese, y que ya se le concede mucho al interino, asintiendo en darle de alta antes de que finalice su contrato—. O sea, que de computar el tiempo de servicios, que es lo que caracteriza una excedencia por cuidado de un hijo menor de tres años, nada de nada.

Debe saber el lector que una trabajadora interina, sí tiene derecho a ello, según el Estatuto de los Trabajadores, a una excedencia real, con cómputo verdadero del tiempo de servicios a todos los efectos. Debe también saber el lector que la Junta de Andalucía, para el caso del profesorado interino no universitario de Enseñanzas Medias o Técnicos de Formación Profesional, reconoce el cómputo del tiempo de servicios a efectos de bolsa de trabajo (algo es algo):

> «INSTRUCCIONES DE 18 DE SEPTIEMBRE DE 2000, DE LA DIRECCIÓN GENERAL DE GESTIÓN DE RECURSOS HUMANOS, en relación con el seguimiento e interpretación del apartado séptimo del acuerdo de 23 de febrero de 2000 entre la Consejería de Educación y Ciencia y las organizaciones sindicales presentes en la mesa sectorial, sobre determinadas medidas sobre el profesorado interino, y en particular, sobre situaciones relacionadas con la maternidad.
>
> En cumplimiento de lo establecido en el Acuerdo arriba citado, esta Dirección General de Gestión de Recursos Humanos, después de su tratamiento en la Mesa Sectorial de Educación con las Organizaciones Sindicales, dicta las siguientes INSTRUCCIONES que sirven para complementar y clarificar otras anteriores sobre la materia y para dejar sin efecto las que se opongan a las mismas.
>
> [...]
>
> La problemática que relacionada con la maternidad y la condición de personal interino de las personas afectadas interesa matizar en estas Instrucciones es la siguiente:
>
> [...]
>
> c) Renuncia al puesto de trabajo por cuidado de un hijo menor de 3 años, y cómputo de tiempo de servicios a efectos de bolsa de trabajo.
>
> De la misma manera que la no identidad absoluta entre dos situaciones es lo que posibilita la diferencia de trato, la concurrencia de principios comunes permite la traslación de consecuencias y efectos a situaciones análogas. Así, tanto la excedencia voluntaria, para el cuidado de hijos menores en el ámbito de lo regulado para el personal funcionario como la causa nº6 de las explicitadas en las Instrucciones de 17 de julio de 2000 sobre determinadas medidas sobre el profesorado interino ("cuando tengan al cuidado un hijo menor... "), responden a la necesidad de cooperar al efectivo ejercicio del deber constitucional de los padres de prestar asistencia de todo orden a los hijos durante la minoría de edad (art. 39.3 C.E) y de contribuir a la efectiva realización del principio rector de la política social que establece que los poderes públicos aseguran la protección social de la familia (art. 39.1 .C.E.).
>
> Sí dicho razonamiento lo completamos con lo que establece el art. 105 de la Ley de Funcionarios Civiles del Estado: "a los funcionarios de empleo les será aplicable por analogía, y tal cuanto sea adecuado a la naturaleza de su condición, el régimen general de los funcionarios de carrera, con excepción del derecho a la permanencia en la función, a niveles dc remuneración determinadas, o al régimen de clases pasivas", se concluye, y se adopta como Instrucción, que el personal interino que renuncie al destino adjudicado por tener a su cuidado un hijo menor de 3 años, no resultará excluido de la bolsa, y se le computará como tiempo de servicios a efectos de dicha bolsa el periodo a que alcance la renuncia. Tal medida entendemos que resulta plenamente coherente con las de orden social de protección a la familia preconizadas por la Constitución española y la normativa actualmente vigente.
>
> Sevilla, 18 de septiembre de 2000-09-21
>
> EL DIRECTOR GENERAL DE GESTIÓN DE RECURSOS HUMANOS,
>
> Fdo. Carlos GÓMEZ OLIVER»

Y si alguien todavía se está preguntando por qué menciono estas antipatías, en este lugar, le recuerdo que lo hago porque ha tenido consecuencias directas en el desarrollo de mi Tesis. Por un lado, siempre que mi director de Tesis me apremiaba, veíame obligado a apelar a la misma respuesta: *sine díe.* Por otro, el Efecto ZEIGARNIK [28] —pensamientos perseverantes y recurrentes relacionados con los fines impuestos y no conseguidos—, en su modo más negativo, y el efecto de rebote producido por el rechazo activo a los continuos diabólicos pensamientos acuciantes —*cfr. v. gr.* WEGNER, SCHNEIDER, CARTER y WHITE [29]; WEGNER [30].

Por todo ello:

Aborrezco, *ad náuseam*, la actuación de la Junta de Extremadura, personificada en el Director General de Personal Docente, Diego Mostazo López, y en el Secretario General de Educación, Ángel Benito Pardo, pues todo este perjuicio moral, desconsuelo y desazón, que la actuación de estas personas ha generado en el *animus* de toda mi familia, ha provocado, en particular, un retraso de dos años en la publicación de mi Tesis.

Decía Chamfort, en sus *Pensamientos y máximas* [31]: «En el mundo tenéis tres clases de amigos: los amigos que os aman, los amigos que no se preocupan de vosotros y los amigos que os odian.» Dedico este párrafo a cuatro amigos a los que yo amo: a Miguel Ángel Montañez Robles —doctor en Ciencias Químicas—, por sus valiosos consejos y estímulos, y particularmente por su permanente actitud investigadora, desafiante e instigadora; a Francisco Javier Máximo Hombre —biólogo—, cuyas atrevidas ideas despertaron en mí aún más el interés hacia otros seres «vivos»; a María del Carmen Martínez Picón —pedagoga terapéutica, intérprete de la lengua de señas española (LSE), y conocedora de la lengua de señas marroquí—, por sus enseñanzas sobre los sistemas alternativos y aumentativos de comunicación (AAC), y por su disposición para emprender el camino de las transcripciones necesarias para las futuras simulaciones y experiencias; y a José Luis López Gutiérrez —Ingeniero Agrónomo—, por 27 años de amistad, y en especial, por su continua insistencia y defensa del sentido común.

No puedo olvidarme de otros dos grandes amigos, que han participado activamente en una de las experiencias llevadas a cabo, mostrándonos la realidad empresarial. Hablo de Andrés Pedrera Carvajal, coordinador de desarrollo de software (*Software Manager*) de YA.COM INTERNET FACTORY [www.ya.com], y de Ángel Bejarano del Bosque, gerente consultor de ACCENTURE [www.accenture.com].





Mi más profundo agradecimiento también a mis amigos y compañeros en la Escuela Politécnica, Valentín Masero, doctorando en Informática, y Arthur Richard Pewsey, doctor en Estadística, por su inestimable y más que generosa ayuda en las traducciones desde el inglés.

Finalmente, y sin embargo, en primer lugar, deseo expresar mi enorme gratitud a mi familia, cuya paciencia, ánimo, y amor han hecho realidad conseguir una de mis metas. A aquellos que ya no están físicamente entre nosotros, mis padres Caridad y José, y mi tía Encarnación, cuyas vidas y muertes me enseñaron a ser fuerte. Y a aquellas que iluminan e inspiran cada momento de mi vida, y que por culpa de esta Tesis se han visto privadas de muchísimas horas de convivencia, imposibles de recuperar: mis hijas Marina y Sara y mi mujer Montaña. A Marina por haber entendido que su papá tenía que trabajar los fines de semana porque todavía estaba en el colegio, y tenía que hacer los «deberes». A Sara, por sus muestras de alegría al verme, lo que me hacía esforzarme mucho más en llegar a la meta.

En especial, a mi mejor amiga, mi mujer Montaña, por su amor, constante aliento, extraordinaria paciencia y vehemente colaboración. Ella ha sido mi sostén, día a día, desde su disponibilidad para revisar las implementaciones y simulaciones, en su papel de profesional de la informática, desde su fugacidad, alejándose con nuestras hijas, proporcionándome esos necesarios momentos de calma para pensar, y desde su disposición al diálogo y al encuentro para contrastar ideas. El valor de su desprendida cooperación es inconmensurable. Ella ha estado ahí siempre, y sabía perfectamente cuando desafiarme y cuando felicitarme. Gracias a ella, a su abnegación, esta Tesis ve la luz. Lo único que espero es estar a tu altura cuando me necesites.

¡Para tí, Montaña!

Carta al lector

«Las cosas pasan y hay que decidirlas de algún modo; no existe una solución mágica única para ellas. Nunca son totalmente blancas o totalmente negras., no basta con leer un código donde se encuentran todas las soluciones del desarrollo ético y el político; tienen más que ver quizá con el arte que con la ciencia. El arte, en el sentido de que nunca se puede aprender del todo, de que hay que estar siempre reflexionando uno mismo, considerando las circunstancias tal como se dan, no en abstracto, sino en un punto determinado, concreto.»
—Fernando Savater [32] (p. 43)

Querido lector:

Es mi deseo, que disfrutes de la lectura de estas páginas, por igual a como yo he gozado de su escritura. Que como rezaba un cartel, de cuya existencia en un *saloon* del antiguo Oeste, nos habla Óscar Wilde: «Por favor, no dispare contra el pianista. Lo está haciendo lo mejor que puede.» En mi caso, ocurre, que, no sólo soy pianista, sino como poco, además, explorador, descriptor y compositor, con argumentos teóricos y empíricos, pero también especulativos, algunos otros.

Es éste que tienes en tus manos, el resultado de cinco años de trabajo, en los que más que mudar mis opiniones con el tiempo, se han depurado los impulsos dominantes de mi pensamiento, en busca de un sentido a una ínfima parte de la zaleada realidad que me abruma.

Pero no pienses que estas páginas son un simple relato de lo que acude y pasa por mi cabeza. Tras donde quizás tú puedas ver una simple metáfora, hay mucho tiempo de reflexión y mucha búsqueda de rigor. Si a veces domina la coloquialidad, es fruto del entusiasmo, mas no de la repentización.

Detrás de mis cavilaciones se encuentra el trabajo de muchos, demasiados para poder mencionarlos. Esto es indudable. Por eso, permíteme dirigirme a todos aquellos que se han sentido olvidados en los agradecimientos y a esos otros que se busquen en el índice onomástico y no figuren: sólo decirles, que no se preocupen, porque gozan de una más que excelente y apropiada compañía.

En cuanto al porqué de su lectura en el Departamento de Informática de la Universidad de Extremadura, el «culpable» de ello es José Moreno del Pozo. O, mejor dicho, la culpa es de su manera de ser, de su apego a la libertad de vuelo de las ideas —pero no de la sinrazón— y de su inagotable paciencia. Y lo bueno es, que no puede decirse que mudes en liberto, porque nunca fuiste siervo, sino de la cordura y del sentido común, que volatiliza la volatería. Él es culpable de su notoriedad en un mundo universitario donde en la otredad habitan enjalbegados seres, escutiformes y liberticidas, ellos.

Lo que podrían contener estas páginas, en teoría, «tiende» al infinito. En ningún caso he pretendido, ni siquiera, acercarme a la exhaustividad de mis propuestas, pues creo que son revisables de continuo desde la auto(r)-reflexión y desde *tu* y *su* estratos extrínsecos. Pero todo tiene su final, y esta obra no iba a ser menos. Debido a su naturaleza, insisto, está inacabada, aunque creo que he conseguido que lo dicho en ella, vaya más allá de la mera indicación. Por todo ello, tengo la esperanza, rayando en el egoismo, de despertar la curiosidad en tí. Busco mi enriquecimiento, mi perfeccionamiento, y por ello, doy la bienvenida a cuantos pensamientos juzgues a bien obsequiarme, por los que te adelanto mis más candorosos agradecimientos.

Una vez que decidí comenzar a escribir estas páginas, entre las dudas que me asaltaron figuraba hasta dónde debería profundizar la redacción de los temas preliminares y colaterales. No es fácil dar una respuesta simple a esta cuestión. Te dejo a tí, querido lector, decidir si mi elección fue la acertada.

En cuanto a las citas y referencias, gozo pensando en las palabras de Bruno Latour:

«Un artículo que no contenga referencias es como un niño sin acompañante que camina de noche por una gran ciudad que no conoce: aislado y perdido.»
—Bruno Latour [33] (pp. 32-33)

Te pido perdón por aquéllas que pueda haber malinterpretado o errado en su vaciado. Ya lo decía Ambroise Bierce:

> *«Cita: acción de repetir de manera errónea las palabras de otro.»*
> —Ambroise Bierce <Diccionario del diablo>

Mi propósito ha sido siempre ilustrar, y nunca alardear —si bien, he notado que se ha deslizado algún que otro párrafo generado por una *máquina generadora de frases altisonantes* (MGFA) que me prestó durante un tiempo un buen amigo—. Por cierto que, aunque la máquina de mi amigo no es de dominio público, el lector interesado puede encontrar interesantes, como ideas primarias dos de estas máquinas que alardean de hacer alarde (aunque más básicas que la MGFA): una es la *Máquina generadora sistemática de frases de moda* (*Systematic Buzz Phrase Projector*) de Philip Broughton [34] —*cfr.* Postdata (*bis*)—, y otra, la *Máquina de hacer exámenes* de Warren Leslie [26], que con el módulo *ad hoc* adecuado, es capaz de satisfacer a los más vanilocuentes etimólogos —*cfr.* Postdata (*ter*).

Estoy obligado a solicitar tu perdón anticipado, por alguna que otra vez que te haré pensar en vano; por mis titubeos, escarbaduras, repeticiones y tanteos inconclusos; y en general, y pese a mi constante preocupación, por todas las erratas, faltas y defectos que te encuentres. Aunque, con toda seguridad, descubriré los que se escondieron, una vez encuadernados, espero haber reducido su número y su importancia a una proporción aceptable. Ni que decir tiene que el único responsable de todos y cada uno de ellos es quien suscribe.

También te pido disculpas por no haber llevado a cabo una revisión realmente crítica y prácticamente exhaustiva de todas las reflexiones de los demás, desde el nacimiento de la teoría de los conjuntos borrosos, pero esto habría exigido por sí solo un trabajo inmenso, del orden de magnitud, pienso, de otra tesis. He hecho lo que he podido: piensa que actualmente se publican unos 15.000 artículos al año sobre temas borrosos.

Podrás estar o no de acuerdo con lo que digo en las siguientes páginas, pero no es mi meta tu convencimiento sino tu incomodidad, tu perturbación. Mi propósito es animarte a «repensar» la realidad, al menos una ínfima parte suya. A que nunca abandones la pesada carga de pensar por tí mismo. A que encuentres en estas páginas ideas y conceptos, que de alguna u otra manera intuíste, o que ahora, de sopetón, adivines.

De corazón te digo, querido lector, que si, tras la lectura de estas páginas, en tí nada ha cambiado, no dudes en expurgar tu mente de cualquier recuerdo suyo.

No obstante, es un orgullo para mí, presentarte mi tesis doctoral, que más que una tesis es un ensayo, que aunque entre sus temas están la elección y la selección, peca más de abarcadora que de electiva o selectiva, y que a pesar del lugar en el que se presenta, a veces se deja llevar de la mano de lo irreverente, más que de lo puramente académico. ¡Te pido disculpas!

Pero, sobre todo, gracias por tu confianza y gracias por tu disposición a leerla.

Que como dice el poeta granadino Rafael Guillén:

> Mi única certeza
> es esta incertidumbre.

Olivenza (Badajoz), julio de 2003.

Un abrazo,

Juan Miguel León Rojas

Postdata

¡Cuidado! Algunos asertos y párrafos contenidos en esta Tesis, casi me atrevería a calificarlos de «imposturas», si no fuese por lo grimoso del término y por lo ofendido que pudieras mostrarte, querido lector, ante la poca ortodoxia y quizás descomedimiento que pareciera yo demostrar, el autor de tales fingimientos, por advertirte de forma general y no advertirte, en cada momento particular, y, sobre todo, porque tal calificativo responde a mis creencias en determinadas creencias ajenas. Esto último es lo significativo: en ninguno de tales momentos asumo el protagonismo, me limito a impregnarlos con las opiniones de otros, eso sí, a veces, matizadas y, otras, de manera más rigurosa, al menos, aparentemente.

Por poner algunos ejemplos *detectados*. En la arenga 1.10 aparecen varias. En el Capítulo 4 también se han deslizado algunas, por ejemplo, en §4.8. Otro ejemplo, concreto, es la respuesta a: «¿Es aleatorio que un profesor imparta un día mal sus clases?» (pág. 426), así como las preguntas contenidas en el párrafo inmediatamente anterior.

Te pido mis más sinceras disculpas, aunque te adelanto que trataré de proporcionar una explicación conveniente de su porqué, llegado el desenlace (Cap. 18, §18.5).

Postdata (*bis*): El *generador sistemático de frases de moda* de Philip Broughton

Philip Broughton [34] ideó un instrumento para construir frases «de moda», que hiciera parecer grandilocuente, a oídos del profano, a quien las profiriese. Lo denominó el generador sistemático de frases de moda (GSFM) (*Systematic Buzz Phrase Projector*) —*cfr. v. gr.* Broughton [34]; Bolles [35] (p. 148).

Su funcionamiento es extremadamente sencillo. Se dispone de una tabla de palabras «de moda», distribuidas en tres columnas —*cfr.* Tabla 1—. La frase resulta de elegir tres tres números al azar, entre 0 y 9, cada uno correspondiendo a una columna diferente. Por ejemplo, el código 628 corresponde a «*optional monitored hardware*» («hardware supervisado opcional»), un nuevo concepto, sin duda.

Generador sistemático de frases de moda (GSFM)					
0.	*integrated* (integrado)	0.	*management* (dirección, administración, gestión)	0.	*options* (opciones)
1.	*total* (total)	1.	*organizational* (organizativo)	1.	*flexibility* (flexibilidad)
2.	*systematized* (sistematizado)	2.	*monitored* (supervisado)	2.	*capability* (capacidad)
3.	*parallel* (paralelo)	3.	*reciprocal* (recíproco)	3.	*mobility* (movilidad, expresividad)
4.	*functional* (funcional)	4.	*digital* (digital)	4.	*programming* (programación)
5.	*responsive* (sensible)	5.	*logistical* (logístico)	5.	*concept* (concepto)
6.	*optional* (opcional)	6.	*transitional* (transicional, de transición)	6.	*time-phase* (etapa, ciclo, transcurso)
7.	*synchronized* (sincronizado)	7.	*incremental* (gradual, incremental)	7.	*projection* (proyección)
8.	*compatible* (compatible)	8.	*third-generation* (de tercera generación)	8.	*hardware* (hardware)
9.	*balanced* (equilibrado)	9.	*policy* (política)	9.	*contingency* (eventualidad, contingencia)

Tabla 1: *El generador sistemático de frases de moda, de Philip* Broughton [34].

Decía Philip Broughton [34]: «Nadie tendrá ni la más remota idea sobre qué estás hablando, pero lo importante es que no lo van a admitir.» En Internet, encontramos sitios que incluso nos ahorran el trabajo de la elección al azar, por ejemplo:
`http://webdeveloper.earthweb.com/repository/javascripts/1999/12/30/JS_23164/script23164.html`
`http://www.acronymfinder.com/buzzgen.asp`

Postdata (*ter*): La *Máquina de hacer exámenes* de Warren Leslie

En esta máquina —*cfr.* Leslie [26]—, la generación de la frase «de moda» sigue un procedimiento similar al del GSFM. Se dispone, igualmente, de una tabla de expresiones «de moda», distribuidas en cuatro columnas —*cfr.* Figura 1—. En este caso, la frase resulta de elegir 4 números al azar, entre 1 y 20, cada uno correspondiendo a una columna diferente, y de componer secuencialmente los circunloquios que figuran en las casillas elegidas. Por ejemplo:

A9–B3–C12–D6

corresponde a: «Aspectos fundamentales nos obligan a reconocer que – la especificación del significado – plantea cuestiones de difícil resolución – (y esto es tan sólo un detalle).»

Sin lugar a dudas, una frase tremendamente sustancial.

Su libro *Master para estudiantes vividores: «Aprobar sin estudiar»* viene acompañado de un «icosaedro mágico aprueba exámenes», esto es, un «dado» de 20 caras que permite elegir al azar, analógicamente, la frase al momento, con el único esfuerzo de 4 tiradas.

	A	B	C	D
1	Numerosas hipótesis confirman que	la presunta ley general	configura un cierto equilibrio armónico	dentro del más puro enfoque materialista
2	Es incluso razonable afirmar que	el predicado constituyente de las llamadas oraciones legales fundamentales	nos pone en guardia contra posibles refutaciones	especialmente en los últimos tiempos
3	Los últimos descubrimientos indican que	la especificación del significado	asume en sí su propio concepto	reincidiendo en lo anterior
4	Un hecho probable y muy discutido	la caracterización anímica satisfactoria para propósitos de explicación	constituye un serio soporte teórico	y marca las pautas de su posterior evolución
5	No obstante, considerando las numerosas implicaciones, cabe suponer que	la referencia a individuos particulares	dignifica sus oscuros orígenes	dentro del «pathos» afirmativo *par excellence*
6	Motivos de un orden superior rodean al hecho de que	el poder explicativo del enunciado	potencia la igualdad	(y esto es tan sólo un detalle)
7	Por una clara analogía con lo expuesto se deduce que	la concepción general de la explicación	respalda intelectualmente otras líneas más difusas	como bien puede comprobarse
8	Sería muy pobre nuestra respuesta si no incidiéramos en el hecho de que	la subsunción deductiva bajo leyes generales y principios pasivos	puede considerarse un buen punto de partida	con la virulencia propia de una idea triunfante
9	Aspectos fundamentales nos obligan a reconocer que	el modelo deductivo-gnomológico	predomina sobre otras clausas prosódicas afines	a pesar de atavismos culturales
10	En todo momento, es digno de consideración saber si	el quinto paradigma básico de argumentación científica	reasimila el antiguo concepto de «Vorstellung»	en un delirante asalto a la razón
11	A nadie se le oculta que	la uniformidad expresada por dichos principios	emparenta con las últimas corrientes críticas	en el marco de una próspera investigación
12	Las inapreciables circunstancias colaterales sugieren que	el penetrante examen de tales conceptos	plantea cuestiones de difícil resolución	según los trabajos del Dr. Kous Magnus Holstein de Ginebra
13	Igualmente, criterios obsoletos aparte,	una distinción no siempre valorada en los medios académicos	subraya su carácter apodíctico	en opinión de Rudolf Steiner
14	Se hace evidente que, con el tiempo,	el cúmulo de fenómenos empíricos que mencionaremos	favorece configuraciones altamente flexibles	(tómese en un sentido metafórico)
15	El ímpetu científico garantiza que	el ilimitado ámbito de la población	no tolera comparación con otros predicamentos	a causa del determinismo lógico insoslayable
16	No está de más preguntarse si	el ordenamiento y distribución de las cláusulas	extrae todo su valor de la idea de «fraternitas»	dentro de los paralelismos póstumos e inevitables
17	Evidentemente, y sin caer en imprecisiones,	el nexo ideológico existente	precisa enormes finezas para su comprensión	en pleno engarce con la más pura tradición soteriológica
18	Los numerosos tratados bibliográficos coinciden en afirmar que	la acentuación de una característica	conduce a un vigoroso ejercicio crítico	desde los oscuros tiempos preconciliares
19	Es propio de nuestra asignatura asumir que	la línea de pensamiento anterior al postmalthusianismo	implica la refutación de antiguos dogmas	*Sub quadam specie æternitatis*
20	Pero es indudable que	la pretensión de veracidad permanente	supedita nuestros razonamientos a la	¡Santiago y cierra España!

Figura 1: *La Máquina de hacer exámenes de Warren* Leslie [26] (pp. iii-iv).

Desde el otero

«—"Todo es relativo",
decían algunos contemporáneos de Aristóteles.
Respondió el Estagirita:
—Entonces, también es relativo
que "todo es relativo".
Por lo tanto,
la verdad existe ...»
—Javier FERNÁNDEZ AGUADO [36] (p. 184)



«Es conocida la historia del ebrio que andaba a gatas por la calle, bajo un farol, cuando le sorprendió un policía. Entonces, éste le preguntó: "¿Qué hace usted?". "Busco mi cartera", respondió el ebrio. El policía le ofreció ayuda, y le preguntó que dónde había perdido su cartera. El ebrio se quedó pensando un momento, y contestó: "A media calle de aquí, en el callejón." Con una mezcla de curiosidad y sarcasmo, el policía le preguntó: "Y, ¿por qué demonios no la busca usted en donde la perdió?" Y el ebrio contestó rápidamente: "Allí está demasiado oscuro para buscar."»
—Lee S. SHULMAN y Evan R. KEISLAR *[37] (p. 225), via Ricardo* MARÍN IBÁÑEZ *[38] (p. 71)*

En el cuerpo de nuestra Tesis podemos encontrar **discusiones**, **definiciones**, **teoremas**, **proposiciones**, **lemas**, **corolarios**, **demostraciones**, **ejemplos y estudios ilustrativos**. Aunque las definiciones, teoremas, proposiciones, lemas y corolarios, expresan las ideas y afirmaciones principales, no podemos olvidar las sugeridas en algunas demostraciones, en las discusiones y en los ejemplos y estudios ilustrativos, al igual que en la multiplicidad de **observaciones** que aparecen dispersas —aunque numeradas y por tanto, identificadas— entre los pensamientos anteriores, y entremezcladas con los **comentarios, observaciones, contribuciones**, **autocríticas**, **conjeturas**, **cuestiones para un futuro** y **conclusiones**, también dispersas, o concentradas en varios puntos a lo largo de la tesis, bajo títulos que comparten la idea de ser una **síntesis reflexiva**.

El hecho de ser **resúmenes, presentaciones** o **recapitulaciones**, **principios** o **finales**, depende únicamente del lugar donde se acomoden y no de sus contenidos —los que, sin lugar a dudas, son objeto de nuestras arremetidas contingentes, que encararemos aunque sea a rempujones—. Todo esto permite que podamos situar tales síntesis, tanto antes como después de la materia sobre la que hemos de escribir o hemos escrito extensamente, de manera que, por ejemplo, las metas o fines, sean las contribuciones, o viceversa.

Una última puntualización: no te dejes sorprender, querido lector, por la palabra **conjetura**, que mas bien nos referimos a su sentido según Karl Raimund POPPER:

«Puedo resumir algunas de mis conclusiones de la manera siguiente: (1) La inducción, es decir, la inferencia basada en muchas observaciones, es un mito. No es un hecho psicológico, ni un hecho de la vida cotidiana, ni un procedimiento científico. (2) El procedimiento real de la ciencia consiste en trabajar con conjeturas: en saltar a conclusiones, a menudo después de una sola observación (como lo destacan, por ejemplo, Hume y Born). (3) Las observaciones y los experimentos repetidos funcionan en la ciencia como test de nuestras conjeturas o hipótesis, es decir, como intentos de refutación. [...].»
—Karl Raimund POPPER [39] (pp. 80-81, de la versión española)

En el mismo sentido, se expresa, por ejemplo, Edwin Thompson JAYNES [40] (p. 1) con sus *hipótesis tentativas de trabajo*, o Carl G. HEMPEL [41], con *su* **método de las hipótesis**:

«Al conocimiento científico se llega mediante el llamado Método de las Hipótesis, es decir, inventando hipótesis como intentos de respuesta a un problema en estudio, y sometiéndolas después a contrastación empírica.»
—Carl G. HEMPEL [41], *via* Gene DUCH [42] (pp. 37-38)

Y mucho más allá nos atrae la conocida frase de Manet, el pintor:

> *«La naturaleza es sólo una hipótesis.»*
> —Édouard Manet, *via* Jerome S. Bruner [3] (p. 61)

Capítulo 1:
«Arengas»

Aunque rechazo cualquier expresión de violencia, y **arenga**, etimológicamente, procede del gótico *harihrings* (reunión del ejército), el fin común de las que propago en este capítulo, es que sean vistas por el lector como enardecimientos y no —así lo deseo y espero— como peroratas o soflamas, a pesar de que a algunos bien pudiéranle parecer.

Y como tantos han dicho: «no están todas las que son, pero sí son todas las que están». Al resto podrá encontrarlas el lector en su transitar por mi Tesis. Todas ellas forman parte de su espíritu. Muchas, las que más, permanecen sin respuesta, al menos, sin una convincente. Y la mayoría persevera en mi rebinar, incluso en sueños.

Pido disculpas, de antemano, pues dado su carácter, su resumen no me pertenece.

Capítulo 2:
«Oberturas»

Parece indiscutible que el aprendizaje humano —responsable, sin duda, de su evolución y progreso—, está fuertemente influenciado por el conocimiento previo poseído. Los sistemas de representación de conocimiento prestan una ayuda empírica razonable a los estudios sobre cambio conceptual, al permitir simular las interferencias que se producen entre los conocimientos nuevos con los que se poseían de antemano, así como el proceso de desarrollo y evolución conceptual.

Suponemos que los **sistemas computacionales de representación de conocimiento**, con los que trabajamos, son *efectivamente computables*, *humanamente manipulables* y que sus elementos son *distinguibles descriptivamente*. Para esto último, nos basamos en el **principio de la variedad limitada**, propugnado por John Maynard Keynes y Charles Dunbar Broad, es decir, que los atributos de los individuos se reúnen en un número finito de grupos, y en los **actos de distinción** que, como humanos, ejecutamos continuamente, y cuyos resultados son las *unidades* (objetos, entidades), en el sentido de Humberto R. Maturana y Francisco J. Varela [1] (p. 40 de la versión inglesa revisada de 1998) —*cfr.* Cita en la pág. 4—. Si bien estas unidades están vagamente perfiladas, porque desconocemos con precisión su perfil de atributos, han de ser humanamente interpretables. Como intérpretes en estos papeles de **unidades vagamente perfiladas**, hemos elegido a los **objetos borrosos**.

Actualmente, en la mayoría de los sistemas computacionales de representación de conocimiento, los mecanismos primarios de inferencia como la *categorización* y la *clasificación*, se llevan a término utilizando criterios de **subsunción**. Pero el uso de argumentos de subsunción acarrea ciertos problemas computacionales, por ejemplo, con respecto a la comprobación de tipos, la autorreferencia y las clases cíclicas.

Por otro lado, las **consultas basadas en similitud** se constituyen en un paradigma de búsqueda para muchísimas aplicaciones, como bases de datos multimedia, minería de datos (*data mining*), reconocimiento de patrones, biología molecular, comercio electrónico, o la búsqueda en Internet, por poner varios ejemplos.

El presente capítulo nos motiva, descubre y conduce hacia la primera meta de nuestra Tesis: definir un marco teórico de trabajo adecuado para comparar conjuntos borrosos, ordinarios o no (Φ-borrosos, de nivel n, de tipo n, etc.), y nos propone basar las comparaciones en similitudes, evitando así los, a veces, arriesgados, argumentos por subsunción.

Capítulo 3:
«Exámenes preliminares»

Comoquiera que a lo largo de este estudio hablaremos de clasificaciones y ordenaciones, porque serán básicos para nuestros actos de decisión o juicios por comparación, no está de más comenzar por recordar las propiedades, de más frecuente aparición, de las **relaciones binarias**, nociones acerca de los **retículos**, prestando una atención especial, a los retículos normados; estudiamos los intervalos, presentando las extensiones, ya clásicas, de las operaciones elementales de la aritmética, a **intervalos ordinarios** y a **intervalos de tipo 2** (intervalos cuyos extremos son intervalos), y la noción de **función de inclusión**, esto es, una función de intervalos (su argumento y su resultado son intervalos o n-tuplas ordenadas de intervalos) generada como extensión de una

función real de variable real (cuyo argumento y resultado son números reales o n-tuplas ordenadas de números reales), distinguiendo entre la **extensión natural de funciones reales factorizables** —que es la que nosotros usaremos—, **la extensión de valor medio** y la **extensión mediante un polinomio de Taylor** (Brook) de grado 2.

Capítulo 4:
«Idas y venidas entre lo nítido y lo borroso»

La mayor parte del presente capítulo, se centra en revisar algunas nociones, propiedades y teoremas, relativos a la lógica y a la teoría de conjuntos borrosas, así como a su historia. No obstante, lo original, además de en las diferentes observaciones que surgen a lo largo de la exposición, se aglomera en dos **contribuciones concretas**:

- En §4.4.5, destacamos la importancia de los números borrosos no normales, a los que denominamos **cuasi-números borrosos**, motivando su definición con varios ejemplos: *fiabilidad de dispositivos medidores* como los sonómetros (medidores de nivel sonoro); *desempeño de tareas*, interpretando la fiabilidad como *confianza en el trabajador*; comparación de calificaciones en un supuesto de *evaluación de capacidades subjetivas*; y valoración de la *capacidad de juicio de un evaluador*.
- El anexo anticipador §4.11 recoge algunas investigaciones nuestras a partir de los conjuntos borrosos o L-borrosos intuicionistas de Krassimir T. Atanassov. Un conjunto borroso queda caracterizado por su función de pertenencia. Un **conjunto borroso intuicionista** considera, además, la función de no-pertenencia; es un caso particular —para $L = [0, 1]$— de conjunto L-borroso intuicionista, siendo $(L, \leq)$ un retículo. Las funciones de pertenencia y no-pertenencia se relacionan mediante una involución de inversión de orden en $(L, \leq)$. La idea que aportamos en esta sección es ampliar estos conceptos considerando una lógica base trivalente, que refleje situaciones de duda sobre «la pertenencia o no pertenencia» (el típico «no sabe, no contesta» de una encuesta) —tres valores: [Sí], [No], [Ns/Nc]—, o **tetravalente**: ¿por qué no considerar dudas separadas, es decir, dudas sobre «la pertenencia» y dudas sobre «la no pertenencia»?

Capítulo 5:
«Comparar para aprender»

Al ser una de nuestras metas la definición de un marco de trabajo adecuado para comparar conjuntos borrosos, ordinarios o no, parece ser de cajón que comencemos preocupándonos de la propia noción de **comparación**. Comenzamos estableciendo la **reflexividad** y la irreflexividad, como esencia de la comparación, y definimos los conceptos de **asignación básica de similitud**, de **asignación básica de disimilitud** y de **medida de comparación entre objetos**. Asimismo, reflexionamos sobre ciertas propiedades que cualquier asignación de medida de comparación entre objetos debería satisfacer. La introducción de la **simetría**, nos permite definir las nociones de **similitud** y **disimilitud**, a partir de las asignaciones básicas respectivas.

Los capítulos 6, 7 y 10, y los cuatro ensayos (Caps. 11, 12, 13 y 14), completarán el marco de trabajo, aquí iniciado, para comparar conjuntos borrosos, sean ordinarios o no.

Capítulo 6:
«Asignaciones de comparación entre intervalos»

En este capítulo ampliamos la idea clásica de medir como distancia entre dos intervalos, el promedio de las distancias entre sus extremos correspondientes, a medir dos colecciones de puntos pertenecientes a los intervalos, siempre con los puntos extremos entre sus elementos, o sea, los que llamamos dos α-percentilados de los intervalos, respondiendo así a la existencia de **situaciones de no discernibilidad**, cuando para comparar intervalos, sólo se tienen en cuenta, como clásicamente, sus puntos extremos. Hemos estudiado los que denominamos **intervalos y líneas de confusión** para las métricas α-percentiladas de Minkowski. Hemos encontrado condiciones suficientes en el caso finito, para que estas disimilitudes α-percentiladas y ponderadas que hemos propuesto, sean pseudodistancias, distancias o métricas, en el espacio de intervalos considerado. En §6.19.1 hemos logrado identificar una **subclase de φ-métricas basada en subaditividad**, mientras que en §6.19.2, una **subclase de φ-métricas basada en concavidad**.

Extendemos la idea de disimilitud entre intervalos, calculada a partir de disimilitudes locales entre puntos, a la idea de calcularla a partir de **disimilitudes locales entre subintervalos** de los intervalos originales, proponiendo un esquema iterativo de cálculo. Como un primer ejemplo ilustrativo, observamos que las **quasi-normas de los espacios lineales complejos** $\ell_q^N(\ell_p^M)$ $(M, N \in \mathbb{N};\ 0 < p, q \leq \infty)$ son un caso particular de las definidas por dicho esquema iterativo. Como segundo ejemplo ilustrativo, reflexionamos sobre varios temas relacionados con las dificultades de **evaluar los aprendizajes**.

Capítulo 7:
«Comparando conjuntos borrosos»

En este capítulo proponemos **asignaciones de medida de comparación entre conjuntos borrosos**, disimilitudes, algunas de ellas, métricas. Las unas, «**horizontales**», comparando conjuntos borrosos a partir de las diferencias entre los referentes —para lo que hemos supuesto que el universo de discurso es $\mathbb{R}$ o un retículo normado, de tal forma que los α-cortes son intervalos del retículo, y, en definitiva, comparamos conjuntos borrosos a partir de las comparaciones entre sus α-cortes, pudiendo utilizar las asignaciones de comparación entre intervalos propuestas en el capítulo anterior, para el caso de α-percentilado finito, infinito numerable y continuo—. Las otras, «**verticales**», referida al grado de «superposición» entre conjuntos borrosos. Como ejemplos ilustrativos, pensamos en el **reconocimiento de queiremas aislados** y en la **comparación de figuras planas**.

Capítulo 8:
«Estudio ilustrativo: administración con personas»

Uno de los factores más influyentes en la buena marcha de las organizaciones es la **elección de candidatos**, sin duda, una actividad muy política, dado que todo el proceso de elección, la propia elección y el resultado de la misma pueden mudarse en armas arrojadizas dentro de las luchas internas por el poder. Una buena elección es sumamente importante, y aunque peque de perogrullada, es así, y hay que decirlo. Las investigaciones muestran, que, en media, incluso los reclutadores más experimentados eligen con acierto a los candidatos sólo en un 50 por ciento. Los **programas informáticos** y el **reclutamiento electrónico** pueden contribuir a conseguir mejores resultados. En este sentido, este capítulo penetra en los entresijos de las organizaciones, en el mundo de la elección de candidatos, de la **promoción interna**, de la **valoración de tareas**, de la **evaluación del desempeño**, de la **polivalencia**, destacando, en todo momento, la importancia de la **comunicación abierta, interna y externa**, en una **administración** que, cada vez más, es **con personas y para las personas**, donde las barreras de las estructuras jerárquicas o piramidales se derrumban, dando paso a la **participación total**, a la estructura de la organización **en red**, en múltiples direcciones: verticales descendentes (jerárquicas), verticales ascendentes (desde los subordinados), horizontales (entre compañeros) o diagonales (interdepartamentales).

Capítulo 9:
«Estudio ilustrativo: prejuicios auguradores»

> *«¿Quién es el hijo de mis padres que no es hermano mío?»*
> —Roger Dawson [43] (p. 288, de la edición española)

¿Por qué no respondemos de inmediato que yo? ¿Por qué buscamos relaciones extrañas de parentesco? Roger Dawson dice que se debe al **pensamiento estereotipado**: «Los estereotipos se forman porque la mente busca siempre el camino más corto para una decisión, la vía de mínima resistencia. Es más fácil dar por supuesto que una persona o una situación se ajusta a las pautas de nuestra experiencia anterior, que tener que juzgar, partiendo de cero, a cada persona o situación según su realidad.» —*cfr.* Dawson [43] (p. 287, de la edición española).

A lo largo y ancho de todas estas páginas, no paramos de hablar de *prototipos*, *estereotipos*, *arquetipos*, *ideales*, o *modelos*. Pero la realidad es que, la mayoría de las veces, no resulta nada sencillo definir un estereotipo. Por ejemplo, cuando se hace un diseño curricular, se trabaja con estereotipos o modelos de alumnos. Sin embargo, **¿quién definió tales estereotipos?** (si los hay), ¿y cómo lo hizo?

Animados por nuestra inquietud y por la lectura de «clásicos» como el maravilloso artículo de Douglas L. Medin, Robert L. Goldstone y Arthur B. Markman [5], decidimos emprender nuestra propia investigación acerca de nuestra concepción apriorística, y mal que nos pese, prejuzgadora y estereotípica, de los alumnos a los que impartimos clases, corroborada por el rumor de pasillos que circula constantemente, sobre, al menos dos estereotipos, los alumnos «de la técnica» y los «de la superior». A tal estudio, dedicamos este capítulo.

Capítulo 10:
«Desarrollo y evaluación de TOPSIS-0/1: Información orientada a objetos y clases borrosas»

En este capítulo, desarrollamos y evaluamos TOPSIS-0/1, una técnica modificadora de TOPSIS, que nos permitirá **eludir los argumentos basados en subsunción** en los sistemas basados en conocimiento borroso, que han sido los que hemos elegido para interpretar el papel de los sistemas de conocimiento basados en unidades vagamente perfiladas.

Como decíamos en §2.3, suponemos que cualquier objeto y cualquier clase —de cara a nuestros fines, clase será sinónimo de tipo, e incluso de vista (clase virtual)—, se representa en el sistema por un **perfil descriptivo**

consistente en un conjunto de puntuaciones relativas a unos atributos pertenecientes a una colección finita preestablecida. Cada una de estas puntuaciones denota el grado en el que el atributo al que se refiere la puntuación es satisfecho por el objeto o clase.

Capítulo 11:
«Primer ensayo: comparación de conjuntos nítidos»

Como decíamos en páginas anteriores, empezando por el Capítulo 5, una de nuestras metas es la definición de un marco de trabajo adecuado para comparar conjuntos borrosos, ordinarios o no. Dedicábamos el comienzo de dicho capítulo, a definir los conceptos de asignación de medida de comparación, de similitud y de disimilitud entre objetos. En este primer ensayo, seguimos construyendo dicho marco, extendiendo las ideas anteriores para objetos al caso de conjuntos nítidos. Estas definiciones se establecen para los conjuntos de una σ-álgebra $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, aunque las extendemos, de manera natural, a una colección cualquiera S de subconjuntos de $\mathcal{U}$. Usando una asignación básica de medida μ, en lugar de la medida discreta (el cardinal), y extendemos, de manera natural, las definiciones de coeficiente de similaridad y de coeficiente de disimilaridad, que resultarán ser casos particulares de las medidas de parecido y distinción, respectivamente, que aquí también definiremos. Las definiciones anteriores pueden extenderse al caso de conjuntos borrosos, utilizando la σ-álgebra borrosa en vez de la σ-álgebra nítida. Finalizamos considerando **valoraciones lingüísticas de una comparación**, como es natural en nuestros actos corrientes de lenguaje, por lo que proponemos la definición de **asignación básica de medida de conjuntos con valoración borrosa**. En el capítulo 17, concretamente en §17.2, completamos estos conceptos, definiendo los de **asignación lingüística de medida de conjuntos**, **cuasi-probabilidad lingüística**, y **probabilidad lingüística**.

Capítulo 12:
«Segundo ensayo: ¿cuál es la más cercana? ¿y la más lejana?»

En este segundo ensayo, introducimos el concepto de **relación de cercanía** desde un punto de vista intuitivo: si algo es cercano a nosotros dos, es que es cercano a tí o a mí, y recíprocamente, si algo es cercano a tí o a mí, es cercano a nosotros dos (si lo es a mí, lo es a tí, a través de mí). De manera similarmente intuitiva, introducimos la noción de **relación de lejanía**: si algo está lejos de nosotros dos, es que está lejos de tí y de mí, recíprocamente, si algo está lejos de tí y de mí, entonces, está lejos de nosotros dos.

Una relación de cercanía no tiene que ser simétrica. Por ejemplo, una relación de cercanía entre diferentes puntos de una ciudad, bajo el supuesto de que todos los desplazamientos se hacen en coche, cumpliendo el código de circulación. En este caso, el hecho de que un punto A esté cercano a un segundo punto B, no implica el recíproco: basta con imaginar que A y B sean los puntos extremos de una calle de una sola dirección, y que ir (en coche) desde B hasta A, suponga dar un rodeo considerablemente largo.

Extendemos estas relaciones a **conectivas distintas a la disyunción y la conjunción** y, en §12.2, a relaciones entre subconjuntos completos de un retículo, definiendo la cercanía sup-inf entre dos de ellos, como el agregado (según la conectiva elegida) entre las cercanías entre los extremos. Para conseguir gradaciones intermedias en la valoración de verdad de «ser cercano a», introducimos, en §12.3, la noción de **cercanía borrosa**, y demostramos que **podemos interpretar el grado de pertenencia como un grado de cercanía**.

Prestando, en todo momento, una atención particular a los **problemas de categorización de prototipos** y de **clasificación de ejemplares**, en §12.10, proponemos **indicadores de cercanía y lejanía** para intervalos α-percentilados; en §12.11, extendemos estos indicadores a intervalos de tipo 2; y en §12.12, los extendemos a subconjuntos Φ-borrosos, considerando dos aproximaciones: una basada en secciones verticales, y la otra basada en α-cortes.

Capítulo 13:
«Tercer ensayo: ¿cuál es la más cercana y la más lejana, *a la vez*?»

Varias han sido las aproximaciones que se han desarrollado para definir los **conceptos** de una manera natural. Este tercer ensayo mantiene el espíritu engendrado, principalmente, por las aproximaciones de Wittgenstein, Rosch (Heider) y Zadeh.

Lo que proponemos y hacemos nosotros es que, en vez de relaciones de parecido, similaridades, diferencias, etc., utilizamos los indicadores de cercanía y de lejanía vistos en el ensayo anterior. Los primeros nos permiten tener una idea sobre la semejanza de un ejemplar no clasificado con respecto a los miembros de una clase dada, mientras que con los segundos podemos determinar su diferencia respecto del resto de las clases. El hecho de que no necesitemos una medida simétrica de cercanía (resp., lejanías), nos conduce a la tercera idea en juego, las **cercanías** (resp., lejanías) **dobles**: *Dado un ejemplar, no sólo es importante encontrar el prototipo a cuyo*

perfil de características sea más cercano el perfil del ejemplar, sino también encontrar el prototipo cuyo perfil sea el más cercano al del ejemplar.

Clásicamente, la cuestión es la primera, o en todo caso, ambas son abordadas implícitamente debido a la simetría de las medidas de parecido y semejanza más usadas. La aproximación por doble cercanía, considera ambas cuestiones a la vez, obteniendo un único prototipo, y permitiendo modular la pertinencia o relevancia de cada cuestión en el prototipo finalmente obtenido. Este tipo de asimetría es bien conocido en las **ciencias cognitivas**.

La aproximación por doble cercanía está parametrizada por operadores de lógica borrosa, así como por operaciones de agregación, algo que resulta frecuente en el desarrollo de Sistemas «Inteligentes» Borrosos. Presentamos el marco de trabajo de las dobles cercanías/lejanías en el escenario de la administración para y con las personas, en concreto, en relación a la **Elección multicriterio de personal o puestos**. Analizamos cuatro situaciones de elección desde una perspectiva integradora y simultánea de la elección de aspirantes por las organizaciones y su recíproco, la elección de las organizaciones por los candidatos. Ambas situaciones son frecuentes, debido a los constantes cambios en el mercado de trabajo. Finalmente, describimos el método brevemente en otros escenarios: **Diagnosis y prognosis médicas sintomáticas** (§13.4), **Comparación de imágenes digitales** (§13.5) y **Diagnosis y prognosis médicas por imagen** (§13.6). En todos ellos, la descripción final de los prototipos (lo conocido) y de los ejemplares (los hechos) se lleva a cabo mediante subconjuntos Φ-borrosos de tipo 2 (la pertenencia es expresada mediante un intervalo cuyos extremos son subconjuntos borrosos ordinarios). Como, en general, la negación de una cercanía es una lejanía, ya sea en intervalos, en intervalos de tipo 2, en conjuntos borrosos, en conjuntos Φ-borrosos o en conjuntos Φ-borrosos de tipo 2, reducimos el estudio principalmente a cercanías.

Capítulo 14:
«Cuarto ensayo: ajustes y desajustes»

Cuando comparamos los perfiles de un puesto de trabajo y un aspirante, podemos encontrarnos ante cualquiera de las nueve siguientes que mostramos en la Fig. 2:

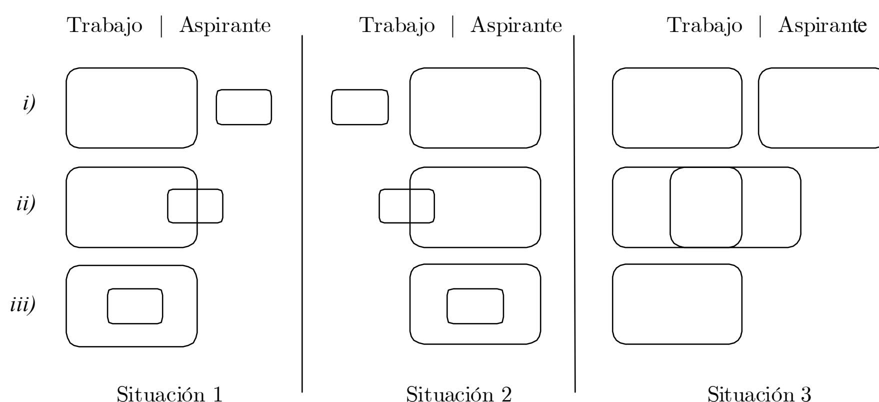


Figura 2: *Esquema de las diferentes situaciones posibles al comparar perfiles de puestos y candidatos.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Todas las situaciones (x.*i*) son absolutamente **insatisfactorias**: el puesto y el aspirante no tienen nada en común. Las situaciones (x.*ii*) son **satisfactorias**, en mayor o menor grado, dependiendo del tamaño de la intersección. La situación (3.*iii*) es la **ideal**: representa el hecho de un perfecto ajuste entre los perfiles de un puesto y un candidato. Las situaciones (1.*iii*) y (2.*iii*), conllevan un desaprovechamiento del puesto de trabajo y del aspirante, respectivamente.

Esto nos motiva a proponer un marco de trabajo de **asignaciones básicas de medida de ajuste y desajuste**, que incluirá las cercanías y lejanías anteriores como casos particulares. Dependiendo de la naturaleza del problema, serán utilizadas las unas o las otras. Los resultados obtenidos se aplican a algunos ejemplos concretos. Finalmente, en §14.6, mostramos algunas de las relaciones de inclusión entre algunas de las diferentes **asignaciones de medida de las diferencias** que hemos definido en estos cuatro ensayos.

Capítulo 15:
«Un minero de datos ataviado con indumentaria tornasolada (borrosa y bayesiana)»

El apego metodológico sigue siendo una seña de identidad en la comunidad científica. No olvidemos que muchos todavía consideran **no ortodoxo** a lo bayesiano. Baste recordar, por ejemplo, lo que figura en la contracubierta de *Introduction to Probability and Statistics (from a Bayesian Viewpoint). Part 2. Inference* de Dennis V. Lindley [44], publicado en 1965: «El tratamiento de la inferencia adopta el punto de vista bayesiano; esto es, está basado en el concepto de una medida numérica del grado de creencia en una hipótesis científica. Aún hoy en día, se considera algo no ortodoxa esta aproximación pero cada año que pasa se generaliza más su aceptación.»

Con estos tres capítulos: «Un minero de datos ataviado con indumentaria tornasolada (borrosa y bayesiana)», *bis* y *ter*, tratamos de contribuir a suavizar el tajante exclusivismo existente en la disyunción entre lo bayesiano y lo borroso. En todo momento nos hemos sentido animados por un «espíritu ecuménico» —como decía House [45]—, un **talante ecléctico**, postulante de la complementariedad metódica y teórica, arraigado firmemente en nuestra naturaleza humana.

Para lograr estos fines, pensamos que deben usarse formalismos de representación de conocimiento incierto e inexacto. La aplicación de lo borroso y lo bayesiano se ha visto colmada de éxitos. La lógica borrosa —*cfr.* Klir y Yuan [46]— y las redes bayesianas —*cfr.* Pearl [47]; Castillo, Gutiérrez y Hadi [48]—, junto a los algoritmos asociados a ellas que se usan para razonar, son dos formalismos de representación del conocimiento que han sido usados para tratar esta cuestión, en multitud de estudios punteros.

En este primero, suponemos que disponemos de una evidencia nítida que se ha asignado al ítem bajo estudio con relación al grado de satisfacción de una propiedad, grado que se clasifica en tipos diversos. Por ejemplo, cualquier nota o puntuación numérica nítida (p. ej., en media, por una comisión evaluadora de expertos) que sea dada a un trabajador, con relación al **grado de destreza en el desempeño de una tarea** determinada, según la realice torpemente, atolondradamente, con soltura, con pericia, o con habilidad sorprendente.

Para conseguir que varios expertos compartan información relacionando la evidencia con tales clases, parece mucho más conveniente usar evidencia borrosa en vez de evidencia nítida. Consideramos un conjunto de términos de cinco valores lingüísticos o palabras, de cinco valores borrosos de evidencia: $\mathcal{L}(E) = \{$muy bajo (MB), bajo (B), medio (M), alto (A), muy alto (MA)$\}$.

Abundando en ello, y de forma explícita, la idea que subyace a nuestra propuesta es la asunción de que *ningún valor numérico preciso puede considerarse como una puntuación razonable para asignarla a un ítem (p. ej., un trabajador) en relación al grado de satisfacción de una propiedad (p. ej., el grado de destreza en el desempeño de una tarea).*

El problema consiste en estudiar la **propagación bayesiana borrosa de tal imprecisión** en la evidencia. La ejemplificación ilustrativa que vemos de tal problema es: dado un trabajador, al que se le ha asignado (p. ej., en media, por una comisión evaluadora de expertos) una puntuación numérica nítida, en referencia a la evaluación del desempeño de una tarea (por una prueba o test rápido de desempeño), entonces, decidir cuál es el grado de destreza del trabajador en el desempeño de la tarea en cuestión (durante una actividad normal y no en una prueba o test rápido), es decir, clasificar la tarea, con respecto a dicho trabajador, en una de las cinco clases mencionadas anteriormente, según la tarea sea desempeñada por dicho trabajador, torpemente, atolondradamente, con soltura, con pericia, o con habilidad sorprendente.

Capítulo 16:
«Un minero de datos ataviado con indumentaria tornasolada (borrosa y bayesiana) (*bis*)»

En esta segunda parte, suponemos que disponemos de una evidencia nítida, valorada con intervalos, que se ha asignado al ítem bajo estudio con relación al grado de satisfacción de una propiedad, grado que se clasifica en varios tipos. Continuaremos con el mismo ejemplo relativo al **grado de destreza en el desempeño de una tarea**. El problema es: dado un trabajador, al que se le ha asignado (p. ej., en media, por una comisión evaluadora de expertos) una puntuación nítida, en forma de intervalos, en referencia a la evaluación del desempeño de una tarea (por una prueba o test rápido de desempeño), entonces, decidir cuál es el grado de destreza del trabajador en el desempeño de la tarea en cuestión (durante una actividad normal y no en una prueba o test rápido), es decir, clasificar la tarea, con respecto a dicho trabajador, en una de las cinco clases mencionadas anteriormente, según la tarea sea desempeñada por dicho trabajador, torpemente, atolondradamente, con soltura, con pericia, o con habilidad sorprendente.

Insistimos en la diferencia con el planteamiento del capítulo anterior: **la evidencia se valora aquí con intervalos**. En el capítulo siguiente, la tercera parte del «minero», abordaremos el problema suponiendo que la evidencia se valora con palabras.

Capítulo 17:
«Un minero de datos ataviado con indumentaria tornasolada (borrosa y bayesiana) (*ter*)»

Como decíamos en el capítulo anterior, ha sido muy habitual el representar las probabilidades por números reales del intervalo $[0, 1]$. Sin embargo, esta es sólo una posibilidad, y quizás no sea la más frecuente. Allí tratamos el caso de que las probabilidades se representasen por intervalos. Este capítulo lo dedicamos a las **palabras**. «Gran probabilidad», «mucha probabilidad», «probabilidad baja», etc., son expresiones frecuentes en nuestro lenguaje natural.

El origen de estas expresiones está en una información insuficiente, en una falta de datos, que nos impide estimar de manera precisa las probabilidades. Las anteriores son ejemplos de «probabilidades» lingüísticas o cualitativas, pero también empleamos intervalos de probabilidades numéricas («la probabilidad está entre 1/5 y 1/4»), intervalos de «probabilidades» lingüísticas («con una probabilidad media-baja») o probabilidades de segundo orden («la verdad es que hay una probabilidad bastante alta de que la probabilidad de que llueva mañana esté entre 0.2 y 0.3»).

Tradicionalmente, también se ha exigido la **aditividad** en los juicios basados en probabilidades o frecuencias (esto es, que la frecuencia asignada a un suceso sea igual a la suma de las frecuencias asignadas a un conjunto exhaustivo de componentes suyas, mutuamente excluyentes). Pero, de nuevo, en las relaciones humanas, esta es una mera posibilidad. Es mucha la evidencia, por ejemplo, a favor de la **Teoría del Soporte**, de Amos Tversky y Derek J. Koehler [49], según la cual lo más frecuente es la **subaditividad**.

Capítulo 18:
«Desenlace»

Como decía Charles F. Kettering: «cuando se la encuentra, la respuesta es sencilla». No esperes lector conclusiones definitivas ni afirmaciones categóricas del tipo «el presente estudio ha alcanzado los objetivos metodológicos y teóricos que planteaba». Nosotros **no estamos seguros** de que hayamos encontrado respuestas, **sólo lo creemos**, aunque con lo que sin duda nos hemos topado es con una multitud de preguntas. Aún más, ignoramos si mucho de lo que hemos encontrado son respuestas, porque desconocemos las preguntas.

Apéndice A: «Lenguas de señas»

Este primer apéndice, dedicado a las Lenguas de Signos Gestuales, tiene su razón de ser en el Ejemplo ilustrativo 7.3, que propone el problema del reconocimiento en tiempo retardado de queiremas aislados. Comienza el apéndice con una brevísima exposición histórica —*cfr.* §A.1—, estableciendo las definiciones de pose, postura, gesto y signo en §A.3. Sigue la presentación de la estructura lingüística y articulatoria de un signo gestual —*cfr.* §A.5— y del caso concreto de la Lengua de Signos Española (LSE), con los parámetros manuales que intervienen en la articulación de un signo genérico —*cfr.* §A.6—. Finalmente, en §A.7 comentamos la importancia de la expresión de la cara, en el proceso de reconocimiento e identificación de los signos pertenecientes a las lenguas naturales de signos gestuales.

Apéndice B: «Medidas de disimilitud entre distribuciones de probabilidad»

En el Capítulo 17, proponíamos, para cada individuo, convertir su perfil descriptor dado por intervalos de extremos distribuciones de probabilidad, en un perfil descriptor donde no intervengan probabilidades, en realidad, en un perfil descriptor Φ-borroso de tipo 2, donde los extremos de los intervalos son subconjuntos borrosos ordinarios. Para llevar a cabo esto, necesitamos saber medir la **distancia o divergencia entre distribuciones de probabilidad**. Podemos hacerlo, directamente, esto es, a partir de las disimilitudes locales entre valores de las funciones de distribución, o indirectamente, a partir de medidas locales entre valores de sus funciones de densidad asociadas. En este último caso, Krzanowski [50] distingue entre: medidas relacionadas con la **medida de afinidad** propuesta por Bhattacharyya, y **medidas basadas en ideas provenientes de la teoría de la información**. En cualquier caso, destacábamos la necesidad de utilizar **divergencias ponderadas** entre distribuciones de probabilidad. Todas ellas las recogemos en este Apéndice.

Apéndice C: «La comunidad moral de los iguales»

Es otra arenga. El haber hablado de la comunidad de los iguales, comunidad humana, en el capítulo 8.2, ha conmovido mis **sentimientos de ser vivo**, más que de especie. Aunque debemos ser realistas: pretender ampliar esta comunidad a los grandes primates, como defienden en su libro, Paola Cavalieri y Peter Singer [51], es un objetivo a largo plazo, a muy largo plazo; y pretender ampliarla a otros seres vivos, es, sencillamente, una utopía. Pero la justicia, como la estabilidad y el equilibrio, sólo es una cuestión de tiempo, así que no es una ucronía. He ahí el porqué de este apéndice. Al igual que en el primer capítulo, donde se reunieron otras tantas arengas, pido disculpas, pues dado su carácter, su síntesis reflexiva no me pertenece.

* * *

Cuando tras transcribir textualmente una cita de un autor, usamos la fórmula «*via* Autor$_1$ y ... y Autor$_n$», queremos indicar que han sido ellos quienes nos han permitido acceder al conocimiento del primero, bien porque nos dirigieron hacia la lectura directa de la cita, bien porque nos la mostraron en su obra.

También hemos de decir que, a veces, hemos manejado recopilaciones de citas. En concreto, tres: *Calendario de la Sabiduría* de León Tolstoi [52], *Diccionario de Citas Literarias*, de Florence Montreynaud [53] (ampliado por Ana Quintanilla), y *The Macmillan Dictionary of Quotations*, de Macmillan Publishing Company [54].

1

Arengas

«Hay una anécdota que se cuenta sobre un muy famoso y brillante teórico de la decisión.
Se le ofreció un puesto de trabajo en otra universidad,
aunque estaba muy comprometido con la universidad en la que estaba trabajando.
Fue a discutir con su mejor amigo si debía aceptar o no.
Su amigo le hizo ver que era un famoso teórico de la decisión, y que
debía ser capaz de aplicar su teoría de la decisión para tomar la decisión en cuestión.
El teórico de la decisión quedó completamente anonadado.
La teoría de la decisión sólo se aplica, en la mayor parte de los casos,
cuando las partes más difíciles de la decisión ya han sido tomadas.»
—John R. Searle [55] (p. 155)



[...] Pero estaban empezando a desvanecerse en la monocromía de lo que se tiene demasiado aprendido. Quedarse en el mismo sitio durante tanto tiempo estaba comenzando a nublarle la mente.»
—Richard Powers [56] (p. 125)

Aunque rechazo cualquier expresión de violencia, y arenga, etimológicamente, procede del gótico harihrings (reunión del ejército), el fin común de las que aquí propago es que sean vistas por el lector como enardecimientos y no —así lo deseo y espero— como peroratas o soflamas, a pesar de que a algunos bien pudiéranle parecer.
Y como tantos han dicho: «no están todas las que son, pero sí son todas las que están». Al resto podrá encontrarlas el lector en su transitar por mi Tesis. Todas ellas forman parte de su espíritu. Muchas, las que más, permanecen sin respuesta, al menos, sin una convincente. Y la mayoría persevera en mi rebinar, incluso en sueños.
Pido disculpas, de antemano, pues dado su carácter, su resumen no me pertenece.

1.1 Comienzos

«El fundamento de cualquier teoría es el ejercicio social.»
—Isaac Newton

Dicen las malas lenguas que las ocasiones de utilizar en la vida real los conocimientos matemáticos adquiridos son muy raras y que, fuera de las cuatro reglas y la noción de proporcionalidad (regla de tres), el adulto normal no tiene apenas ocasión de, por ejemplo, calcular la longitud de una circunferencia o el volumen de un cono. Por otro lado, algunos de los que han llegado a profesionales, grandes empresarios u hombres de Estado se jactan de no haber comprendido en absoluto «las Matemáticas».

«Para triunfar en el mundo de los negocios no se precisa título académico alguno. Las escuelas y las facultades preparan a gentes subalternas para desempeñar funciones rutinarias. No producen, desde luego, empresarios; no se puede fabricar empresarios. El hombre deviene empresario sabiendo aprovechar oportunidades y llenando vacíos. El certero juicio, la previsión y la energía que la función empresarial requiere no se consigue en las aulas.»
—Ludwig Von Mises [57], *via* Javier Fernández Aguado [36] (p. 86)

«Que nadie entre aquí si no es geómetra» (entiéndase matemático) decía Platón. Y es que estos altaneros zotes de lo formal, no comprenden que su analfabetismo matemático no es tal, sino que han conseguido sobrepasar la matemática concreta traduciéndola a una nueva lengua depurada, más abstracta si cabe, pero que conserva los principios de la matemática, expandiendo su, ya de por sí, gran potencia de razonamiento, y permitiendo simplificar de alguna forma su visión del mundo para dar a su acción más fuerza y eficacia.

La realidad es que en muchísimas ocasiones **nos sentimos obligados a la precisión**. Rechazamos lo vago. Nos asusta lo impreciso, aun siéndolo nuestra lengua, con toda seguridad, el medio más frecuente de ejecutar actos de comunicación.

No obstante, hay ocasiones en las que no queda más remedio que exigir tal precisión: ahora que tan de actualidad, por desgracia, está el término de «armas inteligentes», las armas no han de ser inteligentes, han de ser precisas. No podemos permitir la imprecisión a la hora de construir puentes, edificios, o peraltar las curvas de una carretera.

Usamos una matemática *precisa* para responder de nuestras cuentas ante el Estado. Pero muchos de nosotros, seríamos partidarios de una menor precisión, de una burocracia más flexible. Quizás sea éste un término con connotaciones no tan dramáticas como «vagos». Por ello, algunos prefieren calificar de **flexible** a lo vago y de **inflexible** a lo no-vago.

Pero por mucho que hayamos sido educados en la sobriedad y precisión del lenguaje matemático, preferimos razonar, en nuestros actos sociales, con palabras y no con «matemáticas». Preferimos decir gris oscuro que RGB(60,60,60). Quizás sea Bart KOSKO el más pertinaz defensor de la introducción de los razonamientos con palabras en el quehacer social cotidiano. Recomendamos la meditada lectura de sus escritos, en particular de *Pensamiento borroso* [58] y de *El futuro borroso o el cielo en un chip* [59].

UNA SITUACIÓN RECIENTE EN LA QUE ME VÍ IMPLICADO, corroboró mis sospechas. Ante una columna de hormigón armado, ligeramente combada, «un poquito sólo», según un arquitecto amigo, quien me comentaba que podríamos hacer los cálculos necesarios para demostrar que la combadura no iba a afectar a la estructura del inmueble, pero que no merecía la pena: la probabilidad de verse afectada era bajísima, prácticamente nula. Lo que hizo mi amigo no fue más que una *previsión bayesiana sobre datos no precisos, que valoró borrosamente (con palabras).* Bayesiana, porque su dilatada experiencia como arquitecto le proporciona un vasto conocimiento a priori, que supo aprovechar para realizar su inferencia. Sobre datos no precisos, porque en ningún momento midió la combadura de la columna, se limitó a utilizar una palabra para valorar tal combadura: «ligeramente». Y, finalmente, valoró borrosamente una probabilidad: no proporcionó un valor numérico, sino que emitió un juicio sobre ella con palabras, la probabilidad es «bajísima», «prácticamente nula» —y no sólo borrosamente, sino que empleó dos palabras, dudaba entre ellas; en realidad la valoración borrosa era también imprecisa.

En el esquema de la Fig. 1.1, nuestro caso se sitúa en el último eslabón: se trata de una abstracción cualitativa imprecisa —la culpa, de los calificativos de la comba: «ligeramente», «un poquito sólo»—, a partir de la cual, el proceso de inferencia nos proporciona una solución (auto-)explicativa. Es decir, hemos sido capaces de generar una explicación a partir de una abstracción de la realidad, sin tener que recurrir a un intérprete de valores numéricos —*cfr. v. gr.* FORBUS [60]—, sean estos precisos (números) o no (intervalos). Y ello, ¿por qué? Porque hemos trabajado con términos similares a los que emplea el razonamiento humano, términos cualitativos frente a cuantitativos.

ESTO NOS TRAE A LA MEMORIA EL MODELADO Y RAZONAMIENTO CUALITATIVO, en todas y cada una de sus tres principales aproximaciones: la *basada en restricciones* —*cfr.* KUIPERS [61]—; la *centrada en componentes* —*cfr.* DE KLEER y BOBROW [62]; WILLIAMS [63]—, y la *centrada en procesos* —*cfr.* FORBUS [64].

Un **modelo cualitativo** es una abstracción del modelo formal, basado en relaciones de causalidad y direcciones de cambio de los parámetros, sin prestar mayor atención a los valores numéricos. Del mismo modo, razonar en base a cualidades, sin prestar la menor atención a las cantidades, corresponde al **razonamiento cualitativo** —*cfr.* VADILLO [65].

En general, modelar un problema surgido en un campo específico, significa traducir su percepción, su «modelo mental», su computabilidad intuitiva, en un modelo formal, en computabilidad formal, abstrayendo las propiedades reales de los objetos, usando variables y relaciones matemáticas, y, ¡cómo no!, la tesis de Alonzo CHURCH y Alan Mathison TURING, es decir, creyendo, confiando, en nuestra intuición.

«Un modelo matemático es cualquier sistema completo y compatible de ecuaciones matemáticas, diseñadas para que se correspondan con alguna otra entidad, su prototipo. Tal prototipo puede ser una entidad física, biológica, social, psicológica o conceptual, tal vez, incluso, otro modelo matemático.»
—Rutherford ARIS [66], *via* Philip J. DAVIS y Reuben HERSH [67] (pp. 67-68)

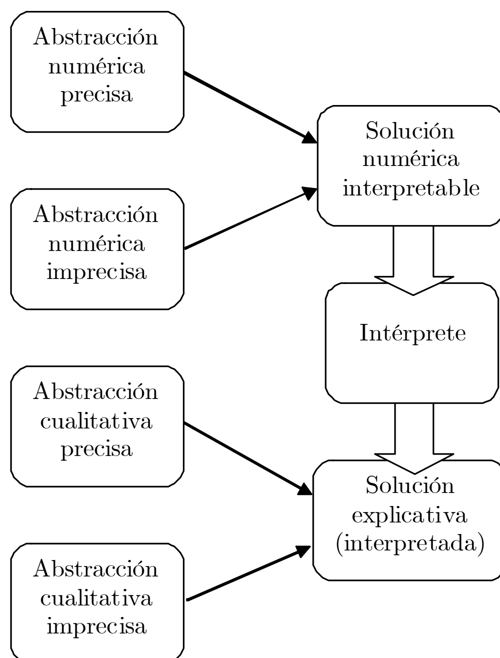


Figura 1.1: *Abstracciones cuantitativas y cualitativas. Las primeras producen soluciones cuantitativas, numéricas, que requieren de un intérprete de valores numéricos. Las segundas llevan a una solución (auto-)explicativa. —Fuente: Elaboración propia.*

Philip J. Davis y Reuben Hersh [67] (p. 68), apuntan que el término «ecuaciones» en la cita precedente, podría reemplazarse por «estructura», pues no siempre se trabaja con modelos numéricos.

Tras elegir, descubrir o inventar el modelo, y una vez resuelto el problema, exacta o aproximadamente, sólo hay que trasladar el resultado matemático al campo de aplicación, traduciendo inversamente. Un esquema de este proceso podría ser el que aparece en la Fig. 1.2.

En todo caso, la elección de un modelo no es tarea fácil. Sea como fuere, es preciso decidir si el modelo matemático proporciona una descripción aceptable del problema en estudio. Para ello, parece necesario estudiar cada uno de ellos, con el carácter de una realidad distinta dotada de propiedades peculiares. El estudio del modelo matemático se efectúa utilizando matemáticas rigurosas hasta donde es posible, con matemáticas formales o no rigurosas hasta donde se puede, y con muchos tipos de cálculo realizados con ayuda de ordenadores: simulaciones, truncamientos, discretizaciones, etc. El estudio del problema quizás pueda realizarse en laboratorio; o bien, si existe en la naturaleza alguna aproximación a él, podrá ser estudiado donde las condiciones más se parezcan a las ideales; incluso podríamos simularlo por ordenador, si es que imaginamos poder decir a la máquina lo suficiente acerca de cómo se comportaría nuestro problema. En este último caso, lo que en realidad estamos haciendo es comparar dos modelos matemáticos distintos —*cfr.* Davis y Hersh [67] (pp. 271-272).

Howard S. Becker [68], con su tipología constructivista, afirmaba que el tipo construido, como tal construcón, no se encuentra en la naturaleza, sino en la mente del observador, y que ninguna de estas imágenes propiedad del observador tiene una correspondencia «exacta» en la realidad.

Anteriormente, Max Weber ya habló de tipo, en el sentido kantiano de ideal —aunque se distinguen «*dos* Weber*s*», el primero, para el que el tipo es meramente *heurístico*, y el segundo, para el que el tipo necesita ser *explicativo*:

> *«Constituye éste un cuadro conceptual que no es la realidad histórica, al menos no la «verdadera», y que mucho menos está destinado a servir como esquema bajo el cual debiera subsumirse la realidad como especimen, sino que, en cambio, tiene el significado de un concepto límite puramente ideal, respecto del cual la realidad es medida y comparada a fin de esclarecer determinados elementos significativos de su contenido empírico.»*
> —Max Weber [69] (p. 82), *via* Anna Estany [70] (p. 319)

John C. McKinney introduce nuevos matices en las concepciones de Weber y Becker:

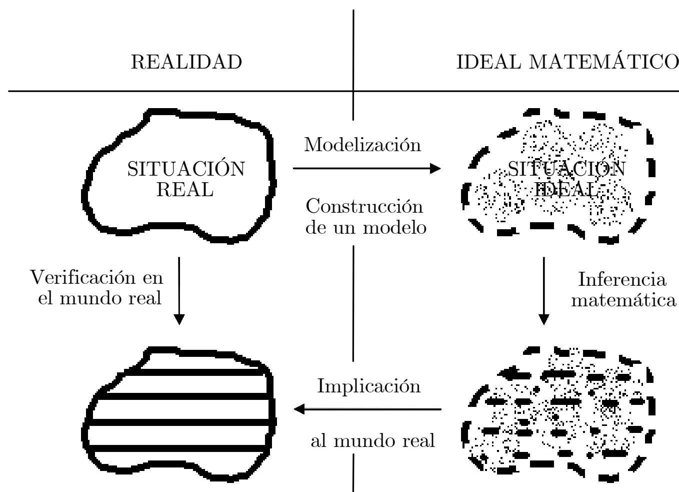


Figura 1.2: *Proceso de abstracción.*
—Fuente: Adaptado de Davis y Hersh [67] (p. 102).

> *«El tipo construido no se refiere necesariamente a la forma más común de un fenómeno, sino en general a la forma más significativamente representativa.*
> *El tipo construido no es un estereotipo, en cuanto el estereotipo carece con frecuencia de un referente empírico y constituye una exageración afectiva impremeditada que no es empíricamente útil porque le faltan criterios explícitos que la hagan comparable a casos concretos.»*
> —John C. McKinney [71] (p. 27), *via* Anna Estany [70] (p. 321)

Carl G. Hempel [72] distingue entre tipos *clasificatorios*, *extremos* u *ordenadores* e *ideales*. En particular, según Hempel, los tipos extremos u ordenadores no admiten como instancia un caso individual, sino que éste puede clasificarse como dicho tipo en base a una aproximación: no podremos decir que x es T o no-T, si T es un tipo extremo, sino que x es más o menos T. Hempel insiste en que este «más o menos» no puede caracterizarse numéricamente, sino comparativamente. La distinción, que hace Hempel, con los tipos ideales, es que estos últimos son aquéllos que están englobados en un modelo teórico más general.

Nosotros no consideramos la distinción última de Hempel entre tipos extremos e ideales. Si bien estamos de acuerdo con él —y de paso con Becker y McKinney— en la característica de aproximación de la realidad al tipo. Los tipos extremos o ideales (en adelante, prototipos, arquetipos, estereotipos o ideales) que consideramos, son abstracciones de ejemplos, que desde el punto de vista empírico-observacional es el más común.

1.2 Por siempre en las fronteras

> *«Los límites de mi lenguaje son los límites de mi propio mundo.»*
> —Ludwig V. Wittgenstein

Y los límites del mundo —del nuestro— son los límites de nuestros sentidos, de nuestros pensamientos y de nuestro lenguaje. Y cada uno de ellos se erige como factor limitador de lo que en esencia no es limitable. ¿Cómo se nos manifestarían entes que poseen sentidos, pero ninguno de ellos es el tacto, ni el gusto, ni el olfato, ni el oído, ni la vista, ni *nuestro* sentido común, y que por tanto, ni veremos, ni oiremos, ni oleremos, ni gustaremos, ni tocaremos, ni intuiremos? ¿Cómo abordamos la existencia de un ente en cuya existencia nos es imposible pensar? ¿Cómo nos comunicamos con un ente sin un lenguaje común?

¿Por qué podemos hablar de entes *distintos*? ¿Será porque comparamos?

> *«El acto de indicar cualquier ser, objeto, cosa, o unidad, implica hacer un* acto de distinción *que distingue lo indicado de su fondo. Siempre que hacemos referencia a algo, implícita o explícitamente, estamos especificando un* criterio de distinción*, que indica sobre qué estamos hablando y especifica sus propiedades como ser, unidad u objeto.*
> *Esta situación es frecuente y no es única: necesaria y permanentemente estamos inmersos en ella.*

> *Una* unidad *(entidad, objeto) procede de un acto de distinción. Recíprocamente, siempre que nos referimos a una unidad en nuestras descripciones, implícitamente lo hacemos a la operación de distinción que la define y la hace posible.»*
> —Humberto R. MATURANA y Francisco J. VARELA [1] (p. 40 de la versión inglesa revisada de 1998)

Comparamos varios entes a través de sus perfiles representadores de cualidades. Penetramos así en el feudo de las estimaciones de valor. Atribuimos valores, pero la existencia se reserva el valor verdadero, «objetivo», de cada cualidad, para cada ente. Nuestra definición pragmática de «objetividad» es como *mínimum* de la «subjetividad», que es lo humanamente medible, sea con o sin ayuda de máquinas, creadas por humanos o por máquinas creadas por humanos[1].

Si la existencia no es predicable —*cfr. v. gr.* SEARLE [77]; REYES [78](p. 67)—, entonces, la ciencia está adherida al convenio de lo no precisable objetivamente. El mundo que experimentamos es un mero intérprete, alentado por nuestros sentidos y pensamientos, del mundo verdadero.

«La ciencia no tiene génesis pre-científica, no hay verdad primera, sino errores primeros» —*cfr.* REYES [78](p. 78)—. Y añadimos: el progreso de la ciencia resulta de iterar este aforismo. Hemos aprendido a convivir con el error, *ab ovo*. «Una verdad sobre un fondo de error: tal es la forma del pensamiento científico», son palabras de Gaston BACHELARD —*via* Román REYES [78](p. 45).

Aunque quizás más, la cultura oriental que la occidental. El Ying y el Yang, la relación entre opuestos que se intertransforman: si el Ying aumenta, el Yang disminuye, y si el Ying disminuye, el Yang aumenta. Por eso dice Bart KOSKO [58, 59] que la teoría de conjuntos borrosos y la lógica borrosa calaron muchísimo más hondo en la cultura oriental, porque su pensamiento, sus filosofías, aceptan la gradación entre opuestos.

Nuestra actitud no debe ser conformista, no debe ser la del inductivista baconiano a la espera de un patrón (cualquier patrón), sino la del inquieto buscador, en este caso, de modelos que se ajusten a la evidencia, refinando, si es posible, ese ajuste a medida que se manifieste nueva evidencia; eliminando, si no obviando, el error.

Así, cuando describimos, mudamos la existencia en interpretación. Somos entes receptores y constructores de los entes que imaginamos objetivar. Incluido el error. Por eso nos equivocamos. E intentamos explicar el error. Y reincidimos. Por eso existen tantos tratamientos y teorías del error.

Sea como fuere, a lo único a lo que podemos aspirar es a una teoría no más allá de una mera simplificación de la realidad (objetiva). Conseguir esta simplificación raya en el arte. Algo usual es eliminar, con frecuencia de manera inconsciente, otras veces presintiendo su parva importancia, un ingente tropel de relaciones concurrentes en el mundo real. No menos habitual es sustituir algunas de las relaciones identificadas, por aproximaciones. Lo desconocido no suele atañernos. A los resultados, los llamamos *modelos* (percepciones de la realidad objetiva), y sobre ellos, construimos las *teorías*. Esta inexactitud puede llevar y así sucede a veces, a reacciones inesperadas de los modelos, a que el modelo siga un camino lógico no previsto, a efectos secundarios, ante cambios en las entradas, o condiciones de trabajo del mismo. Mediante rutinas de prueba se intenta demostrar que el modelo funciona en todos los supuestos concebibles. Pero siempre podremos albergar dudas acerca de su verdad: «El ordenador no elimina los errores humanos, pues él mismo es un producto humano.» —*cfr.* DAVIS y HERSH [67]—. La verificación —esto es, la demostración matemática de la validez del modelo— sólo es posible para modelos simples.

1.3 Ambigüedades, decisiones, elecciones, selecciones y preferencias

> *«Cualquiera es capaz de elegir lo que prefiere; pero sólo los soberbios saben preferir lo que eligen.»*
> —Luc de CAPLIERS, Marqués de VAUVENARGUES <Reflexiones y máximas>

elegir (del lat. *eligere*, sacar, arrancar) tr. Escoger a una persona o cosa para un fin, prefiriéndola a otras.

seleccionar tr. Elegir, escoger a una persona o cosa prefiriéndola a otras de su especie por su condición o cualidades.

Según Douglas John WHITE [79] (p. 20), «elección» y «selección» son términos intercambiables: los humanos eligen o seleccionan, mientras que las máquinas sólo pueden seleccionar. Lo confirma el uso del lenguaje:

[1] La posibilidad de la **autoduplicación de una máquina**, fue demostrada teóricamente por John VON NEUMANN [73] —*cfr.* ARBIB [74]; CUTLAND [75] (pp. 204ss.)—. Este concepto ha sido fielmente asimilado por las sondas espaciales (sondas de VON NEUMANN auto-reproductivas) propuestas por Frank J. TIPLER [76] (pp. 86ss. *et passim*) para recorrer el Universo.

selector.- m. COMUNIC. Dispositivo de conmutación, electromecánico o de otro tipo, que permite conectar un circuito de entrada con otro de salida, seleccionado entre una variedad de ellos.

elector, ra.- w adj. Que elige o tiene potestad o derecho de elegir. Ú.t.c.s. || w m. y f. DER. Persona que reúne las condiciones exigidas por la ley para ejercitar el derecho de sufragio.

Decía Smith [80][2] que decidir es resolver una ambigüedad.

ambiguo, gua.- (del lat. *ambiguus*) adj. Dícese de las palabras o expresiones que pueden entenderse de varios modos o admitir varias interpretaciones y que, por tanto, dan lugar a dudas, incertidumbre o confusión. || Vago, incierto, dudoso.

White [79] (p. 13) define un estado de ambigüedad como aquel en el que existe un conjunto definido de alternativas. En general , una ambiguedad se resuelve mediante una elección, que bien puede ser una decisión.

Decidir es más restrictivo que elegir. La decidibilidad[3] de cualquier acto de decisión es previa al acto en sí.

Decidir comporta razonamiento, ha de justificarse nuestra preferencia. Al elegir, puede que simplemente se prefiera, se razone o no la preferencia. Churchman [81] advierte que de la observación de la elección realizada por una persona, no podemos saber si es o no el resultado de una decisión: lanza una moneda al aire y elegirás —que no decidirás— entre A o B, según salga cara o cruz[4]. Churchman [81] llama a las decisiones, «elecciones preferidas». Con un mecanismo aleatorio no se obtiene preferencia, no se obtiene decisión, sino únicamente elección, y es tan maquinal el asunto, que diríamos que, en realidad, sólo se obtiene *selección*[5].

En los procesos de elección, White [79] (p. 16) distingue entre aquellos que son cognoscitivos e identificables[6] (a los que denomina «decisiones puras») y aquellos otros que no lo son (a los que llama «elecciones puras»). La realidad es que, por lo general, la resolución de la duda, comporta un compuesto de ambos tipos de procesos de elección. Hay todo un continuo entre ambos —*cfr.* Fig. 1.3.

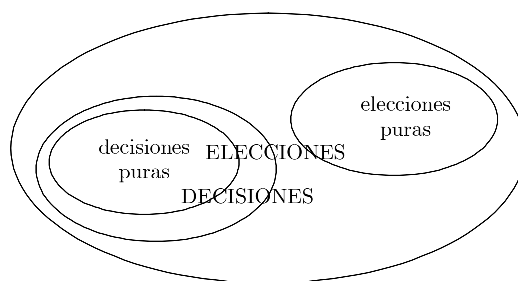


Figura 1.3: *El continuo de la elección.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

A la vista de ello, White [79] (p. 17) sugiere trocar la denominación habitual «decisor» por la de «decisor parcial».

> *«Puede haber elección sin decisión; pero no puede haber decisión sin elección.»*
> —W. Dunlop [82]

Al ente decisorio se le denomina comúnmente «decisor»[7].

[2] *via* White [79] (pp. 13-14).

[3] De una manera informal, pero rigurosa, podemos decir que B es un **conjunto efectivamente decidible** en un superconjunto suyo, A, precisamente si existe un algoritmo efectivo tal que para todo elemento de A, decida si está en B o en $A\backslash B$. Alternativa, pero equivalentemente, podríamos definir estos conceptos basándonos en la función característica del conjunto B respecto del superconjunto A. Sea $C_{B,A} : A \to \{0,1\}$, definida como 1 si $a \in B$ y 0 si $a \in A\backslash B$. Así, B es efectivamente decidible en A, precisamente si $C_{B,A}$ es efectivamente computable. Decimos que un predicado $\alpha(x)$ es un **predicado decidible**, precisamente si su función característica C_α, es computable. Cualquier algoritmo que compute $C\alpha$ se denomina **proceso de decisión** para $\alpha(x)$.
En el caso que nos ocupa, se trata del predicado: «la alternativa A es la mejor, entre todas las pertenecientes al conjunto de alternativas determinado, para el problema de decisión considerado». El problema de decisión se resuelve hallando un proceso de decisión para este predicado, esto es, encontrando un método efectivo para decidir acerca de la validez de una alternativa frente a la no-validez del resto. Otro tema es el coste computacional del método, y su realización física, su implementación y su implantación.

[4] White [79] (p. 27) denomina «**decidibilidad débil**» a la afectada probabilísticamente, a aquélla para la que la preferencia «pierde significado».

[5] Pero puede que el mecanismo nos ayude a «ver la luz». Y si no, pensemos en cuántas veces, el lanzamiento de una moneda, ha contribuido a despejar nuestras dudas.

[6] Lo cual no sólo se refiere a la identificación de las operaciones que intervengan en el proceso, sino también a sus aspectos cognoscibles —*cfr.* White [79] (p. 15).

[7] Por cierto, que no confunda el lector con **«decidor»**, como hemos visto en alguna literatura, pues éste último es un adjetivo cuyo significado es: que dice, que habla con facilidad y gracia.

1.4 Irracional elige racional

> *«Un jugador no puede razonar: Yo soy racional, luego que yo adopte el argumento A le convierte en un argumento racional. Por tanto mi oponente hará lo mismo que haga yo. Esto pone el carro delante del caballo. Un argumento no es racional porque es aceptado por una persona racional. Por el contrario, una persona es racional porque él o ella sólo acepta argumentos racionales.»*
> —Ken Binmore [83] (p. 304)

Es la opinión de muchos que la irracionalidad forma parte de la esencia humana más que de la de esos otros seres que llamamos «irracionales».

> *«La tradicional fórmula de que el hombre es un ser racional ha sido casi siempre mal entendida. Ha inducido siempre a que se haga el hombre extravagantes ilusiones sobre sí mismo ... Decir del hombre que es racional representa algo así como decir del vecino de Castuera que es madrileño porque ha tomado el tren para Madrid.»*
> —José Ortega y Gasset

Cuatro operadores aparecen con frecuencia en los razonamientos lógicos: *modus ponendo ponens* ($A \rightarrow B \wedge A \vdash B$), *modus tollendo tollens* ($A \rightarrow B \wedge \neg B \vdash \neg A$), la *ley del silogismo* ($A \rightarrow B \wedge B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$) y la *ley de los contrapuestos* ($A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$). No es raro saber que el ser humano los confunde, como también confunde **validez** y **verdad**. Es típica, por ejemplo, la confusión de modus tollendo tollens con la ley de los contrapuestos, a partir de apreciar únicamente la verdad de q, cuando se considera la validez de $p \Rightarrow q$ —*cfr.* Wason y Johnson-Laird [84]; Revlin, Leirer, Yopp y Yopp [85]; Nickerson, Perkins y Smith [86].

Más aún. Bruno Latour [33] (p. 189) relata la experiencia de comprensión de razonamientos sencillos que realizó Alexander Romanovich Luria [87] entre campesinos de la antigua Unión Soviética. Por ejemplo: «En el polo norte todos los osos son blancos; Novaya Zemyla está en el polo norte. ¿De qué color son allí los osos? —No lo sé. Deberías preguntarle a los que han viajado por allí y los han visto.» El campesino no es capaz de aplicar *modus ponendo ponens*. De esta experiencia, uno podría inferir que estos campesinos no son nada lógicos, pues no aplican el operador adecuado. Sin embargo, Michael Cole y Sylvia Scribner [88] hicieron un experimento similar en Liberia, donde a los campesinos que decían esto, se les pedía explicar su razonamiento, diciendo que para conocer el color de algo, tenían que verlo, y que para ver algo, tenían que estar junto a ese algo. Como ellos no estaban en el polo norte y no podían ver los osos, no eran capaces de responder a la cuestión. ¡Pues anda si son lógicos! Su razonamiento es un ejemplo de aplicación de *modus tollendo tollens*.

La **tarea de selección de Wason** (*Wason's Selection Task*, WST) fue propuesta en su forma original por Peter Cathcart Wason [89]. Se presentan cuatro cartas, todas con una letra en una cara y un número en la otra. Se proporciona una regla condicional, por ejemplo: «si una cara de una carta es A, entonces la otra cara es 1». Las cuatro caras que se ven de las cartas muestran: A, B, 1, 2. En general, si la regla condicional es $p \Rightarrow q$, entonces las caras que se muestran corresponden a: p, $\neg p$, q y $\neg q$. La tarea consiste en decir qué cartas hay que voltear para averiguar si la regla es verdadera o falsa. Dos respuestas muy frecuentes son: «sólo la carta p», y «las cartas p y q» —*cfr.* Newstead y Evans [90].

Pero las respuestas también dependen del «contenido»: se dice que se produce un *efecto de contenido temático*. Cuando p y q cambian su contenido semántico, a las anteriores, se unen dos nuevas respuestas: «p y $\neg q$» y «$\neg p$ y q» —*cfr.* Dominowski [91]—. Por ejemplo, Griggs y Cox [92] nos cuentan cómo la respuesta «p y $\neg q$» fue la mayoritaria cuando los encuestados debían imaginar ser policías que comprobaban si se cumplía $p \Rightarrow q$, en este caso: «si una persona está bebiendo cerveza, entonces esa persona debe tener más de 18 años».

Otro de los «errores» lógicos que suele cometer el ser humano, es el denominado **error (o falacia) de la conjunción** por Tversky y Kahneman [93]. Ocurre que suele estimarse mayor la probabilidad de que un objeto pertenezca a una clase que a una superclase, basándose en la «similitud» de la descripción del objeto con la descripción de la subclase. Por ejemplo, cuando se dice que «Linda es una mujer joven, soltera, sin pelos en la lengua, ..., profundamente vinculada en temas de discriminación y justicia social, ...», entonces, aproximadamente un 80 por ciento de individuos, incluso aquellos con un nivel socio-cultural elevado, aseguran que es mucho más verosímil que Linda sea «una cajera feminista» que «una cajera» —*cfr.* Tversky y Kahneman [94].

En cuanto a la forma de explorar lo racional o irracional del comportamiento humano, también hay algo que decir. Amos Tversky y Daniel Kahneman [95] llevaron a cabo una experiencia en la que planteaban la misma cuestión de dos formas distintas —*cfr.* Gambara [96] (pp. 63-64):

«Problema 1: Imagina que se ha descubierto una extraña enfermedad que se espera provoque 600 muertes. Se han propuesto dos programas alternativos para combatirla. Asumamos las siguientes estimaciones científicas sobre las consecuencias de los programas:
Si se adopta el programa A, se salvarán 200 personas.
Si se adopta el programa B, existe una probabilidad de un tercio de que las 600 personas se salven, y de dos tercios de que nadie se salve.
¿Qué programa elegirías?
Problema 2: Imagina que se ha descubierto una extraña enfermedad que se espera provoque 600 muertes. Se han propuesto dos programas alternativos para combatirla. Asumamos las siguientes estimaciones científicas sobre las consecuencias de los programas:
Si se adopta el programa C, morirán 400 personas.
Si se adopta el programa D, existe una probabilidad de un tercio de que nadie muera, y de dos tercios de que los 600 mueran.
¿Qué programa elegirías?»

Unos 300 estudiantes fueron preguntados sobre esta cuestión, a la mitad, digamos grupo G_1, sobre el problema 1 y a la otra mitad, digamos grupo G_2, sobre el problema 2. El resultado fue que del grupo G_1, el 72 por ciento eligió la alternativa A y el 28 por ciento, la B. Del grupo G_2, el 22 por ciento eligió la alternativa C y el 78 por ciento la D. Sorprendente, ¿o no?

Podríamos decir mucho más sobre la racionalidad irracional, pero pensamos que las siguientes palabras de Bruno LATOUR, conforman un magnífico epítome:

«Hay, en nuestras sociedades modernas, una ley muy dura que prohibe a las personas matarse entre sí. Las personas que infringen esta ley se llaman "asesinos". También hay una práctica, bastante frecuente, consistente en arrojar bombas contra poblaciones enemigas. Los pilotos de estos aviones deberían llamarse, por consiguiente, "asesinos" y deberían ser juzgados. Nada de eso, advirtió con cierta perplejidad un antropólogo azande enviado a Gran Bretaña. En vez de sacar esa conclusión lógica, los británicos simplemente consideran que los pilotos son "asesinos por obediencia debida" (son inocentes y no son juzgados), y que los "asesinos premeditados" son peligrosos y deben ser juzgados y encarcelados. Así, un caso claro de irracionalidad se presenta al mismo jurado que tuvo que decidir sobre la falta de juicio de los azande. Desde el punto de vista del antropólogo africano, los británicos aplican dos normas al mismo tiempo; norma 1: matar personas es asesinar; norma 2: matar personas no es asesinar. En vez de observar esta contradicción e intentar resolverla, a los británicos simplemente les trae sin cuidado. Esta indiferencia escandalosa ofrece un motivo claro para justificar un juicio por irracionalidad que podría llamarse "la razón contra los británicos". Por supuesto, pueden encontrarse circunstancias atenuantes de dicha irracionalidad. Si los pilotos fueran llevados a los tribunales, se destruiría la autoridad militar, lo cual aterraría al tejido entero de la sociedad británica. Por ello, para proteger sus instituciones sociales, los británicos prefieren no sacar conclusiones lógicas. Aquí, una vez más, se sacan a colación razones sociales para explicar por qué dicha conducta no está en concordancia con las leyes de la lógica.»
—Bruno LATOUR [33] (p. 181)

a las que añadimos otras, no por excusar el epítrope, pues las que siguen son secuaces, al menos en el tono, sino por su relevancia con respecto al significado de las anteriores:

«¡Paz!, ¡paz!, ¡paz! Sí, sea paz, pero sobre el triunfo de la sinceridad, sobre la derrota de la mentira. Paz, pero no una paz de compromiso, no un miserable convenio como el que negocian los políticos, sino una paz de comprensión [...]¡Raza de víboras la de esos que piden paz! Piden paz para poder morder y roer y emponzoñar más a sus anchas.»
—Miguel de UNAMUNO <Vida de Don Quijote y Sancho>

En fin, suele entenderse por **hipótesis de racionalidad del decisor**, que ella o él debe estar en posesión de una hipótesis de comportamiento coherente, en el sentido de que:

«la alternativa elegida por un decisor debe ser, al menos, tan buena, de acuerdo a sus preferencias, como cualquier otra alternativa disponible.»

Pensemos que, por ejemplo, en Economía, al modelar la interacción consumidor–productor, la hipótesis de racionalidad del consumidor implica que sólo piense en el conjunto de aquellos bienes de consumo que pueda permitirse —esto es, que se olvide del «cuento de la lechera»—. Por otro lado, suponer que el productor es

racional implica que cualquier acción que emprenda generará, a corto, medio o largo plazo, un beneficio igual o mayor que cualquiera de las otras acciones posibles.

Unas palabras de Jerry Alan FODOR [97] (pp. 57-58, de la edición española):

> *«No puedes preferir A a B a menos que creas que preferirías A a B si conocieras todos los hechos(*). (Obsérvese que no se serviría a la racionalidad con el requerimiento más débil según el cual no crees que haya hechos que, si los conocieras, invirtieran tu preferencia. Si un agente no tuviera opiniones acerca de lo que preferiría si todos los hechos estuvieran presentes y si, por tanto, se viera obligado a escoger, lo racional para él sería decidir a cara o cruz.)»*
> (*) *Más precisamente, la fuerza de la preferencia de A respecto de B igualaría la fuerza de la convicción de que uno preferiría A a B si todos los hechos estuvieran presentes. Si se le ofrece a uno elegir a cara o cruz, se haría mal en preferir uno u otro lado de la moneda; y se haría mal en pensar que habría sido más probable que se prefiriera cara y no cruz en caso de haber sabido de qué lado caería la moneda.*

A ellas, debemos añadir que en muchas situaciones, una vez lanzada la moneda, nos da igual lo que elijamos. Si no, ¿cuántas veces no nos ha pasado que tras lanzar la moneda, y vernos obligados a preferir B a A, nos «arrepentimos», y al final elegimos A? La moneda sólo fue un medio para despejar nuestras dudas, para aclarar nuestras preferencias.

Insistimos, el ser humano no siempre actúa racionalmente. Está comprobado experimentalmente que si a un conjunto de acciones, entre las que uno tenía claro cual elegir, se le añade una acción no deseable, a veces ocurre que produce tal efecto en nuestro esquema mental, que cambia de manera significativa nuestro criterio último para elegir, y cambiamos nuestra elección, escogiendo una acción peor que la que inicialmente teníamos en mente —*cfr.* RABIN [98] (p. 38).

Por ejemplo, en un bar donde sólo ofrecen dos bocadillos, de tortilla española y de jamón, observamos que un cliente «siempre» pide el de jamón, por lo que deducimos que prefiere el jamón a la tortilla española. Un buen día, se ofrece un tercer bocadillo: de lomo. Y precisamente, ese día, observamos que el mismo cliente pide el bocadillo de tortilla española. La «pregunta del millón»: ¿es racional deducir que las elecciones del cliente son inconsistentes con la hipótesis de racionalidad?

Estas imperfecciones del modelo de la elección racional, de naturaleza humana, son bien conocidas, por ejemplo, por los teóricos de la publicidad, que las aprovechan para diseñar campañas publicitarias específicas que modifiquen las preferencias del consumidor a favor de los productos promocionados.

Por otro lado, si hay más de un decisor, entonces debemos hablar de la **hipótesis de racionalidad múltiple entre decisores**, en el sentido de que ellos, como un todo, posean una hipótesis de comportamiento coherente:

> «la alternativa elegida por ellos, debe ser, al menos, tan buena, de acuerdo a sus preferencias, como cualquier otra alternativa disponible.»

Ante múltiples decisores, debemos hablar de **consenso**. Miguel FERNÁNDEZ PÉREZ [22] (p. 556) distingue tres zonas de racionalidad —*cfr.* Fig. 1.4.

1.5 Habilidades, inseguridades y cajas grises

> *«¡Elegir! Es la chispa de la inteligencia. ¿Vaciláis? ... Todo está dicho, os equivocáis.»*
> —Honoré de BALZAC <El ilustre Gaudissart>

Por lo general, un decisor no es novicio con respecto al problema que intenta resolver. Dispone de un bagaje específico proveniente de sus experiencias con problemas similares. Posee una **estructura de referencia**, un concepto cercano al de *esquema* de HORTON y MILLS [99] en psicología cognitiva o al de los *dominios habituales* de YU [100]. En realidad, para cada problema, YU, ZHANG y HUANG [101], proponen pensar en su **conjunto de competencia** asociado.

> *«Por ejemplo, comprar una casa es un problema importante de decisión para la mayoría de la gente. Por lo general, empleamos bastante tiempo y esfuerzo en recordar nuestras propias experiencias, hablar con nuestros amigos, visitar inmobiliarias, mirar anuncios, para poder así ampliar nuestro conjunto de competencia, que incluye identificar preferencias, desglosar y digerir la información de mercado, hacer cábalas financieras, conocer las viviendas en venta y sus calidades, etc. No estaremos preparados para comprar a menos que nuestro conjunto de competencia no sea lo suficientemente grande.»*
> —Po L. YU, Dazhi ZHANG y Shude HUANG [101] (p. 473)

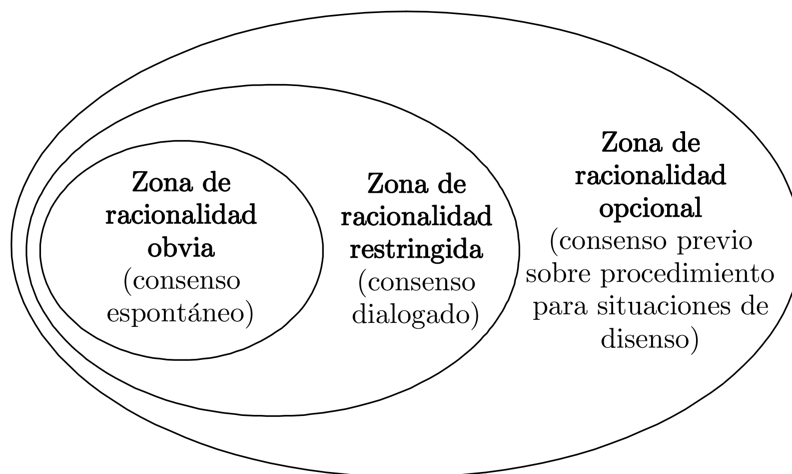


Figura 1.4: *Zonas de racionalidad.*
— *Fuente:* Adaptado de Fernández Pérez [22] (p. 556).

Este conjunto consta de ideas, conocimiento, información y habilidades, para solucionar el problema. Este conjunto puede ser reducido, ontológicamente, al *conjunto de competencias verdaderamente necesario*, que permite al decisor resolver el problema, una vez que él o ella haya adquirido y dominado tal conjunto. Por tanto, podemos hablar acerca del *conjunto de habilidades adquiridas* por el decisor, y así entender la estructura de referencia como una parte del conjunto de habilidades adquiridas por el decisor. Cuando más adelante, hablamos de probabilidades a priori y verosimilitudes, este conjunto es parte esencial de su construcción.

El modelo de Daniel Vanderpooten [102] entiende el proceso de toma de decisiones como un proceso retroactivo dividido en dos etapas: *etapa de aprendizaje*, en la cual, la estructura de referencia del decisor es reforzada, o incluso creada, mediante una *exploración libre* del conjunto de alternativas potenciales, y la *etapa de búsqueda*, en la que, una vez que la estructura de referencia del decisor ha quedado bien establecida, se busca una solución de compromiso satisfactoria mediante *exploración directa* del conjunto de alternativas. Nuestro trabajo se localiza en la etapa de búsqueda. Es el tipo de problemas que Ackoff [103] denomina **problemas de decisión evaluativos**[8]. Este conjunto de alternativas que exploramos durante el proceso de decisión es **estable** y **global**, en el sentido de Vincke [104] (p. 2), esto es, está definido a priori y no cambia durante el procedimiento y, por otro lado, cada alternativa excluye a cualquier otra.

Ha de tenerse en cuenta la incertidumbre que rodea las preferencias y los juicios. Bullinger [105] advierte de la **inseguridad** de toda persona en cualquier acto de decisión y por tanto de la práctica imposibilidad de que proporcionen juicios precisos. La elección racional se ve contaminada por la incertidumbre. Parece que en vez de un valor numérico, sería, a veces, más conveniente, usar un intervalo o un término lingüístico, una palabra. Estas situaciones tienen su correspondencia en los subconjuntos Φ-borrosos y los subconjuntos borrosos de tipo 2, respectivamente. No obstante, no podemos olvidar que la capacidad lingüística de los seres humanos para describir categorías con términos verbales es muy limitada. Dado un conjunto inicial de categorías, podemos hablar de **categorías umbrales** entre ellas, que podrían usarse si el decisor duda entre categorías vecinas. El uso de modificadores lingüísticos con las categorías iniciales nos permitiría acceder a las categorías umbrales.

En el futuro inmediato posterior a la lectura de esta tesis, se sitúa la creación de una **interfaz persona-método**. No podemos olvidar, en ella, que la explicación automática de la lógica subyacente a la elección recomendada por la máquina es fundamental para su aceptación por los decisores —*cfr.* Erdman [106]; Klein, Weber y Shortliffe [107]; Kosey y Wise [108]; Waterman [109]—. Es bien conocido que los sistemas de consulta de tipo «caja negra» —o sea, los que simplemente proporcionan respuestas finales— no son bien aceptados por los usuarios. Las empresas se resisten a las «cajas blancas». Por tanto, que sean grises las cajas.

1.6 Equivócate, perfecciona tus hábitos y decide «por la tangente»

«Y los que no hacen nada, no se equivocan jamás.»
—Théodore de Banville <Occidentales>

[8] Ackoff [103] distingue dos tipos de **problemas de decisión: evaluativos y de desarrollo**. En los primeros, se conocen todas las alternativas, mientras que en los segundos, es necesario buscar alternativas.

Lo que escribimos en las siguientes páginas versa sobre decisiones humanas, y no sobre sistemas de elección pura ni de selección pura, donde se haya suprimido el esfuerzo mental. En realidad, no creemos que estos últimos deban ser los que «elijan o seleccionen una decisión». Afectando a humanos, la resolución de las ambigüedades ha de ser mediante decisiones. Como decíamos anteriormente, BULLINGER [105] advierte de la **inseguridad** de toda persona en cualquier acto de decisión. Pero, precisamente por ser humanos, y aun en presencia de información previa sobre los entes entre los que ha de decidirse, es muy difícil, si no imposible, eliminar, ni lo subjetivo ni lo cualitativo.

Además de esa inseguridad, debe asumirse la **posibilidad de error**. No hay escape, porque no existe la alternativa ideal. Cuenta Andrés SENLLE [110] (p. 37), reputado consultor, cómo el señor HASUNUMA, Director General de Sony, antes de la firma de un contrato con él, le dijo: «Mire señor Andrés, quiero que inculque a mis "managers" que tomen decisiones y que se equivoquen, porque es mejor tomar una decisión equivocada que no tomar ninguna, pero que se equivoquen una sola vez.»

Pero nada de ello debe acibararnos. Hemos de **realizar la decisión**: la acción que ella conlleva ha de llevarse a la práctica. Sin esta última fase, eso sí, bien planificada (*cuándo*, *quién*, *cómo*, *dónde*, ...), no se culminaría el proceso, y en realidad, podríamos decir que no ha habido decisión alguna. Claro que, como recomienda Javier FERNÁNDEZ AGUADO [36] (pp. 33ss. *et passim*), bajo las batutas de los llamados **hábitos operativos** (entendiendo que siempre nos referimos a buenos hábitos) —sobre los que ya reflexionaba ARISTÓTELES y que en la actualidad se acogen en el ámbito de la **Dirección por Hábitos**[9], que «enseña que la fuente del verdadero valor del trabajo subjetivo es el perfeccionamiento mismo de la persona» —*Op. cit.*, p. 96—, plasmándose esta realidad en el perfeccionamiento de sus hábitos, como por ejemplo, la *prudencia* —la *auriga virtutum* de los griegos— y la *paciencia* (*Op. cit.*, pp. 75ss. *et passim*) —*cfr. item v. gr.* Tenzin GYATSO (DALAI LAMA) [111]—, a las que podríamos añadir la *humildad, dignidad, libertad, flexibilidad y confianza*, así como, la *lealtad, sinceridad, puntualidad, laboriosidad, reciedumbre, saber estar, buen gusto, responsabilidad, alegría, naturalidad, sencillez, generosidad, magnanimidad, justicia, comprensión, audacia, amistad, valentía, buen humor, agradecimiento*, etc. —*cfr.* FERNÁNDEZ AGUADO [36] (pp. 96-97).

Un último factor, si no el primero, es la **creatividad**. Cuando uno tiene ante sí varias alternativas, debería siempre cuestionarse si en realidad esas son las únicas posibles —es el caso de la respuesta «ninguna de las anteriores», a la que tan acostumbrada está el solucionador de *tests de elección múltiple*[10]—. Esto corresponde a una dimensión extraña, en principio, al proceso de elección o selección: la creatividad[11].

Roger DAWSON describe esta necesidad de multiplicar opciones como un «fantasear disciplinado» [43] (p. 120, de la edición española). Es lo que, según Roger DAWSON, caracteriza la primera fase de la toma de decisiones. Es lo que en Psicología —desde GUILFORD y su cubo representativo de la estructura de la inteligencia, cuyo primer diseño data de 1967— se denomina **pensamiento divergente**[12]. Esta primera fase es complementaria de la fase última, de aplicación de algún método concreto sobre cómo elegir la mejor opción disponible, a la que DAWSON se refiere como **pensamiento convergente** [43] (p. 117, de la edición española) —de nuevo, en

[9] La *Dirección por Hábitos* combina y mejora la *Dirección por Objetivos* y la *Dirección por Valores*, al concertar lo **procedimental**, o sea, el conjunto de acciones a realizar para conseguir una meta prefijada, con lo relativo a los **valores** relacionados con un tipo de conducta, a las **actitudes** o predisposiciones y a las **normas** o prescripciones.

[10] No obstante este ejemplo, no olvide el lector que estos *tests* se basan en que el **reconocimiento** es más fácil que la **evocación**, y por supuesto, que la **elaboración** o la **creación** —*cfr.* MONEREO (coord.), CASTELLÓ, CLARIANA, PALMA y CABANÍ, [112] (p. 104).

[11] Mucho se ha escrito sobre **cómo reconocer la personalidad creadora**. Existen multitud de listas diferentes de características. Por ejemplo, E. PAUL TORRANCE resume en 84 los atributos propuestos por otros autores —*cfr.* PAUL TORRANCE [113]—, aunque operativamente, los redujo a cinco: *fluidez*, *originalidad*, *flexibilidad*, *inventiva* y *elaboración*. De igual manera, considerando lo aportado por varios autores, José Luis MOSQUERA VILLAR [114] (p. 160, *cfr. item* pp. 155-165), en su análisis de la personalidad creativa de Miguel de UNAMUNO propone que sean: *curiosidad*, *sensibilidad*, *fluidez*, *flexibilidad* y *originalidad*. Caso de que el lector esté interesado por este tema de la creatividad, le recomendamos la atenta lectura del libro de Ricardo MARÍN IBÁÑEZ, *La creatividad: diagnóstico, evaluación e investigación* [38].

[12] «Clásicos» ejemplos de aplicación de pensamiento divergente, es decir, de crear «nuevas» alternativas —nuevas, en el sentido de considerar las que habitualmente no consideraríamos—, son:

- ¿Quién es el hijo de mis padres que no es hermano mío? —*cfr.* §9.
- Un hombre viaja en un coche con su hijo. Tiene lugar un accidente. Ambos resultan heridos. Son conducidos al hospital en la misma ambulancia. El médico de la ambulancia determina que es necesario operar de urgencia al niño. Avisan por radio al hospital para que el quirófano y el cirujano que esté de guardia en urgencias, estén preparados. Pero, ya en la mesa de operaciones, cuando ve al niño, dice: «Lo siento, no puede operar, *es mi hijo.*»
- Un testamento determina que hay que repartir 11 coches entre los tres hijos del fallecido, de la siguiente forma: la mitad de los coches debe ser para el mayor, la cuarta parte para el mediano, y la sexta parte, para el pequeño. (*Nota:* una solución divergente sería que de los tres hijos, sólo uno tuviese capacidad legal para heredar, y por tanto para él serían los 11 coches, ¿o no? En todo caso, suponga el lector que los tres hijos viven y todos están capacitados legalmente para heredar.)

honor de J. P. Guilford y su cubo[13]—, el tipo de razonamiento medido por los tests habituales de inteligencia —*cfr.* Cohen [116] (pp. 166-173).

1.7 Consenso y bienestar social

«El hombre es, de todos los animales, el menos capaz de vivir en rebaño.»
—Jean-Jacques Rousseau <Emilio>

En un perfil, un dato numérico correspondiente a un criterio, se puede interpretar como un número de votos o en función de un número de votos, y el procedimiento de elección, como un procedimiento de votación. Esto no es otra cosa que lo que hemos hecho con respecto a la creatividad en la nota a pie de página número 11.

Son muy conocidos tres problemas en los procedimientos de votación: la generación de **circuitos** (intransividades), que el método de votación sea **dictatorial** y la posibilidad de **manipular** el resultado (proponer una estructura de preferencia que no es la real, sino la más ventajosa para favorecer a un candidato determinado).

Los seres humanos tomamos conciencia de la propiedad transitiva sobre los siete u ocho años —*cfr.* Vasta, Haith y Miller [117] (pp 268-269). A partir de ahí, comenzamos a jugar, conscientemente, con ella[14]. «Roca, papel, tijeras» (RPT) es un ejemplo de juego infantil que ha ilustrado en múltiples ocasiones la intransitividad. Lo juegan dos jugadores. Cada uno oculta una de sus manos. El juego consiste en sacar roca (puño cerrado), papel (mano abierta con los dedos extendidos) o tijeras (los dedos índice y medio forman una V). Las reglas son sencillas: R gana a T, T gana a P y P gana a R. Es inmediato el ciclo intransitivo de preferencias: R $\succ$ T $\succ$ P $\succ$ R —*cfr.* Soto [119].

Kenneth O. May [120] —*via* White [79] (pp. 32-33)—, cita el caso de un piloto al que se sometió a tres situaciones de elección: llamas o metal ardiente, metal ardiente o caída, caída o llamas. Su estructura de preferencias fue intransitiva: prefirió las llamas al metal ardiente, éste a la caída y ésta a las llamas. Ello se debió a que focalizó su atención de manera diferente en cada situación: calor, soporte y probabilidad de muerte, respectivamente.

Supongamos que las estructuras de preferencias de los nueve miembros de un jurado sobre tres candidatos, Ángel Cristina y Victoria, son las siguientes. Tres opinan que:

$$\text{Ángel} \succ \text{Cristina} \succ \text{Victoria}$$

dos que:

$$\text{Cristina} \succ \text{Victoria} \succ \text{Ángel}$$

otros dos, que:

$$\text{Victoria} \succ \text{Cristina} \succ \text{Ángel}$$

uno, que:

$$\text{Victoria} \succ \text{Ángel} \succ \text{Cristina}$$

y otro, que:

$$\text{Ángel} \succ \text{Victoria} \succ \text{Cristina}$$

Simon Lhuilier —*cfr.* Moessinger [121]—, propone elegir el candidato que sea el mejor para más de la mitad de votantes, y si esto no es posible, elegir el candidato que haya sido propuesto por la mayoría de

[13]Para describir **la estructura de la inteligencia**, J. P. Guilford [115] propuso que estaba compuesta de 120 habilidades intelectuales distintas, organizadas en tres dimensiones: operaciones mentales (cognición, memoria, producción divergente, producción convergente, evaluación), contenidos, o áreas de información en las que se ejecutan las operaciones mentales (figurativos, simbólicos, semánticos, comportamentales) y productos, resultado de aplicar operaciones específicas sobre contenidos particulares (unidades, clases, relaciones, sistemas, transformaciones e implicaciones). Con el paso del tiempo, propuso dividir los contenidos figurativos en visuales y auditivos. De este modo, el cubo de Guilford, al que se refiere la Psicología actual propone 150 componentes diferentes de la inteligencia.

[14]¿Y los animales? Sara J. Shettleworth concluye, tras diversas experiencias, que las palomas y los chimpancés siguen un esquema transitivo de preferencias —*cfr.* Shettleworth [118] (transparencia número 38).

votantes en primer o en segundo lugar. En el ejemplo anterior, elegiríamos a Cristina, pues ha sido propuesta 7 veces en primer o segundo lugar, mientras que Victoria ha sido propuesta 6 veces, y Ángel, 5 veces.

Un ejemplo, para el que el método de LHUILIER no decide es el siguiente. Imaginemos los anteriores tres candidatos, y un jurado tripartito, de tal manera que las estructuras de preferencia u opiniones individuales de los miembros del jurado hubiesen sido:

$$\begin{array}{rcl} \text{Ángel} & \succ & \text{Cristina} \succ \text{Victoria} \\ \text{Cristina} & \succ & \text{Victoria} \succ \text{Ángel} \\ \text{Victoria} & \succ & \text{Ángel} \succ \text{Cristina} \end{array}$$

En este caso, el método de Lhuilier asigna dos puntos a cada uno de los tres candidatos.

La regla de decisión por mayoría no es, como uno podría pensar la mejor forma de agregar las voluntades individuales. Fue Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat CONDORCET quien, hace más de doscientos años, señaló la posible existencia de ciclos en las preferencias, de intransitividades —dificultad conocida actualmente como «paradoja del voto» o «efecto CONDORCET» . Una manera de evitar caer en ella es aplicar el **procedimiento de Black y Coombs** [122] y se basa en la condición de unimodalidad aplicada a las opiniones individuales subjetivas que hace que éstas se reduzcan a una clase de opiniones compatibles o respetuosas con un cierto orden objetivamente definido en el conjunto de alternativas —*cfr.* INFANTE [123] (tema 30, pp. 6-12)—. El problema con esta solución es la necesidad de que exista tal orden objetivo. Por ejemplo, si se debatiese sobre la elección de un precio de venta al público, las alternativas estarán ordenadas según el orden numérico natural. Si se barajasen los precios, en euros: $A = 18$, $B = 20$, $C = 22$ y $D = 25$, entonces, no podríamos, por ejemplo, considerar el orden de preferencia subjetivo: $B \succ A \succ D \succ C$, pues al ser B el preferido y estar C más próximo a B que D, C debería ser preferido a D.

CONDORCET propone contar todos los votos por pares. Observemos que, en ambos ejemplos, la estrategia de CONDORCET genera la estructura intransitiva de preferencias:

$$\text{Ángel} \succ \text{Cristina} \succ \text{Victoria} \succ \text{Ángel} \tag{1.1}$$

En efecto, en el primer ejemplo:

$$\begin{array}{c} \text{Ángel} \succ \text{Cristina (5 votos)}, \\ \text{Cristina} \succ \text{Ángel (4 votos)}, \\ \text{Ángel} \succ \text{Victoria (4 votos)}, \\ \text{Victoria} \succ \text{Ángel (5 votos)}, \\ \text{Cristina} \succ \text{Victoria (5 votos)}, \\ \text{Victoria} \succ \text{Cristina (4 votos)}. \end{array}$$

Y en el segundo:

$$\begin{array}{c} \text{Ángel} \succ \text{Cristina (2 votos)}, \\ \text{Cristina} \succ \text{Ángel (1 voto)}, \\ \text{Ángel} \succ \text{Victoria (1 voto)}, \\ \text{Victoria} \succ \text{Ángel (2 votos)}, \\ \text{Cristina} \succ \text{Victoria (2 votos)}, \\ \text{Victoria} \succ \text{Cristina (1 voto)}. \end{array}$$

MUCHO SE HA ESCRITO Y SE SIGUE ESCRIBIENDO sobre **agregación de preferencias individuales**. Kenneth J. ARROW (premio Nobel de Economía en 1972, en parte por estos estudios), con toda seguridad fue el primero en aportar una luz clara sobre estas cuestiones. Su enfoque es axiomático. Exigió un conjunto de cinco axiomas, que deberían satisfacer toda constitución —*función de bienestar social*, es el nombre matemático—, es decir, todo método que asigne una ordenación de preferencias u **opinión colectiva** a cada una de las posibles configuraciones de preferencias individuales.

Los cinco axiomas de ARROW son [124]:

1. *Axioma de universalidad.* ARROW argumentaba que las constituciones de los países, o de las uniones entre países, deben tener carácter universal, en el sentido de que mediante su normativa, la sociedad debe ser capaz de agregar cualquiera de las configuraciones de preferencia que pueda presentarse. Es un carácter previsor universal. Por ejemplo, esta consideración cobra importancia en este momento de la historia de la Unión Europea, cuando se dan los primeros pasos para desarrollar la Constitución Europea.

2. *Axioma de unanimidad* (o de *asociación positiva de valores individuales y sociales*). Es admitir la idea de que la preferencia social debe reflejar las preferencias individuales. Si cada uno de los individuos prefiere x a y, entonces, el colectivo debe preferir x a y.

3. *Axioma de determinación por pares* (o de *independencia de alternativas irrelevantes*). La preferencia que cada individuo otorgue a x e y debe permanecer invariable frente a las preferencias de los individuos respecto de otras alternativas. Por ello, y admitido el axioma anterior, la preferencia colectiva respecto de x e y, deberá también permanecer invariable frente a las preferencias individuales respecto de otras alternativas.

4. *Axioma de completitud* (o de *soberanía ciudadana*). Para todo par de alternativas, o bien, x es preferida a y, o bien, y es preferida a x, o ambas, es decir, son indiferentes.

5. *Axioma de transitividad.* La relación de preferencia ha de ser transitiva, esto es, si x es preferida a y, e y es preferida a z, entonces, x es preferida a z.

Pues bien, ARROW consigue demostrar que las únicas constituciones que satisfacen estos cinco axiomas son dictatoriales, entendiendo por dictador cualquier individuo con poder para imponer a la sociedad su preferencia estricta sobre cualquier par de alternativas.

Para demostrar su «teorema de imposibilidad», ARROW añadió un sexto axioma, el de *ordenación no dictatorial* (ningún individuo es dictador), y probó que no existe constitución capaz de satisfacer simultáneamente los seis axiomas. Se deduce, pues, lo dicho.

Por cierto que, también existe una teoría borrosa del bienestar social —*cfr. v. gr.* RICHARDSON [125].

1.8 Juicios y decisiones probabilistas

«Mi padre, un buen hombre, me decía: "No pierdas nunca tu ignorancia, no podrás sustituirla".»
—Erich Maria REMARQUE

Salvador BARBERÁ [126] (p. 483) nos recuerda el siguiente ejemplo. Imaginemos que deba tomarse una acción entre dos posibles. Una evitará que mueran 10 personas, la otra, que mueran 50. Si se opta por el azar, como método equitativo, ¿qué probabilidades asignamos? ¿1/6 y 5/6, considerando que es cinco veces peor que mueran 50 personas que mueran 10? ¿O bien, 1/2 y 1/2, considerando que tienen el mismo valor 10 vidas que 50?[15]

Surgen las ideas de juicio y función de decisión probabilistas —*cfr.* BARBERÁ [126]. Un **juicio probabilista** es cualquier función $r : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to [0,1]$ tal que:

$$\forall A \in \mathcal{A},\ r(A,A) = 1 \tag{1.2}$$
$$\forall A, B \in \mathcal{A},\ r(A,B) + r(B,A) \geq 1 \tag{1.3}$$

en busca de garantizar la reflexividad y la completitud.

Una **función de decisión probabilista** es cualquier función $k : \mathcal{A} \times \mathfrak{P}(\mathcal{A}) \to [0,1]$ tal que, para todo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$:

$$k(A,\mathcal{B}) = 0, \text{ si } A \notin \mathcal{B} \tag{1.4}$$
$$\sum_{A\in\mathcal{B}} k(A,\mathcal{B}) = 1 \tag{1.5}$$

donde $k(A,\mathcal{B})$ indica la probabilidad de escoger A entre los elementos de $\mathcal{B}$.

Pero, según lo entendemos nosotros, la realidad es que los subconjuntos $\mathcal{B}$ de alternativas no están tan bien delimitados. Suele ocurrir que, aunque tomemos un conjunto $\mathcal{B}$ de partida, éste quede abierto a poder ser ampliado con la inclusión de «nuevas» alternativas, de manera que, en la vida real, cualquier problema de decisión posee una componente evaluativa y otra de desarrollo[16].

[15] No sé de quién es este pensamiento, incluso puede que sea mío. En cualquier caso, amigo lector, creo que te hará reflexionar: *mientras que el ser humano considere que mil vidas valen más que una, habrá guerras.* Y mil, por decir un número, que al ser humano actual no nos asuste tanto como un millón, o cinco mil millones.

[16] Terminología introducida por Russell ACKOFF [103] —*cfr.* nota a pie de página número 8 (pág. 10).

Por nuestra parte, se nos ocurre que una forma en que podemos representar este hecho, es que consideremos funciones de decisión probabilistas, con **probabilidades valoradas lingüísticamente**. A modo de ejemplo, proponemos enunciar la condición anterior (1.4) en la forma:

$$\text{si } \mathcal{B}(A) = \textsf{muy baja}, \text{ entonces, } k(A, \mathcal{B}) = \textsf{muy baja} \tag{1.6}$$

es decir, si la pertenencia de A a $\mathcal{B}$ es muy baja, entonces, la probabilidad de escoger A entre los elementos de $\mathcal{B}$ es muy baja. Pensemos en una prueba de elección para ser *ala pivot* en un equipo de baloncesto. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de candidatos y $\mathcal{B}$ el de los candidatos muy altos. El aspirante A mide $1,90$ mts. Podemos decir que su pertenencia a $\mathcal{B}$, en este *contexto*, es muy baja. Remitimos al lector al capítulo 17, en el que definimos y trabajamos con probabilidades valoradas lingüísticamente.

1.9 Acoso psicológico (*mobbing*, *bullying*) y manipuleos

> *«140. Habéis llegado al señorío, os habéis acercado a la nobleza; tenedles temor, que no os embriaguen, que no os hagan orgullosos; con mansedumbre responded porque es lugar de vecinos, lugar del pueblo; ciertamente, con tranquilidad haréis (vuestro cometido), pacíficamente lo estableceréis. Con mansedumbre, con alegría responded al señor, al de linaje; con la palabra de la gente del pueblo, de tal manera, así bien tomaréis la tierra, el monte, es como bien haréis el señorío, la nobleza. En ninguna parte ocasionéis disputas entre los señores, entre los de linaje; no arruinéis la estera, el sitial. Y apaciblemente dialogad acerca del que se levanta, del que se arrastra, y del águila, del ocelote.»*
> —Anónimo[127] (p. 191)

Laurence John Peter dice que cuando un empleado desea ascender, más que *empujar* (estudios, cursos, congresos, esfuerzos, etc.), lo que debe hacer es *tirar* (relaciones informales con «alguien de arriba»: amistad, pertenencia a clubes, matrimonio, etc.) —*cfr.* Peter y Hull [128]—. La razón que esgrime Peter es el miedo de los jefes a los *buenos* competidores. Cinco son las reglas a seguir que recomienda Peter para *tirar* —*cfr.* Puchol [129] (p. 415):

- Búscate un «padrino» dentro de la empresa, a poder ser, todavía no incompetente[17].
- Incentiva al «padrino». Si no gana algo con ello, no se empeñará en promocionarte.
- Si por encima tuya tienes un incompetente que tapona tu camino, salte de esa línea jerárquica que no conduce a ningún sitio, pasa a un nuevo puesto. Salte de ese «callejón sin salida», dando un «rodeo».
- Se flexible: abandona a tu padrino cuando ya no te sirva.
- Diversifica la inversión: mejor dos (o más) que un único padrino. Pero procura que los unos no sepan de los otros.

Pero son aplicables tantas leyes de sentido común ... Recuerdo algunas de Robert Frederick Loeb (el del *Tratado de Medicina Interna*, referido entre los internistas como «el Cecil-Loeb»): «si lo que haces, funciona, sigue haciéndolo»; «si lo que haces, no funciona, deja de hacerlo»; «si no sabes qué hacer, no hagas nada».

Si al argumento de Peter, unimos la conocida ley «habla y muere», o «la verdad te dejará sin empleo» (Ley de Kinnard sobre la denuncia de problemas), parecen razones de peso para la existencia y proliferación del **acoso psicológico en el trabajo** (*mobbing*, término americano, *bullying* en inglés, frecuentemente traducido también por *acoso moral, psicológico,* o incluso por *síndrome de acoso institucional*), tan de mala moda en nuestros días, sea en el mundo empresarial o en las administraciones públicas, usualmente con personal contratado o interino, aunque también, pero en mucha menor medida, con personal funcionario o fijo.

Iñaki Piñuel y Zabala, en su libro *Mobbing, o cómo sobrevivir al acoso psicológico en el trabajo*, define el acoso psicológico en el trabajo como ese «deliberado y continuado maltrato modal y verbal que recibe el trabajador, hasta entonces válido, adecuado e incluso excelente en su desempeño, por parte de uno o varios compañeros de trabajo (incluido su propio jefe), que buscan con ello desestabilizarlo y minarlo emocionalmente

[17] Laurence John Peter afirma que «en cualquier organización, los empleados tienden a ascender hasta alcanzar su grado o nivel de incompetencia» —*cfr.* Peter y Hull [128]—. Hay que notar que la base que le permite concluir este principio, es el análisis de una gran cantidad de empresas, que él considera incompetentes. El lector puede, si lo desea, leer la cita de Alberto Vázquez Figueroa, que incluimos al principio de la Sección §8.13.

A propósito de leyes interdisciplinares: `http://www.zippynet.com/pages/funny/rules.htm`

con vistas a deteriorar y hacer disminuir su capacidad laboral y poder eliminarlo así más fácilmente de su lugar y del trabajo que ocupa.»

Marie France HIRIGOYEN [130] define el acoso psicológico en el trabajo como un conjunto de «comportamientos perversos ejecutados desde una posición de poder contra personas jerárquicamente más débiles», ocupantes de puestos subalternos, con el único fin de eliminar a una trabajadora o trabajador «no deseado», y donde los medios que se emplean para conseguirlo, se caracterizan por buscar la despersonalización e inutilización de la víctima, su desmotivación, tristeza, apatía, nerviosismo, irritabilidad, relegándola, despreciándola, lanzándole infames venablos o negándole la comunicación, de manera que crezcan sus sentimientos de fracasos constantes, sus decaimientos de ánimo (distimias), su desilusión por el trabajo.

Tan «perverso narcisista» (calificativo aplicado por Marie France), en definitiva, persigue eliminar a su «compañero», y un buen medio para conseguirlo puede ser lograr «quemarlo» (lo que ya es conocido como «*burn out*» o **síndrome del profesional quemado**).

> *«En todo caso, el hombre es un ser "faciendum, no factum", en una situación de "in fieri": constante y permanente proceso.»*
> —Enrique GERVILLA CANTILLO [131] (p. 150)

Aparecen en escena los **«logotipos inhibidores»**: el individuo afectado, antes de actuar, habla consigo y se refrena, se auto-obstruye. Pedro G. D'ALFONSO [132] (p. 41) clasifica estos logotipos inhibidores en: *negativos* (incrementan la ejecución negativa o inhiben la acción positiva; por ejemplo, «no sirvo para nada», «siempre fracasaré»), *aversivos* (incrementan el alejamiento o se oponen a la ejecución; por ejemplo, «no tengo capacidad para ello», «siempre me equivoco») y *justificativos* (aparta de la ejecución y busca justificarse; por ejemplo, «siempre se interpone alguien o algo que no me permite triunfar», «el destino me es siempre adverso»).

En el **entorno universitario**, una de las consecuencias, es la investigación en solitario. El individuo afectado no tiene colegas, y si los tiene, están muy lejos; pero el colmo de los males, es que están tan adelantados que no se interesan por su trabajo. Esta es la historia del personaje João Dellacruz, según nos la cuenta Bruno LATOUR [33] (pp. 146-148): [...] João acaba no sabiendo qué es real y qué es ficticio [...] Como a Robinson Crusoe en su isla, las fronteras entre el soñar despierto y las percepciones le resultan confusas, ya que no tiene a nadie con quien disentir y así crear una diferencia entre hechos y artefactos. [...] sus artículos son cada vez menos y menos técnicos (ahora escribe sólo para revistas de actualidad; sus argumentos se vuelven cada vez más vulgares) evita discusiones con otros expertos extranjeros. João percibe que se ha quedado fuera de la carrera de pruebas, lo cual se acentúa cada día que pasa. Comenzar una nueva investigación casi es imposible.»

La solución puede estar en la **Psicagogía** (de «psuquê»=alma y «agō»=conducir), disciplina fundada por A. KRONFELD [133] y divulgada, entre otros por Charles BAUDOUIN [134], «que persigue como meta primaria la promoción del *autoconocimiento* y *autorrealización* de una personalidad *equilibrada* y *madura.*» —*cfr.* G. D'ALFONSO [132](p. 13).

> *«Persona es, efectivamente, "ser suyo", "ser que se posee"; y es aquí donde se conectan íntimamente las nociones de persona y de felicidad. Pues si la felicidad implica plena posesión, precisa entonces de la persona como de su ámbito propio, pues no cabe mayor posesión que aquella que consiste en poseerse a sí mismo. La posesión de algo —sea lo que sea— es una relación y, como tal, implica una alteridad, un otro. Pero, justamente en el caso de la relación de posesión, esta alteridad es referencia a sí mismo, al poseedor. Donde más plenamente se pueda dar esta referencia es, por tanto, donde más plenamente se dará la posesión. Y como la referencia es más plena cuando es autorreferencia, también es más plena la posesión cuando es autoposesión. La posibilidad de una posesión plena se dará en un ser que sea capaz de poseerse a sí mismo. Y si consideramos con Zubiri que "la vida de todo ser humano es, constitutivamente, personal", la posibilidad de plena posesión marca el camino del desarrollo humano.»*
> —Francisco ALTAREJOS [135] (p. 61)

Todos conocemos personas cuyas más brillantes capacidades son su sensibilidad, su esfuerzo, su tesón, su *bonhomie*[18], y no su elocuencia, su presteza *in extremis*, su poder de persuasión y de negociación, su aparente brillante inteligencia, o su inmensa personalidad. Las primeras, muchas de las cuales son tildadas por muchas de las segundas de melilotas, timoratas, currutacas y cobardes, siendo además objeto de chacota y mengua por ellas, conforman un rico elixir, un caldo vital en el que bullen conocimientos, precisión y rigor en su trabajo, a la par que actitudes abiertas para formar al profano.

[18] Voz francesa que significa *hombría de bien, bondad de corazón, sencillez de espíritu.*

> *«Hoy, la enfermedad más peligrosa en la empresa es el despilfarro del talento y de la capacidad innovadora.»*

Estas palabras de Mulder y Ortíz [136] están escoltadas por la defensa de la implantación de la ética como la única vía posible de crecimiento de una empresa —*cfr. item v. gr.* Lozano [137] (*passim*) y Fernández Aguado [36] (*passim*).

Y es que, demasiadas veces, los segundos, los detentadores de la inteligencia, esos abyectos, infamantes y plagiarios *señores*, amantes concupiscentes de los sobones y de las bizmas, encumbrados a dioses sólamente por un cacumen privilegiado, aliado con un sinnúmero de casualidades, repletas de parcialidades y favoritismos, denigraciones y frusleras imputaciones, configuran un mejunje nauseabundo, una bazofia colmada de fatuidad, gazmoñería, fraudulencia y truhanería, de arrogancia, intolerancia y prepotencia, cuyos salpicones zahieren a los infatigables trabajadores genuinos, alebrados, a menudo, por tanto despropósito.

> *«Abraham Lincoln dijo: "Del mismo modo que no quisiera ser esclavo, tampoco quisiera ser amo." ¿Cabe decir lo mismo acerca de sí mismo? ¿O se tiende a lo que Eugene E. Jennings llamaba una "posición de bicicleta", inclinando ante los superiores mientras se patea furiosamente a los que están en puestos inferiores?»*
> —Charles A. Dailey y Frederick C. Dyer [138] (p. 163)
>
> *«Si el activo humano no tiene una personalidad definida y una autoestima probada, terminará produciéndose un servilismo ineficaz en el proceso de generación de valor añadido.»*
> —J. Álvarez López y F. Blanco Ibarra [139] (p. 7)

Según González de Rivera y Revuelta [140], «la presentación de acoso psicológico es más probable en organizaciones relativamente cerradas, cuya cultura interna considera el poder y el control como valores prioritarios sobre la productividad y la eficacia. Por eso, dentro del ámbito laboral, parece darse con más frecuencia en universidades, hospitales y ONGs, aunque ninguna entidad pública o privada, parece estar a salvo del problema.»

El modelo DIR (Detección, Identificación, Registro) —*cfr.* Porto [141, 142]; Porto y Viedma [143]—, en base al que se detectan, identifican y registran las situaciones que afectan o pueden afectar al capital intelectual, como provisiones y contingencias, generándose implicaciones tanto en el activo como en el pasivo del Balance del Capital Intelectual (en concreto, ellos identifican, debidas al acoso psicológico: minusvalía de un activo intelectual, pasivo financiero del balance y un pasivo intelectual). El modelo DIR —*cfr.* Porto y Viedma [143] (p. 9) —«sistematiza el tratamiento a dar a algunos pasivos contingentes y a los hechos contingentes que afectan a la valoración del Capital Intelectual», en particular, de una universidad. A modo de ejemplo, citamos los marcadores que estos autores proponen como indicadores de una posible situación de acoso psicológico (en la universidad):

$$\text{Nivel de bajas} = \frac{\text{Días de baja por accidentes o bajas laborales (excepto maternidad)}}{\text{N}^o\text{de miembros de un departamento o sección}} \tag{1.7}$$

$$\text{Nivel de conflicto} = \frac{\text{N}^o\text{de conflictos} + \text{N}^o\text{de quejas durante el periodo}}{\text{Media de personas en activo durante ese periodo en un departamento, instituto o área}} \tag{1.8}$$

$$\text{Logro individual \#1} = \frac{\text{Años desde el ingreso en la universidad hasta la lectura de la tesis}}{\text{Media del departamento, instituto o de la universidad}} \tag{1.9}$$

$$\text{Logro individual \#2} = \frac{\text{Años desde el ingreso hasta dejar de ser contratado}}{\text{Media del departamento, instituto o de universidad en alcanzar el funcionariado}} \tag{1.10}$$

$$\text{Carga docente} = \frac{\text{Número de alumnos}}{\text{Media de alumnos por profesor en el departamento}} \tag{1.11}$$

En respuesta, fundamentalmente, a la profunda sospecha de la existencia de acoso moral en la universidad española, se ha celebrado el Primer Congreso Nacional sobre la Corrupción en la Universidad Pública Española[19], y se han creado asociaciones para la justicia universitaria y asociaciones contra el acoso moral en el trabajo —*cfr.* Porto y Viedma [143]. Según Iñaki Piñuel y Zabala, autor del «barómetro Cisneros» medidor del *mobbing*, son al menos 20.000 los trabajadores universitarios, entre ellos unos 12.000 profesores, que son hostigados moralmente en su trabajo (a 20 de septiembre de 2002) —*cfr.* Piñuel y Zabala [144].

Pero el «barómetro Cisneros» es un cuestionario dirigido a la persona acosada. Y es un cuestionario directo, que pregunta, sin rodeos, si la persona se siente acosada. Pero ya hemos dicho que la mente de una persona

[19] Madrid, septiembre de 2002, `http://www2.uah.es/vivatacademia/corrupcion/primercongre.htm`

acosada se ve afectada por ejemplo por los logotipos inhibidores —*vide supra* (pág. 16)—, y aunque se le prometa y garantice el anonimato, esto no basta.

¡Ni mucho menos! Los fantasmas le persiguen. El sobre lacrado con toda seguridad será abierto y su cuestionario leído. Ese ojo del gran enemigo que siempre le observa ha visto todo.

El modelo DIR, es decir, trabajar con indicadores del acoso psicológico, parece más factible. A los indicadores anteriores, propuestos por PORTO y VIEDMA [143] (p. 9), nosotros, añadimos, al menos, los siguientes:

$$\text{Ansiedad curricular \#1} = \frac{\text{N}^o\text{de artículos publicados en congresos o en revistas fuera de ranking}}{\text{Media del departamento, instituto o de la universidad}} \tag{1.12}$$

$$\text{Ansiedad curricular \#2} = \frac{\text{N}^o\text{de artículos ajustados a alguna línea de investigación del departamento}}{\text{Media del departamento, instituto o de la universidad}} \tag{1.13}$$

$$\text{Ansiedad curricular \#3} = \frac{\text{N}^o\text{de temas diferentes abordados en los artículos}}{\text{Media del departamento, instituto o de la universidad}} \tag{1.14}$$

$$\text{Carga docente \#2} = \frac{\text{N}^o\text{de asignaturas distintas que imparte}}{\text{Media del departamento, instituto o de la universidad}} \tag{1.15}$$

$$\text{Actuación docente} = \frac{\text{Puntuación de la satisfacción del alumnado con la actuación docente}}{\text{Media del departamento, instituto o de la universidad}} \tag{1.16}$$

$$\text{Cumplimiento docente \#1} = \frac{\text{Puntuación del alumnado referente a la puntualidad en clase}}{\text{Media del departamento, instituto o de la universidad}} \tag{1.17}$$

$$\text{Cumplimiento docente \#2} = \frac{\text{Puntuación del alumnado referente al cumplimiento del horario de tutorías}}{\text{Media del departamento, instituto o de la universidad}} \tag{1.18}$$

$$\text{Asistencia a actos académicos} = \frac{\text{N}^o\text{de actos académicos (apertura de curso, reuniones, etc.) a los que asiste}}{\text{Media del departamento, instituto o de la universidad}} \tag{1.19}$$

$$\text{Presencia en actos sociales} = \frac{\text{N}^o\text{de actos sociales (cafés, comidas, cenas, excursiones) a los que asiste}}{\text{Media del departamento, instituto o de la universidad}} \tag{1.20}$$

A pesar de todas estas iniquidades, gracias a Dios, los dioses, hoy, comienzan a ser constreñidos a un sueño de mármol blanco, mientras que las personas gozan de soplos de inteligencia emocional —*cfr.* GRATTON [145]; COOPER y SAWAF [146]; MORA y RUIZ [147]— que ventilan sus entusiasmos.

> *«Podemos soportar determinadas dosis de hostilidad, salvo si esta hostilidad es permanente o repetitiva o si está colocada en una posición a la que es imposible replicar o ante la que es imposible justificarse.»*
> —Marie France HIRIGOYEN [148] (p. 103)

Aunque sólo es el comienzo. El sinsentido que andamos vituperando sigue alcanzando tal grado que estos sinsorgos y zainos societarios, melindrean hasta ofuscar nuestros oídos, con su adocenada culera cultalatiniparla, con sus denostosas falsías, ahincándose en rebitarlas, como si por mucho tabaleo fuesen a mudarse en ciertas. Estos deteriores ejemplares de persona, melifluos y almibarados truchimanes amantes de la crisopeya, son artífices de un boscaje forrajero, que necesita urgentemente de una dríade que lo sanee, de un galeno que, como mal menor, transforme esa sangraza en una exemia del torrente vital de cualquier sociedad:

> *«Al capón que se hace gallo, azotallo.»*

La solución «dura» implicaría la pérdida de capital intelectual fuerte. La solución «blanda» pasa por la identificación de los acosadores y su reeducación. En esto mostramos nuestro acuerdo con PORTO y VIEDMA [143] (p. 10). Aunque suene a la creación de un cuerpo de «policía educativa», su necesidad surge de la merma en capital intelectual que está sufriendo nuestra Universidad, tanto en cantidad como en calidad.

La pretensión última de esta reeducación es basar las relaciones dentro de la universidad en el compañerismo y camaradería respetuosa y no en la jerarquía impuesta. Como afirma Jesús IBÁÑEZ [149]:

> *«El orden social sólo funciona si es inconsciente. La sociedad es un sistema hiperreflexivo, un sistema reflexivo con elementos reflexivos (los individuos). Las relaciones sociales son relaciones de clase (de orden). Nuestra especie es la única que utiliza como instrumento a miembros de la misma especie: para que se dejen utilizar, es necesario que no sean conscientes de ser utilizados. [...] El uso de encuestas contribuye a que los elementos (individuos) crean que la sociedad es como dicen que es. [...] La jerarquía opera por regulaciones: acción violenta e irreversible del todo sobre las partes. La camaradería opera por agrupamientos: acción pacífica y reversible de cada parte sobre sí misma y sobre cada otra. La jerarquía nos vence, la camaradería nos convence.»*

Pero también, como manifiesta Fernando G. Delgado [150] (p. 195):

> *«Aviso para idiotas que sufren de úlcera merecida: no seais madrastras de Blancanieves. La culpa no es del espejo.»*

Pensándolo bien, a las cinco reglas de Laurence John Peter, con las que comenzábamos la sección, proponemos añadir una sexta, omnipresente:

> Hazte querer, véndete bien, habla siempre en positivo, y farolea[20];
> aunque no tengas nada que ofrecer, que lo parezca.
> Nunca hables mal de nadie.
> Adula a tus superiores inmediatos y a tus compañeros.
> Sé propietario del espacio de intersubjetividad; defínelo y créalo.
> Gobierna los procesos de intimación, de coexistencia y sus mediaciones.
> De tí a tí: tú eres lo importante; el otro es infinitamente egoísta por no pensar en tí.

> *«No es el hecho de que las cosas nos parezcan inaccesibles la razón de que no nos atrevamos; es el hecho de no atrevernos la causa de que nos parezcan inaccesibles.»*
> —Séneca, *via* Gilbert Sinoué [152] (p. 123)

Todo esto no es más que el resultado de lo que en Psicología Social se conoce como «**gestión de impresiones**» —*cfr.* Núñez Liz y Gómez Barreiro [153] (pp. 2ss.)—. Según Schlenker [154], ésta se configura como el conjunto de comportamientos que un individuo utiliza para proteger su imagen, para influir en la forma en la que lo ven los demás, o para ambas cosas. Paloma Núñez Liz y María Gómez Barreiro [153] (p. 2) citan diferentes estudios que han permitido concluir la relación entre la gestión de impresiones del subordinado y la evaluación de su rendimiento realizada por un superior suyo: Kipnis y Schmidt [155]; Wayne y Ferris [156]; Wayne y Kacmar [157]; Ferris, Judge, Rowland, y Fitzgibbons [158]; Wayne y Liden [159].

En concreto, Wayne y Liden [159] presentan como conclusión, que los subordinados tienen más éxito cuando emplean estrategias *centradas en el supervisor* —adular a sus superiores inmediatos, mostrar infinidad de atenciones para con ellos, hacerles favores, etc.— que cuando usan estrategias *centradas en sí mismos* —dar la impresión de que son personas agradables, trabajadores duros e incansables y empleados modelo.

> *«El peor enemigo está dentro de mí.»*
> —Sergio Pombo —*via* Andrés Senlle [110] (p. 59)

> *[...] todo nuestro mal es la cobardía moral, la falta de arranque para firmar cada uno su verdad, su fe y defenderla. La mentira envuelve y agarrota las almas de esta carta de borregos modorros, estúpidos, por opilación de sensatez.»*
> —Miguel de Unamuno <Vida de Don Quijote y Sancho>

* * *

A modo de ejemplo de manipuleo en un acto de elección, supongamos cuatro candidatos a ser contratados: Ángel, Cristina, Luis y Victoria. Supongamos que la comisión de contratación, formada por tres individuos, cada uno con su propio criterio C_1, C_2 y C_3, respectivamente, ha decidido en cada estructura de preferencias, se asignase cuatro puntos al primero, tres al segundo, dos al tercero y uno al cuarto. Como problema multicriterio, ésto corresponde a cuatro alternativas: Ángel, Cristina, Luis y Victoria, y tres criterios: los tres miembros del jurado.

Ángel, Cristina y Victoria tienen como «padrinos» (o «madrinas»), respectivamente, a C_1, C_2 y C_3. Luis, aunque tiene un curriculum ligeramente mejor, está desasistido, así que no cuenta. ¡Lo sentimos! Esa es la realidad. Todo ello es de dominio público (información previa). Si C_1 y C_2 votan racionalmente, entonces, sólo cambiarán el 3 por el 4 en Ángel y Victoria. Ante esto, el candidato de C_2, Cristina, no puede ganar (pues Ángel o Victoria, alguno de los dos, recibirá al menos dos puntos), sin embargo, C_2 puede decidir si gana Ángel o Victoria, según asigne valores a x, y, z —*cfr.* Tabla 1.1.

[20] ¡Cuidado!, una máxima del juego del póquer —quizás la primera a seguir, por su importancia—, reza: «el que nunca farolea, nunca gana; el que farolea siempre, siempre pierde» —*cfr.* Dennett [151] (p. 151).

Candidatos	Criterios		
	C_1	C_2	C_3
Ángel	4	x	3
Cristina	2	4	2
Luis	1	y	1
Victoria	3	z	4

Tabla 1.1: *Situación, que permite manipulación por parte de C_2.*

Es decir, al conocer el método de cálculo de puntuaciones finales, cualquier miembro del jurado, podría tomar una actitud parcial, de favoritismo hacia algún candidato o candidata. Cualquier miembro de un jurado, si dispone de información previa, tiene la posibilidad de votar en función del método de votación elegido y no de sus preferencias. A esto se refiere el término **manipulación**. GIBBARD [160] demostró la imposibilidad de encontrar un procedimiento de votación que sea a la vez no dictatorial y no manipulable.

Observe el lector que estos posibles manipuleos hacen que lo multicriterio acaricie la **teoría de juegos**. Si son permitidos, entonces los criterios, velados votantes y asesores, pueden verse como jugadores, y las alternativas como resultados del juego. La Tabla 1.2 muestra la matriz de pagos, que se trasluce, en unidades de satisfacción.

	$\langle C_2, C_3\rangle$	
C_1	⟨CLVA,VACL⟩	⟨CLAV,VACL⟩
AVCL	$\langle 0,0,1\rangle$	$\langle 1,0,0\rangle$

Tabla 1.2: *Matriz de pagos, en unidades de satisfacción, de las posibles estructuras de preferencia.*

No obstante, como suele ocurrir, en la matriz de pagos conocida por C_1, C_2 y C_3, esa que no se trasluce, los ceros no son tales (el correspondiente a C_2, seguro que se parece más a 1/2 borroso que al cero nítido). Algunos, cínicos ellos, llaman negociación a la manipulación.

* * *

Como hemos dicho, en el mundo universitario están presentes la manipulación y el acoso moral en el trabajo. Lamentamos conocer casos de acoso moral en en trabajo, e, igualmente, casos de manipulación, pero también casos de personas que creen ser espiadas, acosadas o manipuladas, sin serlo. Por ahora, no consideramos que su denuncia sea tarea nuestra, sino de los afectados.

> *«He aprendido que cuando hablas por alguien que carece de voz, debes estar preparado para pagar un alto precio.»*
> —Martin SHEEN <*Los Ángeles Times*, 2 de marzo de 2003>

> *«El silencio de los que hubieran debido hablar y que, por segunda o tercera vez, han perdido la ocasión de hacerlo, pesa. Pero el ruido de las discusiones no ha impedido a la voz del silencio de hacerse oír como un dulce murmullo.»*
> —Pierre CHAUNU [161] (p. 262)

> *[...] una reciente oposición a una plaza de sociología en la sedicente Universidad Autónoma de Barataria. Se presentaban dos candidatos, llamémosles X (de Xarnego) y B (de Barataria).*
> *[...] El candidato X se ha doctorado en sociología por una de las más prestigiosas universidades del mundo. El candidato B no ha estudiado la carrera completa de sociología en ninguna parte.*
> *El postulante X es ya catedrático de otra universidad española y ha sido investigador visitante en diversos centros extranjeros de gran relieve. Ha desempeñado, además, toda la escala de puestos docentes subalternos en la propia Universidad de Barataria que convoca la plaza. Hasta tiene un libro que analiza la estructura de esa misma universidad. Toda su vida activa la ha dedicado a la docencia y a la investigación. El aspirante*

B sólo ha desempeñado puestos docentes de carácter ancilar o complementario y durante un tiempo muy limitado de su vida activa. Más que nada se ha dedicado a otra carrera profesional y sobre todo a la política, en la clandestinidad primero y después como diputado en el Congreso por el partido felizmente gobernante.
[...] Se me olvidaba un dato importante, aunque no suponga mérito alguno en ninguno de los dos aspirantes. El Xarnego ha nacido fuera de Barataria y el diputado es natural de ella.
[...] El tribunal ha decidido conceder la plaza al de Barataria. El hecho, que tendría que haber sido escandaloso, no ha saltado al comentario público.»
—Amando De Miguel [162] (pp. 57-58)

1.10 Sobre lo borroso y lo probable

«Supongamos que el señor Sigma, en el curso de un viaje a París, empieza a sentir molestias en el «vientre». Utilizo un término genérico, porque el señor Sigma por el momento tiene una sensación confusa. Se concentra e intenta definir la molestia: ¿ardor de estómago?, ¿espasmos?, ¿dolores viscerales? Intenta dar nombre a unos estímulos imprecisos; y al darles un nombre los culturaliza, es decir, encuadra lo que era un fenómeno natural en unas rúbricas precisas y «codificadas»; o sea, que intenta dar a una experiencia personal propia una calificación que la haga similar a otras experiencias ya expresadas en los libros de medicina o en los artículos de los periódicos. Por fin descubre la palabra que le parece adecuada: esta palabra vale por la molestia que siente. Y dado que quiere comunicar sus molestias a un médico, sabe que podrá utilizar la palabra (que el médico está en condiciones de entender), en vez de la molestia (que el médico no siente y quizás no ha sentido nunca en su vida).»
—Umberto Eco [163] (p. 5, de la 2^aed. española)

En una escala del 0 al 10, ¿cuánto te duele? Elegir el valor numérico 3, entre los naturales del 0 al 10, es un acto frío, calculador, escueto, a la vez que preciso y maquinal. Elegir la palabra suave (un dolor suave) entre las del conjunto {ausente, suave, moderado, intenso, severo}, es un acto cálido, extenso, menos preciso, menos maquinal, más humano. Elegir dos palabras, por ejemplo, ausente–suave, significando «a veces ausente, a veces suave», es más extenso, y por tanto, menos preciso, menos maquinal y más humano.

De entre los objetos observables, los reconocibles son definidos culturalmente a partir de unas características destacadas o *rasgos de reconocimiento* (rasgos espaciales, funcionales, temporales, etc.) —*cfr.* Eco [163] (p. 62)—. El cardinal de este conjunto de rasgos está minimizado *per se*.

No obstante, lo preciso, lo nítido, y en particular, lo bivalente, es necesario:

«—¿Se caerá el puente? —No sé.»;

«—¿Cuántas espejos hacemos? — Uno, pero borroso.»

«—¿A qué candidato elegimos? —Como decía el Dodo de *Alicia en el país de las maravillas*: a todos por igual.»

«—¿Dónde? —A medio camino entre el puerto y el aeropuerto.»

Cuando salimos de compras con una finalidad clara y sabemos que queremos un *esto*, frecuentemente ese *esto* difícilmente lo encontramos. Usualmente, nos topamos con mercancías que, en mayor o menor medida, se ajustan a lo que buscamos. En casa, o ante una tienda, podemos pensar en la probabilidad de que vendan el *esto*, de que algún *esto* que nos enseñen sea el nuestro o se parezca lo suficiente, pero una vez que nos muestran el artículo que el tendero interpreta que más parece ajustarse al que deseamos, podremos hablar de probabilidad de comprarlo, pero no de probabilidad de que vendan nuestro ansiado *esto*. Podremos hablar, eso sí, del parecido entre el *esto* que nos ofrecen y el *esto* que demandamos.

La realidad es que nuestro pretendido *esto* define una clase de objetos:

$$A = \{x : \varphi(x, \langle c_1, c_2, \ldots, c_n\rangle)\}$$

donde $\langle c_1, c_2, \ldots, c_n\rangle$ es una n-tupla —con toda seguridad, ordenada según una estructura de preferencias jerárquica—, de propiedades o características que deseamos que posea nuestro *esto*, y φ es —aunque lo ignoremos— una fórmula de algún lenguaje lógico **L** —de algún orden— soporte de alguna teoría **T** —de algún orden, no necesariamente el mismo que el del lenguaje—, definida sobre tal lenguaje. Dicha fórmula φ, perteneciente a algún **LT**, corresponde a nuestro concepto intuitivo de propiedad (en realidad de meta-propiedad o meta-característica, ya que hemos denominado propiedades o características a las c_j).

Todo ello tiene más que ver con lo borroso que con lo probable. Si $c_j(x)$ representa el hecho de que el objeto x posea la característica c_j, tenemos, varias opciones. Comportarnos de manera bivalente, diciendo que x la

posee o no la posee, esto es, los únicos valores que reconocemos para $c_j(x)$ son 1 (la posee) o 0 (no la posee):

$$c_j(x) \in \{0, 1\}$$

O bien, podemos introducir un valor intermedio que represente nuestra duda, nuestro no tener claro si la posee o no, de manera que reconoceríamos que:

$$c_j(x) \in \left\{0, \tfrac{1}{2}, 1\right\}$$

O bien, introducir un número finito de valores intermedios que graduen nuestra duda, según ésta sea menor (valores más próximos a cero) o mayor (valores más próximos a uno):

$$c_j(x) \in \{0, x_1, x_2, \ldots, x_m, 1\}$$

O bien, introducir un número infinito numerable o continuo de valores intermedios:

$$c_j(x) \in [0,1]_{\mathbb{Q}} \vee c_j(x) \in [0,1]_{\mathbb{R}}$$

En cualquiera de los casos anteriores, el *esto* demandado satisface (ya que es el esto demandado el definidor de la clase A):

$$c_j(esto_demandado) = 1$$

mientras que del *esto* ofertado sólo podemos asegurar que:

$$0 \leq c_j(esto_ofertado) \leq 1$$

aunque lo que en realidad esperamos es que:

$$\tfrac{1}{2} < c_j(esto_ofertado) \leq 1$$

Estos valores no son valores de probabilidad, sino valores de pertenencia de un objeto a la clase definida por el *esto* demandado[21].

Podemos precisar un poco más. Una vez que nos presentan el *esto* ofertado, podemos, básicamente, ejecutar dos acciones: lo compramos o no lo compramos. Sobre estas acciones es aplicable una probabilidad, con toda seguridad en el sentido bayesiano, pues disponemos de información previa (no será la primera tienda que visitemos buscando el *esto* demandado). Es decir, sobre el acto de *elección* de la acción a ejercer, podremos hablar de probabilidad, porque conlleva una **previsión** de funcionalidad futura comparada entre el *esto* demandado y el *esto* ofertado.

> *«La madre Naturaleza (o, tal como la llamamos hoy, proceso de evolución por selección natural) no tiene ninguna previsión, pero ha ido formando gradualmente seres con previsiones. La tarea de una mente es fabricar futuro, tal como lo expresó en una ocasión el poeta Paul* VALÉRY*. Una mente es fundamentalmente algo que anticipa, un generador de expectativas. Barrena el presente buscando claves, que refina con la ayuda de los materiales que ha conservado del pasado y las convierte en anticipaciones del futuro. Y entonces actúa, racionalmente, sobre la base de esas cosas anticipadas con tanto esfuerzo.»*
> —Daniel Clement DENNETT [151] (pp. 73-74)

Pero, el proceso de decisión cuyo fin es el acto de elección, comporta la comparación actual, presente y no futura, ni pasada, entre el *esto* demandado y el *esto* ofertado, y comporta una creencia (en el resultado de tal comparación). No hay previsión —ni *inducción*, ni *deducción*, ni *abducción*[22] (también llamada *retroducción*, por Charles Sanders PEIRCE)—, no hacemos ninguna predicción, ni prospectiva ni retrospectiva, y por tanto, no hay probabilidad, ni objetiva ni subjetiva[23]. Lo más que hacemos es una **transducción**, un paso de lo particular a lo particular (un ejemplo en computabilidad es la codificación de (Kurt) GÖDEL —aritmetización—, o la «simple» digitalización de la información) —*cfr.* Fig. 1.5.

[21] Aquí debemos mencionar a Bart KOSKO quien considera la probabilidad como una medida de posibilidad aditiva —*cfr.* KOSKO [164]—, y, en definitiva, que la teoría de conjuntos borrosos subsume la teoría de la probabilidad. Según otros, como George J. KLIR, o Didier DUBOIS y Henri PRADE [165]— no, porque si bien es cierto que podría considerarse que lo borroso subsume a lo probabilístico (frecuentista y bayesiano) desde un punto de vista sintáctico, esto no es así desde la semántica: *sus interpretaciones son radicalmente diferentes.*

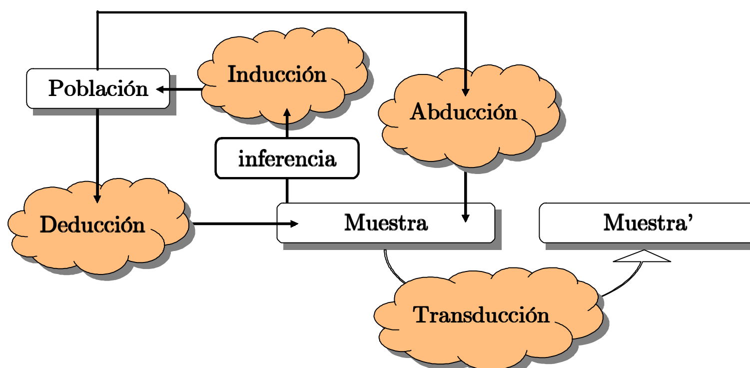


Figura 1.5: *Esquema de los procesos deductivo, inductivo, abductivo y transductivo —cfr. nota a pie de página número 22 — Fuente:* Elaboración propia.

Esa comparación tiene tintes borrosos, pues no parece ser más que el cálculo del valor de pertenencia del *esto* ofertado a la clase definida por el *esto* demandado[24]. Tampoco hay probabilidad una vez terminado el acto de elección, una vez que tenemos el *esto* ofertado. Previamente existía la posibilidad de poseer dicho *esto* ofertado. Previamente podríamos haber calculado una probabilidad de poseer dicho *esto* ofertado. Pero una vez que lo poseemos, la probabilidad de poseerlo es la máxima[25].

Según las teorías estándares. Sin embargo, Agustín García Calvo [174] (p. 11) nos recuerda que justamente el hecho de que se dé, se haya dado, esté dada, sea real [en nuestro caso, la posesión del *esto* ofertado],

Decir que lo borroso subsume lo probabilístico es tanto como decir que lo bayesiano subsume lo frecuentista (por la máxima verosimilitud es la máxima a posteriori considerando una a priori uniforme).

En realidad son ortogonales: podremos hablar de probabilidad de un suceso borroso y podremos hablar borrosamente de probabilidades (probabilidad baja, media, alta, etc.). De todo ello, hablaremos más adelante.

[22] Por si acaso, baste un ejemplo. Sean A ≡ «Estas bolas las he sacado de esta bolsa» (Muestra); B ≡ «Estas bolas son rojas» (Hecho observable en la muestra); C ≡ «Las bolas de esta bolsa son rojas» (Población). **Deducción**: CAB; **Inducción**: ABC ó BAC; **Abducción**: CBA; **Transducción**: $A \leftarrow 1$, $2 \leftarrow B$, $3 \leftarrow C$ —*cfr.* Fig. 1.5.

[23] Así discurren muchos, porque, ¿dónde nacen las probabilidades? Tres son los puntos de vista fundamentales: *(i)* **frecuentista**: es el punto de vista empírico, la vida es pura experiencia, se razona con las frecuencias de los sucesos; *(ii)* **objetivista**: la verdad está ahí afuera, sólo hay que encontrarla; *(iii)* **subjetivista**: lo que en realidad hacemos constantemente es medir y trabajar con nuestras creencias, que se verán modificadas por nueva evidencia. Muchos somos de la opinión que, en la práctica, el ser humano suele ser subjetivista, usando aproximaciones «emparentadas» con las bayesianas. Aproximaciones de estas aproximaciones pueden ser la estimación de máxima verosimilitud y la máxima a posteriori.

Recordemos, no obstante, que según Bruno De Finetti [166, 167] **la única probabilidad que existe** es la que se concibe subjetivamente: «El que a la probabilidad, también, se la considere como algo dotado de cierta forma de existencia objetiva, no es sino una concepción errónea, un intento ilusorio de exteriorizar o materializar nuestras verdaderas creencias probabilísticas.» —tomado de Girón [168] (pp. 428-429), aparece en el prefacio de la obra de De Finetti.

Otro comentario cabe que hagamos en este punto. La idea básica de De Finetti es la de trabajar exclusivamente con sucesos o magnitudes observables —*cfr.* Girón [168] (p. 429)—. En realidad, **a un bayesiano sólo parece importarle** *y admitir, lo observable —cfr.* Montero y Mendel [169]—. Pero, ¿qué hay de la imprecisión en lo observable? ¿Es siempre esa imprecisión probabilista? Espere el lector a la lectura de los capítulos 15, 16, 17, y 18, donde proporcionaremos *una* respuesta.

[24] Hablamos desde el punto de vista **consciente** del individuo, y en ningún caso, desde lo que pueda o no suceder en su in\-cons\-cien\-te. Herman Von Helmholtz (1821-1894) [170], en su teoría constructivista de la percepción, defiende un proceso de inferencia inconsciente: la percepción es indirecta mediante una construcción en la que la experiencia pasada juega un papel importantísimo; y esta construcción se hace inconscientemente. Un ejemplo: la percepción del tamaño de un objeto. El conocimiento de la distancia real a la que está situado el objeto nos permite inferir el tamaño real del objeto a partir del tamaño de su imagen percibida, pues sabemos que este último es proporcional a la distancia a la que está situado el objeto. Si bien Helmholtz no entra en detalles sobre ese proceso inconsciente de inferencia, sí lo hace Egon Brunswik [171], con quien tal proceso se convierte en un cálculo estadístico. Brunswik es el autor de la teoría del **funcionalismo probabilístico**, que él aplica, fundamentalmente a la percepción. Brunswik, cuando aplica su «modelo de la lente» —*cfr.* Brunswik [172]— a la percepción, distingue varias regiones de referencia en relación a un sujeto perceptor: *central*, *proximal* y *distal*. Cuando se percibe, si bien son constantes las características reales del objeto —sus características físicas—, así como también lo es el logro perceptual del sujeto perceptor, ambas constancias se relacionan mediante la mediación de patrones alternativos de estímulos proximales, por lo que hay una serie de relaciones cuya incertidumbre habrá que deshacer. Es decir, un estímulo distal (lejano), no implica un patrón predecible y específico de estímulos proximales. Tampoco podemos inferir la naturaleza de un estímulo distal, de manera única, a partir de estímulos proximales. Brunswik afirma que la relación funcional entre un estímulo distal y los estímulos proximales, viene dada por el grado de covariación entre una clave proximal (convergencia ocular, acomodación del cristalino, disparidad retiniana, etc.) y una característica distal. Defiende resolver esta incertidumbre recurriendo a **una estrategia probabilística**, y así llegar a la percepción. La correlación entre lo distal y lo proximal nunca es uno. «El hábitat natural en que se mueve el sujeto no se le ofrece de una manera determinista, sino sólo con una cierta probabilidad» —*cfr.* Fernández Trespalacios [173] (p. 56).

[25] Pero sigue existiendo la probabilidad de poseer el *esto* demandado, o sea, la creencia en que el *esto* ofertado *es* el *esto* demandado (aunque este comentario, en realidad, pertenece al Cap. 18: «Desenlace»).

está diciendo que ya no es posible [en nuestro caso, bregar por conseguirla].

1.11 El ignorante ser humano

«Me turba el universo y no puedo imaginar que exista este reloj y no haya relojero.»
—Voltaire <Las cábalas>

«¿Qué es el azar? ¿Un producto de nuestra igorancia o un derecho intrínseco de la naturaleza?» son dos preguntas formuladas por Jorge Wagensberg en el discurso inaugural de un *Encuentro sobre Determinismo y Libertad*, celebrado en el Teatro-Museo Dalí de Figueres, el uno y el dos de noviembre de 1985, organizado por la Facultad de Física de la Universidad de Barcelona. Este encuentro consistió en seis conferencias: «La búsqueda de la certeza en un universo probabilístico» de Peter Theodorus Landsberg, «Microsistemas, macrosistemas y determinismo» de Günther Ludwig, «Determinismo e innovación» de René Thom, «Universalidad de las leyes de la naturaleza y cosmología» de Evry Schatzman, «Variaciones sobre el tema de la selección natural. Exploración, selección y decisión en sistemas complejos de baja energía» de Ramón Margalef y «Enfrentándose con lo irracional» de Ilya Prigogine —premio Nobel de Química en 1977—, los correspondientes coloquios y dos debates generales, uno sobre determinismo e indeterminismo en la ciencia moderna y el otro sobre determinismo y libertad.

Por supuesto que se habló del principio de incertidumbre o indeterminación[26] de Werner Karl Heisenberg. Muchos son los que defienden que este principio fuerza la entrada de la lógica multivalente en la ciencia —*cfr.* Kosko [59]—, aunque algunos lo nieguen —*cfr.* Quine [175], y las citas anteriores.

Otra manera de interpretar el mundo, al menos el cuántico. «¿Qué mide $|\psi|^2 dV$? ¿Mide la probabilidad de que un electrón aleatorio se manifieste en un volumen infinitesimal dV? ¿O mide el grado en el que un electrón determinista, pero con *forma* de nube de electrones, se manifieste en dV?» —*cfr.* Kosko [176] (p. 266)—. De inmediato, Bart Kosko sugiere la posibilidad de que incluso la existencia admita graduarse, al menos en el nivel cuántico.

Y de aquí, algunos pasan de inmediato a una **ontología gradual**, donde se admitan grados de existencia, grados de realidad de objetos «concretos»: «¿Hay también grados de existencia de ciudades, planetas, especies vegetales, nidos, programas de computadora, libros, partidos políticos, clubes de fútbol? Sin duda» —*cfr.* Vásconez y Peña [177] (§3).

John Wheeler [178] (pp. 8-9) relata el siguiente juego (*via* Michael Talbot [179], pp. 166-167): «Supongamos que usted ha debido retirarse a un cuarto, mientras en otro cuarto un grupo de amigos suyos decide cuál será la palabra difícil de adivinar que le propondrán a usted para que la adivine. Al volver al cuarto de sus amigos, usted advierte que todos están sonrientes. Usted sospecha que le preparan alguna broma, pero decide seguir con el juego y empieza a hacer las preguntas. "¿Es un animal?" "No." "¿Es un vegetal?" "No." "¿Es un mineral?" "Sí." "¿Es marrón?" "No." "¿Es blanco?" "Sí." A medida que usted sigue con sus preguntas, usted comprueba que cada interlocutor se toma cada vez más tiempo para contestar. Al término del juego a usted le queda una sola opción: "¿Es una nube?" La persona que debe contestarle reflexiona al respecto un instante y al fin contesta: "Sí", y todos rompen a reír. A continuación le explican que cuando usted se fue al cuarto de al lado ellos convinieron en no ponerse de acuerdo sobre una palabra. En vez de esto decidieron que contestarían lo que se les ocurriera, con la condición de que al hacerlo tendrían en el pensamiento una palabra compatible con todas las respuestas previas. Si no cumplían con esta condición, ellos perderían y usted ganaría. Pero la palabra final, "Nube", no existió hasta que usted hizo su última pregunta.»

En realidad, podríamos decir que la solución no existió hasta que se formuló la última pregunta.

Pero, ¿no podríamos decir, aún mejor, que el **grado de existencia** (o de realidad) de la solución, fue aumentando, desde la no existencia (antes de formular la primera pregunta) hasta la existencia (tras formular la última pregunta)?

Creo más en la idea anterior que en la probabilística; creo más en un cuanto con existencia graduada, o mejor dicho, por graduar (por parte de un observador).

En cualquier caso, incluso admitida la naturaleza aleatoria en el microcosmos, ¿por qué distenderla al macrocosmos?

Para Albert Einstein, como para tantos otros, el azar nos consuela de nuestra ignorancia. Defienden un determinismo ilusorio, rayando en lo quimérico, por lo utópico. Su determinismo es inalcanzable para el ser humano «actual».

[26] En mecánica cuántica no es posible conocer con exactitud, en un instante determinado, los valores de dos variables canónicas conjugadas —por ejemplo, posición-impulso, o energía-tiempo.

Leamos a Manfred Max-Neef:

> *«Existen unas 20 constantes físicas fundamentales, como son la velocidad de la luz, la constante de gravitación universal, la constante de Planck y la constante de Boltzmann. Estas constantes no son independientes, y se ha estimado que la probabilidad de que se presente su interrelación única es del orden de $1/10^{200}$ (uno partido por diez elevado a doscientos). Además, con el cambio más infinitesimal del valor de estas constantes, o de sus relaciones, el universo se haría inestable y llegaría a su fin.*
> *En lo que se refiere a la vida, se sabe que una célula viviente está compuesta de unas 2.000 enzimas específicas. Los biólogos han calculado que la probabilidad de que se produzca una combinación única de estos elementos para que se pueda producir una célula viviente al cabo de un millón de años de evolución es del orden de $1/10^{1000}$. Estos niveles increíbles de azar nos llevan a una única conclusión de largo alcance: que nuestra existencia es fruto de una improbabilidad infinita de existir.*
> *Por lo tanto, formamos parte de una vida que es el único milagro demostrable científicamente hoy día; el mayor milagro posible, por otra parte. No sólo hemos asimilado esta idea (lo que es muy inquietante), sino que llegamos a dar por supuesta la vida y todo lo que a ella atañe, como si todo lo que destruimos o gastamos fuera recuperable de una manera mecánica. Nuestra actividad económica, y su justificación teórica, es en muchos sentidos un ejemplo perfecto de esta conducta absurda. Cada vez resulta más claro que, por medio de la lógica económica dominante que se aplica (nuestros conceptos de valor, progreso, beneficios, y todos los demás), nuestra capacidad de destruir lo infinitamente improbable se está convirtiendo en una certeza.»*
> —Manfred Max-Neef, en Ekins, Hillman y Hutchison [180] (p. 11)

Como ser humano, me resisto sobremanera a creer que seamos fruto del azar, de un experimento aleatorio llevado a cabo por Dios —aunque Dios mismo, quizás no se resistiría; tales «probabilidades» no afectarían su omnisciencia; Él podría aceptar perfectamente ser fruto del azar.

Desde el momento en que somos capaces de predecir, mi opinión es que el azar probabilístico no es el puro azar. No se trata del azar esencial, epistemológico, sino de un azar «domesticado». Abraham De Moivre distinguía entre el azar relacionado con la impredecibilidad del resultado en un lanzamiento único de una moneda y el relacionado con la desviación respecto de la serie ideal de «cara» (A) y «cruz» (B): $ABABAB\ldots$, siendo, no obstante, este último, una consecuencia del primero —*cfr.* Schneider [181]. Quizás pensase De Moivre en la diferencia entre el puro azar y el azar «domesticado».

> *«Si los sucesos tuvieran lugar puramente al azar, sería imposible hacer deducciones; recíprocamente, si las inducciones de un cierto tipo producen sistemáticamente conclusiones verdaderas, debe haber una regularidad contingente en el universo que sería susceptible de expresarse en la forma de principios supremos o postulados de la inducción.»*
> —Max Black, *via* Mary Sol De Mora Charles [182] (p. 407)

Como expone Mary Sol De Mora Charles [182] (pp. 407-408), a lo largo de la historia, se han enunciado varios principios defendiendo estos argumentos: el principio de que el futuro se parece al pasado (David Hume); el de que todo suceso tiene una causa suficiente (John Stuart Mill); el principio de homogeneidad espacio-temporal, o el principio de que la variedad es limitada y que los atributos de los individuos se reúnen en un número finito de grupos (John Maynard Keynes y Charles Dunbar Broad).

Le hemos echado el lazo al azar. Para mí, el azar con el que trabajamos en los modelos estocásticos, es un camino hacia el determinismo. Hablando de predicciones, siempre buscamos una mayor precisión y fiabilidad. Lo predice con un 90 por ciento de posibilidades. Pues seguramente, en el futuro, se hallará un método mejor, sería la respuesta.

Observa, querido lector, cómo los defensores del azar, persiguen denodadamente el cien por cien de fiabilidad en sus predicciones, persiguen el determinismo. Cuanto más se acercan al determinismo, más felices se sienten.

Y he aquí lo que nos dice Lewis Carroll, respecto de la *paradoja de los mapas* —*cfr.* Bunch [183] (p. 130): cuanto más grande sea un mapa, mayor detalle podrá conseguirse; claro que, desde este punto de vista, el mejor mapa es tan grande como la misma región que representa.

La paradoja de los mapas se muda en metáfora: el azar domesticado es un mapa y el determinismo, la región que representa.

El azar que usamos está domesticado, pues se rige por leyes. En realidad, podríamos hablar de expresiones del azar y de leyes para «atraparlas». Y estas leyes son deterministas. Por supuesto que podemos pensar en leyes de tipo 2, esto es, las leyes, a su vez, están determinadas por otras leyes, y, por qué no, éstas por otras, y así sucesivamente. Pero esto es un camino sin final del que cuando decidimos retornar, en ese punto, en ese momento decisivo, hemos aniquilado el azar.

En definitiva, pienso que el azar puro, epistemológico, es tan inalcanzable para el ser humano «actual», como el determinismo.

> *«Consideramos una cosa como efecto del azar si no ofrece a nuestros ojos nada regular o nada que anuncie una intención, y si además ignoramos las causas que lo producen. El azar, por consiguiente, carece de realidad en sí mismo: no es más que un término que describe nuestra ignorancia acerca de la manera en que las diferentes partes de un fenómeno se combinan con otro y con el resto de la Naturaleza.*
> *El concepto de probabilidad hace referencia a esta ignorancia. Si estamos convencidos que, de dos sucesos, que no pueden ocurrir conjuntamente, uno u otro ha de tener lugar necesariamente, y si no vemos ninguna razón por la que uno debería tener lugar más fácilmente que el otro, la existencia y la inexistencia de cualquiera de ellos es igualmente probable.»*
> —Pierre Simon LAPLACE, *via* Ivo SCHNEIDER [181] (p. 382)

Ser humano significa, actualmente, ignorar, y esta ignorancia me obliga a adoptar una postura no determinista.

> *«Como una inferencia directa de la ignorancia, no puede haber reglas sociales ni políticas que sean inmutables.»*
> —J. WISEMAN [184]

Pero, esta postura debe ser racional, o al menos, no debe atentar contra nuestro sentido común. A la «mano invisible» y al «deus ex machina» —misteriosos procesos irracionales que conducen a un orden no intencionado, pero con atisbos de ideal—, propugnados por Adam SMITH [185] y Friedrick A. HAYEK [186], respectivamente, me siento obligado a calificarlos como mínimo de cavilosidades, si no de sandeces, en cuanto divinizan el efecto pero no la causa.

Dios podrá no jugar a los dados, pero yo sí que juego. Creo en la necesidad de un azar «domesticado», porque al no poder ser determinista, por mi condición humana, necesitaré tirar los dados ante algunas situaciones de elección.

> *«Sólo Dios es capaz de percibir el infinito de términos cuya conexión permite establecer la unidad de lo real y restablecer la homogeneidad de la ciencia. Dios es profeta tan fácilmente como es geómetra.»*
> —LEIBNIZ, *via* Tomás GALLARTA [187] (p. 36).

Saber si mis hijas Marina y Sara serán o no personas altas, *puede* que tenga que ver con el azar. Pero, no tener claro si mi amiga Cristina es o no alta, no es una cuestión de azar. Y sin embargo es una situación de duda, de vacilación, de incertidumbre. Pero esta incertidumbre no tiene nada que ver con el azar, aunque sí con mi ignorancia. Desconozco la definición de ser humano alto, aún más, desconozco si alguien la propuso alguna vez[27]. La fuente de incertidumbre, donde beben el azar y la vaguedad es la misma, la ignorancia inherente al ser humano. Imagina lector, si no, un mundo donde todo lo que se conociera estuviese bien definido, estandarizado, incluso en el sentido puramente sociológico del término: que las actitudes, ideas y gustos del ser humano actual fuesen moldeados según patrones comunes. E imagina vivir en él.

1.12 ¿Dónde se clavó el dardo?

> *«A no ser que cambiemos de rumbo, seguramente acabaremos allí donde nos dirigimos.»*
> —Proverbio chino.

Pensemos en una diana y un dardo. ¿Cuál es la probabilidad de que el dardo se clave en el punto $(\alpha, 0)$, donde α es el número real $\alpha = 0,666...$, definido como sigue? El dígito i-ésimo de α es 6, si en el dígito i-ésimo del desarrollo decimal de π no comienza una secuencia de diez cincos consecutivos, y es 7, en caso contrario.

Este número es computable, así que una pregunta que deberíamos hacernos es: ¿Cuál es la probabilidad de que el dardo se clave en el punto $(\gamma, 0)$, donde γ es un número real computable?

Sea $\beta = 0,333...$, definido como sigue. El dígito i-ésimo de β es 3 si en el dígito i-ésimo del desarrollo decimal de π no comienza una secuencia de diez sietes consecutivos, y es 2, en caso contrario.

[27] Aunque sí conozco la definición de montaña de QUINE, que transcribimos en la página 53 de esta tesis.

¿Cuál es la probabilidad de que el dardo se clave en el punto $(\gamma, 0)$, donde $\gamma = \alpha + \beta$?

Aunque α y β son computables, $\alpha + \beta$ no lo es; de hecho, no tenemos ni idea, ni siquiera de cual es el primer digito decimal de $\alpha + \beta$ —*cfr.* Myhill [188].

Así que otra pregunta que deberíamos hacernos es: ¿Cuál es la probabilidad de que el dardo se clave en el punto $(\gamma, 0)$, donde γ es un número real no computable?

Aquí la cuestión estriba en: ¿cómo se manifiesta un número no computable? Es decir, ¿cómo comprobamos que el dardo se ha clavado precisamente en ese punto, dado que no hay medios de computar el punto? Por ejemplo, para evitar problemas de esta índole, Errett Bishop [189] fundamenta el Análisis Constructivista en los *números reales aproximables decimalmente* (n.r.a.d.), es decir, en números reales ρ tales que $\forall \varepsilon \in Q^+, \exists d \in Q, |\rho - d| < \varepsilon$ (siendo d un número con un número finito de decimales). Los n.r.a.d. pueden ser computables o no: por ejemplo, los α, β y $\alpha + \beta$ anteriores son aproximables decimalmente. Repetimos, en la base de una matemática constructivista[28] hay números que no se sabe construir.

Y no hay medios, por no ser computable $\alpha + \beta$, pero también puede acontecer tal falta aunque fuese computable. Por ejemplo: sean $\alpha, \beta \in [0, 1)$ tales que sus representaciones infinitas binarias se definen como las salidas de dos máquinas de Turing dadas Z_α y Z_β; en este caso, aunque $\alpha + \beta$ es computable, puede que no podamos definir la máquina de Turing que lo computa —*cfr.* Beckman [191] (p. 217).

Los números reales computables constituyen un conjunto numerable[29] —y, por tanto, hay una infinidad no numerable de números reales no computables—. Empleando el conjunto de números racionales como conjunto numerable, y los irracionales como infinito no numerable, las preguntas anteriores pueden ser reescritas:

¿Cuál es la probabilidad de que el dardo se clave en el punto $(\gamma, 0)$, donde γ es racional? ¿E irracional?[30]

La respuesta clásica a cualquiera de las cuestiones planteadas es cero. Sin embargo, hay muchísimos más números irracionales que racionales. Intuitivamente (haciendo partícipe a nuestra intuición del infinito), la probabilidad de que se clave en un irracional debería ser mayor que la probabilidad de que se clave en un racional.

Estamos ante dos sucesos de probabilidad 0, posibles, y tales que uno puede ocurrir con más frecuencia que el otro. La cuestión es: ¿por qué no incluir este hecho en la probabilidad?

¿Por qué no decir que la probabilidad de que se clave en un racional es un CERO bajo, mientras que la probabilidad de que se clave en un irracional es un CERO alto?

¿O que el primer CERO, es «menos cero» que el segundo?

¿O que el primer CERO es un CERO «menos intenso» que el segundo?

Todas las propuestas actuales que conocemos consideran «totalmente cierto» al suceso seguro, y por tanto un único suceso seguro, y similarmente, un único suceso nulo. Sin embargo, las consideraciones lingüísticas que proponemos quiebran esta unicidad, esta absoluta certeza.

¿Por qué seguir insistiendo en que la probabilidad de que una moneda caiga de canto es cero, si no vamos a poder lanzarla infinitas veces?

> *«Nada es totalmente cierto; ni siquiera esta afirmación lo es.»*
> —Eduard Douwes Dekker, alias Multatuli, *via* Gilbert Sinoué [152] (p. 59)

En el capítulo 17: «Un minero de datos ataviado con indumentaria tornasolada (borrosa y bayesiana) (*ter*)», y en el capítulo 18: «Desenlace», intentamos encontrar respuestas.

1.13 Nuestros antepasados, las máquinas

> *«El único lugar en el que no se desentona es en el árbol genealógico.»*
> —Max Jacob

[28] La propuesta de análisis constructivista de Errett Bishop, pues hay varias escuelas constructivistas —*cfr. v. gr.* Bridges y Richman [190]—, aunque en ninguna se parte de números computables.

[29] Aunque el conjunto de los números reales computables es numerable, no es efectivamente enumerable. Si bien por ser numerable es enumerable, es decir, existe una biyección entre los números reales computables y los naturales, esta biyección no es efectiva, o sea, que no existe ningún algoritmo que compute qué número real computable corresponde a un natural dado, ni viceversa. La biyección existe, pero no podemos definirla. Esta falta de medios es del último tipo que comentábamos: cuando $\alpha + \beta$ es computable.

[30] Observe el lector que si suponemos que el dardo se clavó en la recta, entonces, estas cuestiones quedan:
¿Cuál es la probabilidad de que un número real elegido al azar sea racional?
¿E irracional?

Contemplemos el diagrama de Andrew Whiten sobre la complejidad que se organizaría en torno a la representación interna en un animal de un deseo específico de otro animal —*cfr.* Fig. 1.6.



Figura 1.6: *Representación interna en un animal de un deseo específico de otro animal, según Andrew Whiten.*
—*Fuente:* Adaptado de Dennett [151] (p. 150).

Daniel Clement Dennett [151] (pp. 148-149) argumenta que no necesitan consultar un modelo interno de la mente del otro para poder prever su comportamiento y ajustar el suyo convenientemente, sino que están provistos de una « "lista" más bien larga de conductas posibles, bien ligadas a una lista más bien larga de pistas perceptivas y no necesitan saber nada más.» Pero, ¿cómo se formaron estas listas y cómo se establecieron las asociaciones entre sus elementos? ¿Posee el animal mecanismos internos, quizás inconscientes, de cálculo de frecuencias y de probabilidades condicionadas? ¿Forman parte ellos de lo que llamamos «instinto animal»? ¿O será, quizás, posible, que el manejo de la incertidumbre, aunque de naturaleza probabilística, por parte del animal, no requiera de una implementación —inconsciente— de nociones probabilísticas?

Mi buen amigo y biólogo, Francisco Javier Máximo Hombre, mantiene que no existe la inteligencia sino la memoria. Y puede que esté en lo cierto. Puede que nosotros lo único que tengamos sea una enorme lista de hechos, causas, conocimientos, pistas perceptivas, excelentemente ligadas a otra enorme lista de conductas posibles. Puede, entonces, que la inteligencia se reduzca a la simple consciencia de esa memoria. Podemos hablar de conocimiento implícito o procedimental en las criaturas *popperianas*[31], pero, ¿podemos hablar de manejo de conceptos? Pensamos que no. Estamos de acuerdo con Dennett en que tal manejo es imposible sin el lenguaje —*cfr.* Dennett [151] (p. 188)—. Pero además del lenguaje, un medio entre lo interno y lo externo, no debemos olvidar nuestra necesidad de medios puramente externos, como repositorios de nuestra memoria.

> *«El sueño es tal vez en el ser humano lo que las cavernas son en la tierra: el refugio de una memoria que se descubre poco a poco.»*
> —Didier Decoin <La última noche>

[31] Daniel Clement Dennett [151] (pp. 104 *et passim*) denomina **criaturas darwinianas** a las más primitivas, organismos supervivientes primarios; denomina **criaturas popperianas** (pp. 109, 156 *et passim*) a aquéllas capaces de preseleccionar entre todos los comportamientos o acciones, capaces de guiarse por su experiencia pasada para rechazar posibilidades de actuación tentadoras aún no probadas en la «vida real» (¿qué debo pensar a continuación? y ¿qué haré a continuación?, son, en este orden, las preguntas típicas que «se hacen» estas criaturas). Como decía Karl Raimund Popper, esto «permite que nuestras hipótesis mueran en vez de morir nosotros» —*cfr.* Dennett [151] (p. 109)—. En un rango inferior se sitúan las **criaturas skinnerianas** —en honor al condicionamiento operante propugnado por Burrhus Frederic Skinner [192]—, incapaces de preseleccionar, obligadas a probar, y por tanto, susceptibles de morir en uno de sus errores (¿qué haré a continuación?, es la pregunta típica que «se hacen» estas criaturas). Las **criaturas gregorianas** —en honor a Richard L. Gregory [193]—, son aquéllas «cuyos entornos internos reciben la información mediante las partes diseñadas del entorno externo. [...] Pocos de nosotros podríamos reinventar la rueda, pero no tenemos que reinventarla ya que hemos adquirido el diseño de la rueda» —*cfr.* Dennett [151] (p. 121).

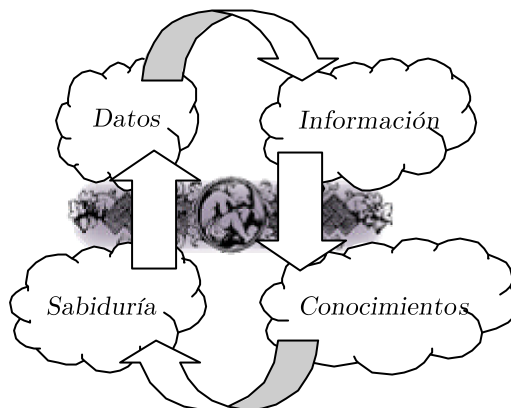
Y eso sería todo: memoria. No en vano provenimos de autómatas. Aquellas macromoléculas de hace miles de millones de años, de las que descendemos, no eran más que eso, autómatas *autoduplicantes*[32]. Y son nuestros ancestros. ¡Un saludo, tata ... tatarabuelo *robot*![33]

En fin, emprendamos el camino.

[32] *Cfr.* nota a pie de página nº1 (pág. 5).
[33] Esta expresión tan «gráfica» no es nuestra, sino de Daniel Clement Dennett [151] (p. 34).

2

Obertura



«Los datos, organizados y empleados debidamente,
pueden convertirse en información.
La información, absorbida, comprendida y aplicada por las personas,
puede convertirse en conocimientos.
Los conocimientos aplicados frecuentemente en un campo
pueden convertirse en sabiduría,
y la sabiduría es la base de la acción positiva.
La teoría de la decisión sólo se aplica, en la mayor parte de los casos,
cuando las partes más difíciles de la decisión ya han sido tomadas.»
—Michael COOLEY [194]

«El conocimiento conduce a la unidad de la misma manera que la ignorancia conduce a la diversidad.»
—Shrî RÂMAKRISHNA, <*Conversaciones*>

Parece indiscutible que el aprendizaje humano —responsable, sin duda, de su evolución y progreso—, está fuertemente influenciado por el conocimiento previo poseído. Los sistemas de representación de conocimiento prestan una ayuda empírica razonable a los estudios sobre cambio conceptual, al permitir simular las interferencias que se producen entre los conocimientos nuevos con los que se poseían de antemano, así como el proceso de desarrollo y evolución conceptual.
Suponemos que los sistemas computacionales de representación de conocimiento, con los que trabajamos, son efectivamente computables, humanamente manipulables y que sus elementos son distinguibles descriptivamente. Para esto último, nos basamos en el principio de la variedad limitada, propugnado por John Maynard KEYNES *y Charles Dunbar* BROAD*, es decir, que los atributos de los individuos se reúnen en un número finito de grupos, y en los actos de distinción que, como humanos, ejecutamos continuamente, y cuyos resultados son las unidades (objetos, entidades), en el sentido de Humberto R.* MATURANA *y Francisco J.* VARELA*. Si bien estas unidades están vagamente perfiladas, porque desconocemos con precisión su perfil de atributos, han de ser humanamente interpretables. Como intérpretes en estos papeles de unidades vagamente perfiladas, hemos elegido a los objetos borrosos.*
Actualmente, en la mayoría de los sistemas computacionales de representación de conocimiento, los mecanismos primarios de inferencia como la categorización y la clasificación, se llevan a término utilizando criterios de subsunción. Pero el uso de argumentos de subsunción acarrea ciertos problemas computacionales, por ejemplo, con respecto a la comprobación de tipos, la autorreferencia y las clases cíclicas.
Por otro lado, las consultas basadas en similitud se constituyen en un paradigma de búsqueda para muchísimas aplicaciones, como bases de datos multimedia, minería de datos (data mining), reconocimiento de patrones, biología molecular, comercio electrónico, o la búsqueda en Internet, por poner varios ejemplos.
Esta obertura nos motiva, descubre y conduce hacia la primera meta de nuestra Tesis: definir un marco teórico de trabajo adecuado para comparar conjuntos borrosos, ordinarios o no (Φ*-borrosos, de nivel* n*, de tipo* n*, etc.), y nos propone basar las comparaciones en similitudes, evitando así los, a veces, arriesgados, argumentos por subsunción.*

2.1 Sistemas de representación de conocimiento

«Saber es poder.»
—Auguste COMTE

2.1.1 Sistemas computacionales de representación de conocimiento efectivamente computables

Decimos de un sistema computacional que es **efectivamente computable** si presumimos que podemos completar cualquier operación en tiempo finito, es decir, si es un sistema humanamente manipulable. En el sentido de que la computabilidad formal subsume a la computabilidad intuitiva, tesis defendida por Alonzo CHURCH y Alan Mathison TURING[1].

Los sistemas computacionales de representación del conocimiento prestan una ayuda empírica razonable a los estudios sobre **cambio conceptual**, al permitir simular las interferencias que se producen entre los conocimientos nuevos con los que se poseían de antemano (a priori), así como el proceso de desarrollo y evolución conceptual —*cfr.* SIMON y KAPLAN [198]—. Esto nos conecta de inmediato, por ejemplo, con las nociones de *concepto inclusor* (subsumente, supraordenado o subordinante) y la de *concepto «incluido»* (subsumido o subordinado), en el marco de la teoría del aprendizaje significativo, una teoría constructivista del aprendizaje postulada por David P. AUSUBEL [199, 200, 201], y defendida, entre otros muchísimos, por Joseph D. NOVAK y Helen HANESIAN [202] —*cfr.* §6.22.1.

2.1.2 La subsunción y sus infatigables e importunos adláteres computacionales

Como es bien sabido, la clasificación y la categorización son dos mecanismos primarios de inferencia en los sistemas de representación de conocimiento. Tradicionalmente, las jerarquías que expresan categorización de clases en una Base de Conocimiento —*Knowledge Base* (KB)— o en un OBRS (*Object Based Representation System*), se construyen en base a criterios de subsunción.

Cuando dos ideas se conectan a la luz de una relación de dependencia de una parte a un todo, decimos que el último subsume a la primera. Es posible pensar en cosas *en sí mismas*, pero también es posible pensar en ellas de acuerdo a conceptos más extensos. Esta segunda posibilidad es la **subsunción**. La subordinación de unos conceptos a otros. Así, por ejemplo, decimos que el concepto de animal subsume al concepto de ser humano[2].

A veces, se hace referencia a la subsunción como un *operador subtipo* en una jerarquía tipo-subtipo. Uno de los **problemas** más conocidos **de la subsunción** tiene que ver con la comprobación de tipos (*type checking*). En principio, cualquier tipo que pueda ser inferido puede ser comprobado. Pero existen problemas al no poder inferir el tipo de ciertas cláusulas de ciertas tuplas, por ser arbitrario tal tipo. Dos soluciones son: *anotación de tipos* —*cfr.* ABEL [205]— o *caminos cuantificados* (esencialmente, secuencias de atributos afectados por cuantificadores existenciales o universales) —*cfr.* BERGAMASCHI [206]—. La subsunción también tiene problemas con la *autorreferencia* y las *clases cíclicas* —*cfr.* BENEVENTANO y BERGAMASCHI [207]; OHORI y TAJIMA [208].

2.2 Sistemas de gestión de bases de datos

«El verdadero tesoro del hombre es el tesoro de sus errores, la larga experiencia descargada gota a gota en milenios.»
—José ORTEGA Y GASSET

[1] En una demostración con sabor similar a la del teorema de incompletitud de Kurt GÖDEL, Peter WEGNER muestra que el software interactivo, no puede describirse con una máquina de TURING. La idea básica de Peter WEGNER es que un sistema interactivo que interactúe con más de un entorno, simultáneamente, no puede ser reducido a uno que interactúe con un único entorno [195, 196, 197]. No obstante, es posible extender el modelo abstracto de máquina de TURING de manera que sea capaz de modelar la interacción; WEGNER propone denominar a estas máquinas de TURING extendidas, **máquinas interactivas** (*interaction machines*). Es el primer ejemplo que conocemos, de supercomputación TURING *efectiva*.

[2] Ya que uno de los supuestos trata sobre la evaluación de los aprendizajes, hacemos un par de comentarios en este punto. Según Joseph D. NOVAK [203], el **aprendizaje por subsunción** es el tipo predominante. Su opuesto, el **aprendizaje superordinario** —esto es, el que se lleva a cabo cuando se asocian varios conceptos como subconceptos de un concepto más universal—, contribuye de manera sustancial al desarrollo de esquemas mentales —*cfr.* NOVAK y LULI [204]—, como pueden ser los mapas de conceptos, una clase de **herramientas de representación de conocimiento** sobre las que escribiremos en §6.22.1.

Una base de datos, en su más pura esencia, se entiende como un sistema cuyo propósito es almacenar y mantener información electrónicamente, haciéndola accesible bajo petición, a ser posible, en forma conveniente y eficiente —*cfr. v. gr.* Korth y Silberschatz [209]; Hansen y Hansen [210]. Un buen diseño de la base de datos debe encaminarse a conseguir su transportabilidad, a la par que su expansión.

Los primeros sistemas de gestión de bases de datos (SGBD) se basaban en los modelos de datos de red y jerárquico. El primer SGBD es IDS (*Integrated Data Store*) de General Electric —*cfr.* Bachman y Williams [211]—, que es un **modelo de datos de red**. Otro ejemplo es APL (*Associate PL/1*) —*cfr.* Dodd [212]— . Actualmente destacan, por su mayor uso, IDS (comercializado ahora por Honeywell) e IDMS (*Integrated Database Management System*) de Computer Associates. En realidad, el modelo en red más usado no es un modelo «puro» de red: es IDMS/R (*Integrated Database Management System/Relational*) que incorpora a IDMS algunas características relacionales.

IMS (*Information Management System*) —*cfr.* McGee [213]; IBM [214]—, desarrollado conjuntamente por IBM y North American Aviation (posteriormente, Rockwell), con la meta de proporcionar un SGBD para el proyecto lunar Apolo, responde al **modelo de datos jerárquico**. IMS sigue siendo un modelo competitivo en la actualidad. Una razón, aunque externa, es que muchas estructuras de datos que se usan y que se usarán, son inherentemente jerárquicas. Los modelos en red, posiblemente los más robustos en cuanto a su capacidad de representación, no han conseguido vencerle, porque, por lo general, pecarán de exigir una complejidad mayor que la necesaria, y en particular, debido a su mejor gestión de memoria (primaria y secundaria). Otros sistemas jerárquicos que se siguen usando, aunque en menor medida, son, TDMS (*Time-Shared Data Management System*) de System Development Corporation —*cfr.* Vorhaus y Mills [215]; Everett, Dissly y Hardgrave [**?**]—, System-2000 de MRI [216] (ahora de SAS Institute) y Mark IV (*Multi-Access Retrieval System*) de Control Data Corporation.

En 1970, Edgar Frank Codd [217] propone un nuevo enfoque, que revolucionará el concepto de SGBD: el **modelo relacional** —*v. gr. System* R (*cfr.* Ashtrahan *et alii*[3] [218]); PRTV (*Peterlee Relational Test Vehicle*) (*cfr.* Todd [219]); *Ingres* (*cfr.* Stonebraker, Wong, Kreps y Held [220]; Stonebraker [221]); *Query-by-example* (*cfr.* Zloof [222]).

Estos tres modelos pueden adscribirse a una categoría que Henry F. Korth y Abraham Silberschatz [209] (p. 7, de la edición española) denominan **modelos lógicos basados en registros** —que describen los datos en los niveles conceptual y de visión, si bien no especifican claramente los limitantes de los datos—. Estos autores consideran dos categorías más, la de los **modelos físicos de los datos** —que describen los datos en el nivel más profundo, por ejemplo, el *modelo unificador* y la *memoria de cuadros*— y la de los **modelos lógicos basados en objetos** —que describen los datos en los niveles conceptual y de visión, especificando de manera precisa los limitantes de los datos, por ejemplo, el *modelo binario*, el *modelo infológico*, el *modelo semántico de datos*, el *modelo orientado a objetos* y el *modelo entidad-relación* —*cfr.* Thalheim [223].

2.3 Sistemas de representación de conocimiento basados en unidades vagamente perfiladas

«La significación de un objeto es, entre otras, "todo lo que se puede hacer con él"»
—Jean Piaget y Rolando García [224] (p. 71, de la edición española)

Como apuntan Ekins, Hillman y Hutchison [180] (p. 117), el movimiento desde los datos hasta la **sabiduría** supone un distanciamiento de los meros cálculos, una manifestación de la intuición y del sentido común, una adquisición de conocimientos tácitos, y un mayor número de juicios sintéticos que de juicios analíticos. Si bien, éstas son características humanas y no maquinales.

Como decíamos al finalizar el Preludio, nuestra sociedad, en su modo actual, no es la sociedad de la información, y mucho menos del conocimiento y ni por asomo, de la sabiduría. Es tal la inmensidad de datos en acecho, que no nos es posible su procesamiento para su trastrocamiento en información. Pero tampoco es, la nuestra, la sociedad de los datos, sino más bien, la **sociedad de los bosquejos**. La rapidez con la que transitamos por la vida, hace que lo incompleto valga por exhaustivo, lo dudoso, por seguro, y lo vago, por preciso.

La realidad es que los puntos de partida de muchísimas de las inferencias que realiza el ser humano, son ideas, **nociones vagas**, y no conceptos —entendidos, estos últimos, desde lo absoluto.

[3] Ashtrahan, Blasgen, Chamberling, Eswaran, Gray, Griffiths, King, Lorie, McJones, Mehl, Putzolu, Traiger, Wade y Watson.

Porque, como defiende el pedagogo sueco SÄLJÖ [225], existe la distinción entre **pensamiento superficial** y **pensamiento profundo**, y a su vez, cada uno, enmarca dos categorías, las de la **actitud pasiva** y **activa** —*cfr.* ENKVIST [226] (p. 161)—. En la categoría superficial-pasiva (conocer datos), situaríamos la búsqueda de datos. A caballo entre las categorías superficial-activa (conocer muchos datos verdaderos) y profundo-pasiva (conocer muchos datos verdaderos conectados unos a otros), situaríamos la búsqueda de la información. Finalmente, en la categoría profundo-activa (conocer muchos datos conectados unos a otros y saber distinguir entre reglas y ejemplos), situaríamos el conocimiento.

Diseño / Sistemas	Teoría	Gestión	Aplicación
Teoría	Conceptos y teorías	Requisitos de diseño	Representación del conocimiento
Gestión	Requisitos de sistema	Razonamiento	Organización del conocimiento
Aplicación	Adquisición del conocimiento	Organización de sistemas	Interfaces

Figura 2.1: *Entorno de soporte a la decisión.*
— *Fuente:* BEHESHTI [227] (p. 18).

Como refiere Moira NORRIE [228] (p. 4), es de la opinión de algunos filósofos, como Hilary PUTNAM [229], de algunos linguistas, como George LAKOFF [230], y de algunos psicólogos, como Eleanor ROSCH (Heider) [231], que puede ser que no sea posible definir un concepto en base a un conjunto de características (condiciones necesarias y suficientes). Ésta es una defensa de una permanente presencia de lo impreciso o incierto.

Sin embargo, como ya hemos discutido en alguna parte, las definiciones son definiciones humanas, elaboradas por seres humanos. La seguridad en lo finitud del conjunto de características, proviene de ello, del **principio de la variedad limitada**, esto es, que los atributos de los individuos se reúnen en un número finito de grupos (John Maynard KEYNES, Charles Dunbar BROAD) —*cfr. v. gr.* DE MORA CHARLES [182] (pp. 407-408)—. Por otro lado, piense el lector que, según la Física actual, el número de átomos del universo es finito. Así que, aún imaginando una mente *dentro* de este universo, capaz de trabajar con infinitas características ¿con qué materiales representamos un número infinito de características *dentro* de este universo?

Todo **sistema basado en conocimiento**[4] —*knowledge based systems* (KBS)— contiene, al menos, una base de datos de hechos básicos (a semejanza de un sistema de base de datos); una base de datos de reglas que permite la deducción a partir de los hechos básicos contenidos en la base de datos, a disposición de cualquier agente autorizado, humano o computacional —así que ya no se trata de datos, éstos han sido analizados, transformados en información, y las reglas atañen a cómo usar tal información—. Finalmente, un KBS contiene un software, denominado sistema de gestión de base de conocimientos —*Knowledge Base Management System* (KBMS)—, que incluye las funciones usuales de los sistemas de gestión de base de datos, y cuya misión fundamental es gestionar los procesos deductivos de la base de datos de reglas, operantes sobre la base de datos de hechos básicos —*cfr.* HANSEN y HANSEN [210] (p. 468, de la edición española).

Los sistemas basados en conocimiento, en definitiva, aglutinan conocimiento. Además, son capaces de proporcionar a los expertos algunas recomendaciones y creencias intermedias, de forma que les sean útiles en la toma de decisiones finales. Hemos de hacer constar nuestro absoluto convencimiento en que a la hora de tomar decisiones que afecten a humanos, los seres humanos tienen la última palabra (simplemente, es un parecer de especie).

El conocimiento, del que hablamos, debe ser entendido como un modelo provisto de una estructura capaz de aprehender la parte de la realidad de interés para los desarrolladores del sistema basado en conocimiento. Una dimensión básica de cualquier modelo es la **abstracción**. Ella establece las primitivas atómicas primigenias sobre las cuales se construye el modelo. Como formalismo de representación del conocimiento, o sea, como la forma en la que el conocimiento se describe para un grado determinado de abstracción, elegimos un formalismo basado en **unidades vagamente perfiladas**.

[4] Las expresiones «**sistemas basados en conocimiento**» —*knowledge based systems* (KBS)— y «**sistemas de base de conocimientos**» —*knowledge-base systems* (KBS)— han sido ampliamente usadas para representar el mismo concepto —*cfr.* HANSEN y HANSEN [210] (p. 468, de la edición española).

Unidades en el sentido que las definen Humberto R. Maturana y Francisco J. Varela [1] (p. 40 de la versión inglesa revisada de 1998) —*cfr.* Cita en la pág. 4—, es decir, como resultado de los *actos de distinción* en los que continuamente andamos enfrascados. Y *vagamente perfiladas*, porque no conocemos con precisión su perfil de atributos —*vide supra.* En línea con el comienzo de esta introducción, estas unidades han de ser **humanamente interpretables**.

Hemos elegido a los **objetos borrosos** como intérpretes en estos papeles de unidades vagamente perfiladas. Suele hablarse de sistema de representación de objetos borrosos —*Fuzzy Object Based Representation Systems* (FOBRS)—. Y, la verdad sea dicha, tradicionalmente, las jerarquías que expresan categorización de clases en una Base de Conocimiento —*Knowledge Base* (KB)— o en un OBRS (*Object Based Representation System*), se construyen en base a criterios de subsunción.

Cuando consideramos objetos borrosos y clases, no estamos ante una jerarquía de clases borrosas, sino ante una **red de clases** —*cfr.* Rossiter, Cao, Martin y Baldwin [232]—. Una solución es *forzar* una relación completa de subsunción entre subclases. Por ejemplo, en el lenguaje de programación de lógica incierta orientada a objetos, Fril++ —*cfr.* Cao, Rossiter, Martin y Baldwin [233]—, ser una subclase equivale a que todas sus propiedades están subsumidas por completo por las propiedades de sus superclases —*cfr.* Rossiter, Cao, Martin y Baldwin [232].

Considerando un FOBRS, de forma muy general, que A subsuma B, significa que el conjunto de ítems descrito por A incluye el conjunto de ítems descrito por B. Podríamos pensar en extender esta subsunción, realmente nítida, a una borrosa, quizás considerando una inclusión borrosa en vez de una nítida. Sin embargo, en vez de algo así, lo que proponemos en nuestra Tesis es usar una medida de comparación entre conjuntos borrosos —*cfr.* Cap. 10—. La técnica que proponemos en dicho capítulo, cuyo fundamento es TOPSIS-0/1, allí también presentado, evita que tengamos que usar argumentos de subsunción, y sus correspondientes problemas, enemigos no invitados en los **sistemas basados en conocimiento borroso** —*fuzzy knowledge based systems* (FKBS).

Lo frecuente es llegar a la conclusión de que hemos identificado una subsunción mediante una cuidadosa inspección de la presencia o ausencia de ciertas propiedades preestablecidas para la clase, en la instancia (o subclase) que va a ser subsumida por la clase. Dos posibilidades, en cuanto a cómo medir tal presencia o ausencia, son las siguientes. Podemos evaluar la presencia o la ausencia en el conjunto $\{0, 1\}$, de manera que estaríamos representando el hecho de que una característica «está presente» o «está ausente». Por otro lado, podemos evaluar la presencia o la ausencia en el intervalo $[0, 1]$, de manera que representaríamos «el grado» en el que una característica «está presente» o «está ausente».

Adoptamos este último punto de vista, o sea, comparamos dos objetos o clases según el grado en el que estén presentes o ausentes las propiedades de un conjunto preestablecido de ellas. En particular, en nuestra Tesis sólo nos fijamos en las propiedades que son atributos. En concreto, pensamos en **el estándar ODMG** (*Object Data Management Group*).

Muchos sistemas de gestión de bases de datos usan el estándar ODMG. El modelo de datos usual soportado por las implementaciones ODMG se basa en el modelo de objetos creado por el grupo de gestión de objetos (*Object Management Group*) OMG —*cfr.* `http://www.omg.org/`—. Los elementos más relevantes de este modelo son los siguientes —*cfr.* Cattell, Barry, Berler, Eastman, Jordan, Russell, Schadow, Stanienda y Vélez (Eds.) [234]; Missaoui, Godin y Gagnon [235] (p. 120):

- La primitiva básica es el **objeto**.
- Cada objeto posee un *único identificador* y puede tener uno o más nombres definidos por el usuario.
- Los objetos similares pertenecen a un *tipo de objeto* y comparten estructura y comportamiento.
- Los tipos de objetos están organizados según una jerarquía de *subtipos* y *supertipos*.
- El estado de los objetos se expresa mediante un conjunto de *propiedades* que pueden ser **atributos** o *relaciones*.
- El comportamiento de los objetos se expresa mediante un conjunto de operaciones que se definen mediante *excepciones* y *signaturas* (argumentos, etc.)

Resumiendo, asumimos que cada objeto y cada tipo —de cara a nuestros fines, *tipo* será sinónimo de *clase*, e incluso de *vista* y de *papel*[5] (*role*)—, o en definitiva, lo que nos interesa de cada objeto y cada clase, está representado por un **perfil descriptivo** consistente en un conjunto de puntuaciones relativas a unos atributos

[5] Un papel se refiere a la posibilidad de poder cambiar la clasificación de un objeto dinámicamente, de modo que el mismo

pertenecientes a una colección finita preestablecida. Cada una de estas puntuaciones denota el grado en el que el atributo al que se refiere la puntuación es satisfecho por el objeto o clase.

Debemos hacer también notar que asumimos que cualesquiera dos objetos son siempre distinguibles en base al conjunto de atributos, esto es, no permitimos la existencia de objetos con diferentes identidades pero igual interpretación de todos sus atributos. Varias formalizaciones permiten conseguir esto, algunas a partir de atributos clave y otras a partir del concepto de identidad basado en fórmulas, términos y consultas —*cfr.* GOGOLLA [237] (pp. 260ss.)

Las unidades se agrupan en **categorías** y a las categorías se les da un nombre, para lo cual se emplea un término de un **lenguaje**. Esta es la primera actividad o proceso: la **clasificación** de un dominio de individuos en **taxones** —clases (*sinón.*, categorías) establecidas por una clasificación—. Una vez lograda una clasificación, podemos hablar del **diagnóstico** o **identificación de una unidad** del universo como perteneciente a uno de los taxones establecidos por la clasificación[6].

En el contexto abstracto dentro del que creemos movernos, podemos afirmar que actuamos bajo el principio de la **taxonomía fenética**[7], con la siguiente consideración de Robert SOKAL :

> *[...] basar las clasificaciones enteramente en el parecido, definiendo como clasificaciones naturales aquellas que determinan taxones cuyos miembros son en algún sentido más similares entre sí que con los miembros de los otros taxones.»*
> —Robert SOKAL [243] (p. 108-109), *via* Jesús MOSTERÍN [240] (pp. 19ss.)

2.4 Consultas basadas en disimilitud

> *«Buscar no es una cosa y encontrar otra, sino que la ganancia de la búsqueda es la propia búsqueda.»*
> —SAN GREGORIO DE NIZA <Homilías sobre El Eclesiastés>

Como hemos visto, el uso de disimilitudes nos permite evitar los argumentos por subsunción y, por tanto, sus adláteres computacionales.

En realidad, las consultas basadas en similitud se constituyen en un paradigma de búsqueda para muchísimas aplicaciones, como bases de datos multimedia, minería de datos (*data mining*), reconocimiento de patrones, biología molecular y comercio electrónico —*cfr.* CIACCIA y PATELLA [244]—, o la búsqueda en Internet —*cfr. v. gr.* FIGUEROLA, ALONSO BERROCAL y ZAZO RODRÍGUEZ [245].

En esencia, la respuesta a una consulta sobre similitud consiste en encontrar, en una colección determinada de objetos, aquellos cuya disimilitud respecto de la especificación solicitada por la consulta, sea la menor. Pero, no cabe duda, de que la efectividad de tales consultas se vería incrementada si la especificación de la misma, además de incluir al «estereotipo» buscado, incluyese el criterio de similitud que el usuario preferiría que fuese utilizado para resolver la búsqueda.

La representación vectorial de las características de un objeto está ampliamente extendida —no tiene, el lector, más que pensar en lo manido del término «vector de características»—. Sin embargo, podemos obviar tal representación, considerando una n-tupla ordenada de características como un elemento de un **espacio métrico** —*cfr.* Def. 59 (pág. 97)—. La idea clave de los métodos de acceso métrico (*Metric Access Method*, MAM) se basa en la utilización de la propiedad triangular de la métrica —*cfr. v. gr.* CHÁVEZ, NAVARRO, BAEZA-YATES y MARROQUÍN [246], y la nota a pie de página número 8.

Se dice que y es el vecino más próximo de x, y se nota

objeto puede ser simultáneamente instancia de dos clases distintas. Un **papel** introduce atributos y métodos adicionales a un objeto existente. Un objeto concreto puede exhibir concurrentemente varios papeles. Las diferencias con las **vistas** son múltiples: estas últimas preservan la semántica de un objeto, mientras que los papeles la actualizan; las vistas producen nuevas generaciones de objetos y actualizaciones, mientras que los papeles preservan estrictamente al objeto, al limitarse a modelar diferentes facetas de representación activa (orientadas a una aplicación) para el mismo objeto —*cfr.* PAPAZOGLOU y KRÄMER [236] (p. 201).

[6] El término «diagnóstico» es utilizado, por ejemplo, por JARDINE y SIBSON [238] (p. 267), y posteriormente por Amos TVERSKY [239]. Jesús MOSTERÍN [240] (p. 46) compara la diferencia entre **clasificar** y **diagnosticar**, con la diferencia entre **metrización** (introducción de una magnitud métrica en un campo previamente cualitativo) y **medición** (determinación del valor concreto de esa magnitud para un individuo determinado): la primera es una actividad creativa, mientras que la segunda es meramente práctica.

[7] En Zoología, existen dos corrientes principales: por un lado, la **taxonomía evolutiva**, defensora de la obligada dependencia filogenética de los taxones, es decir, entendedora de que los animales deben agruparse según su parentesco evolutivo (véase por ejemplo el libro de MAYR [241]). Por otro lado, la **taxonomía fenética** propugna agrupar en los mismos taxones a los individuos que más caracteres comunes compartan, independientemente de su genealogía (véase por ejemplo el libro de SNEATH y SOKAL [242]).

$$(\forall x, y, z \in E) \left(x \twoheadrightarrow y :\Longleftrightarrow d(x,y) = \min_{z \in S \setminus \{x\}} d(x,z) \right) \tag{2.1}$$

Recientemente (diciembre de 2002), Paolo CIACCIA y Marco PATELLA [244] han introducido un nuevo MAM, el QIC-M-*tree* —extensión del M-*tree* propuesto anteriormente por CIACCIA, PATELLA y ZEZULA [247]— que soslaya las críticas provenientes del entorno de los SAMs (*Spatial Access Methods*), usados en la representación vectorial, con respecto a los MAMs. Estas críticas consisten en la creencia de que un MAM no puede usar otra distancia que no sea con la que ha sido construido. El QIC-M-*tree* puede trabajar con diferentes distancias a la vez: la distancia sobre la consulta (d_Q) (definida por el usuario), que será con respecto a la cual habrá de resolverse la búsqueda; la distancia índice (d_I), utilizada para construir el árbol; y la distancia de comparación (d_C), usada para descartar rápidamente caminos que no interesan.

La idea fundamental para poder usar dos distancias, es la de que exista una relación de acotación entre ambas. En concreto, sean $\mathcal{U}$ un dominio de objetos, $\mathcal{O} = \{O_1, O_2, \ldots, O_m\}$ un conjunto de objetos de interés (datos) y $\mathcal{M}$ un MAM construido a partir de $\mathcal{O}$, usando la métrica d_I. Supongamos que expresamos una **consulta sobre disimilitud** mediante la especificación de un **objeto consulta** $Q \in \mathcal{U}$ y una función de disimilitud $d_Q : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}_0^+$. Consideramos dos tipos básicos de consultas, sobre rango:

$$\texttt{rango}(\mathcal{O}, Q, \epsilon, d_Q) = \{O \in \mathcal{O} : d_Q(O,Q) \leq \epsilon\}$$

donde $d_Q(O,Q)$ expresa la disimilitud *desde* Q a O; y sobre los k vecinos más próximos[8]:

$$\texttt{kNN}(\mathcal{O}, Q, k, d_Q) = \{O_{(1)}, O_{(2)}, \ldots, O_{(k)}\}$$

donde $O_{(i)}$ representa el i-ésimo objeto más próximo, según d_Q, a Q.

Si, bajo estas hipótesis, se satisface que $d_I \preceq S_{I \to Q} d_Q$ —donde $S_{I \to Q}$ es el *factor óptimo de escala* de d_Q respecto de d_I, es decir, el mínimo valor tal que se satisface esta desigualdad—, entonces, $\mathcal{M}$ puede procesar correctamente el rango y las consultas sobre k vecinos más próximos basadas en d_Q —*cfr.* CIACCIA y PATELLA [244] (p. 405).

Con los MAMs, tras la idea de CIACCIA y PATELLA, destacada en el párrafo anterior, es posible, al menos teóricamente, resolver **consultas basadas en disimilitud**, pues, si d_Q es una función de disimilitud, basta encontrar una métrica d_I, tal que

$$d_I \preceq S_{I \to Q} d_Q \tag{2.2}$$

El problema reside, claramente, en cómo encontrar tal métrica d_I.

2.5 Síntesis reflexiva

Las nociones vistas en este capítulo, como decíamos en su entradilla, son el punto de partida hacia la primera meta de nuestra Tesis: definir un marco teórico de trabajo adecuado para comparar conjuntos borrosos, ordinarios o no (Φ-borrosos, de nivel n, de tipo n, etc.), de manera que, al basar las comparaciones en similitudes,

[8] Sean (E,d) un espacio métrico y $S \subseteq E$. Proporcionada un elemento muestra $q \in E$, un **vecino más próximo** de q, en S, es cualquier solución de la ecuación, $VMP(q) = \arg\min_{p \in S}\{d(p,q)\}$. Puede que lo más sencillo, conceptualmente, sea calcular, para todos los elementos de S, su distancia a q, de forma que la solución es el elemento de S, al que corresponde una menor distancia. Se ha logrado reducir el *coste computacional*, disminuyendo el número de distancias calculadas, lo que se ha conseguido, utilizando diversas combinaciones de las siguientes técnicas:

(a) *utilizando propiedades inherentes a la métrica empleada*; por ejemplo, FISCHER y PATRICK [248], fueron los primeros en utilizar la desigualdad triangular —*cfr.* Def. 52— para evitar calcular muchas de las distancias $d(p_i, q)$; VIDAL [249, 250], utilizando diferentes propiedades métricas, consigue localizar rápidamente patrones próximos a la muestra q;

(b) *empleando estructuras de datos más poderosas*; por ejemplo, los algoritmos de FUKUNAGA y NARENDRA [251], KALANTARI y MCDONALD [252], y KAMGAR-PARSI y KANAL [253], utilizan, además de propiedades métricas, estructuras arborescentes, que permiten, procedimientos de eliminación y búsqueda más eficientes;

(c) *usando puntos de referencia en el espacio*, lo más alejados posible entre sí; puntos que no son patrones —*cfr.* RAMASUBRAMANIAN y PALIWAL [254]—, o que sí lo son, además de emplear una estructura de datos arborescente, y propiedades inherentes a la métrica —*cfr.* MICÓ [255].

(d) Si todo, o la mayoría del cálculo, pudiera hacerse además, en una *fase de preprocesamiento*, podría reducirse aún más el coste —*cfr.* MICÓ [255].

Otra posibilidad sería conseguir *reducir la dimensionalidad* del problema, quizás mediante una descomposición adecuada en subproblemas, o alguna reducción a un problema en menor número de dimensiones. Formalmente: Sea un espacio métrico (E_1, d_1) y una inyección f, tal que $E_2 = f(E_1)$ y $dim(E_2) < dim(E_1)$; se trata de encontrar una métrica d_2, en E_2, tal que, para todo $x, y \in E_1$, $d_1(x,y) < d_2(f(x), f(y))$; es decir, una condición suficiente para encontrar puntos cercanos en (E_1, d_1), es la cercanía de sus imágenes en (E_2, d_2).

podamos evitar los, a veces, arriesgados, argumentos por subsunción en los sistemas basados en conocimiento borroso. Y todo ello porque hemos elegido a los objetos borrosos como intérpretes en los papeles de unidades vagamente perfiladas de los sistemas de representación de conocimiento efectivamente computables —humanamente manejables e interpretables—, con los que hemos decidido trabajar.

¿Qué o quién maneja todo este conocimiento? Pensemos en agentes, en su sentido más genérico (DRAE): «persona o cosa que produce un efecto». Pues lo que no causa efecto, ¿para qué interesa? Por **agentes** entendemos pues, tanto los trabajadores de una organización, y en general, **agentes humanos**, como también los **agentes computacionales**.

Es bastante reciente el nuevo nombre acuñado para estos últimos: *«softbots»* —*cfr.* ETZIONI y WELD [256]; SOWA [257] (pp. 330ss.)—, con interfaces amigables y propósito de cumplimiento de tareas con cierto grado de abstracción. Debemos entenderlos como sistemas software capaces de desarrollar tareas útiles.

Michael R. GENESERETH y Nils J. NILSSON [258] distinguen entre agentes «con tropismo»[9] (*tropistic* agents) —sin estados internos, o sea, sin memoria; su actividad, en todo momento, está determinada, por entero, por la situación del entorno en ese momento—, agentes «con histéresis» (*hysteretic* agents) —con memoria, o sea, con estados internos— y agentes «conocientes» (*knowledge-level* agents) —en los que se ha eliminado cualquier detalle superfluo, y cuyos estados internos consisten por entero en una base de datos de sentencias en cálculo de predicados.

De acuerdo con WOOLDRIDGE y JENNINGS [261], los agentes, como mínimo, deben ser *autónomos* (capaces de regular y dirigir automáticamente su comportamiento de acuerdo a sus propias reglas internas), *sociales* (y *colaboradores*, capaces de entablar conversaciones por medio de algún lenguaje de comunicación entre agentes), *reactivos* (capaces de sentir su entorno y reaccionar apropiadamente) y *proactivos* (a veces denominados *agentes racionales*, capaces de tomar la iniciativa a la hora de ejecutar acciones orientadas a conseguir metas marcadas).

Como podemos apreciar, todas estas características son muy próximas a las correspondientes humanas.

En otro artículo, ETZIONI y WELD [262] consideran los siguientes atributos para un agente: *reactivo, autónomo, colaborador, adaptativo* (persistiendo, con estado interno capaz de evolucionar) y *móvil*.

John F. SOWA [257] (pp. 330ss.) proporciona ejemplos de otras propiedades «humanas» que habitualmente son exigidas para los agentes: *veracidad benevolencia, racionalidad, intencionalidad, deseo, obligación, compromiso, deliberación, flexibilidad, selectividad*, y *robustez*.

[9]En Biología, el término **tropismo** se refiere a un movimiento que realiza un organismo o cualquiera de sus partes bajo la influencia de un estímulo. El término es aplicable a los organismos no libres y en particular a las plantas, reservándose entonces el de **taxia** (*«taxis»*, en inglés) para los animales, pues supone el desarrollo de ese mismo movimiento pero en un organismo libre (según el WEBSTER's [259], para un *«motile organism»*, esto es, para un organismo que esté en movimiento o que pueda iniciar un movimiento espontáneamente). Si se desea conocer más sobre tropismos y taxias, puede verse, por ejemplo, el Capítulo 3: *Fisiología de los movimientos*, de la parte segunda del *Tratado de Botánica* Strasburger —*cfr.* STRASBURGER, NOLL, SCHENCK, SCHIMPER, SITTE, ZIEGLER, EHRENDORFER y BRESINSKY [260] (pp. 454-492).

3

Exámenes preliminares

«El error es la regla;
la verdad es un accidente del error.»
—Georges DUHAMEL <La Crónica de los Pasquier>

«Un hombre competente
es un hombre que se equivoca según las reglas.»
—Paul VALÉRY <Malos pensamientos y otros>



Comoquiera que a lo largo de este estudio hablaremos de clasificaciones y ordenaciones, porque serán básicos para nuestros actos de decisión o juicios por comparación, no está de más comenzar por recordar las propiedades, de más frecuente aparición, de las relaciones binarias, nociones acerca de los retículos, prestando una atención especial, a los retículos normados; estudiamos los intervalos, presentando las extensiones, ya clásicas, de las operaciones elementales de la aritmética, a intervalos ordinarios y a intervalos de tipo 2 *(intervalos cuyos extremos son intervalos), y la noción de función de inclusión, esto es, una función de intervalos (su argumento y su resultado son intervalos o n-tuplas ordenadas de intervalos) generada como extensión de una función real de variable real (cuyo argumento y resultado son números reales o n-tuplas ordenadas de números reales), distinguiendo entre la extensión natural —que es la que nosotros usaremos— de funciones reales factorizables, la extensión de valor medio y la extensión mediante un polinomio de* TAYLOR *(Brook) de grado* 2.

3.1 Relaciones binarias

«Jamás ha habido criaturas; sólamente ha habido parejas.»
—Jean GIRAUDOUX <Sodoma y Gomorra>

Sea C un conjunto no vacío. Se denomina relación binaria R definida sobre C a cualquier subconjunto del producto cartesiano $C \times C$. En la Tabla 3.1 recogemos las propiedades más frecuentes de las relaciones binarias, sobre todo en cuanto al uso de las «relaciones de orden» en las teorías de la elección, el valor y la incertidumbre —*cfr.* CHIPMAN [263]; WHITE [79] (p. 31); JANSANA [264] (p. 60); RÍOS, BIELZA y MATEOS [24] (p. 31); ESCRIBANO [265] (p. 47).

A continuación, ofrecemos una colección de interrelaciones entre algunas de las propiedades listadas en la Tabla 3.1 —*cfr.* JANSANA [264] (p. 58); RÍOS, BIELZA y MATEOS [24] (p. 32); MOSTERÍN [240] (p. 199) .

[1] Jesús MOSTERÍN [240] (Cap. 10) discute la relación entre las propiedades de *proyección* y *asignación*, las posibles definiciones de *composición de relaciones binarias*, las consecuentes *definiciones de función* y la relación de todo ello con nuestro *lenguaje natural*. Si $R \circ S$ se define como $(\forall a, b \in C)(a(R \circ S)b \leftrightarrow (\exists c \in C)(aSc \wedge cRb)$ —en desacuerdo con nuestro lenguaje natural (sea por ejemplo R «ser hermano de» y S «ser padre de», queriendo $R \circ S$ expresar la relación «ser tío de», que en nuestro lenguaje natural significa «ser hermano del padre de»)—, entonces, para funciones, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ —de acuerdo con nuestra intuición matemática—; sin embargo, si $R \circ S$ se define como $(\forall a, b \in C)(a(R \circ S)b \leftrightarrow (\exists c \in C)(aRc \wedge cSb)$ —de acuerdo con nuestro lenguaje natural—, entonces, para funciones, $(f \circ g)(x) = g(f(x))$ —en contra de nuestra intuición matemática. Esperando que haya interesado al lector esta pequeña reseña se le remite al mencionado capítulo 10 de [240].

Propiedades de una relación binaria		
Reflexiva	(R)	$(\forall a \in C)(aRa)$
Irreflexiva	(I)	$(\forall a \in C)(a\neg Ra)$
Simétrica	(S)	$(\forall a, b \in C)(aRb \to bRa)$
Asimétrica	(A)	$(\forall a, b \in C)(aRb \to b\neg Ra)$
Antisimétrica	(An)	$(\forall a, b \in C)(aRb \wedge bRa \to a \approx b)$
Transitiva	(T)	$(\forall a, b, c \in C)(aRb \wedge bRc \to aRc)$
Idempotencia	(Id)	$(\forall a, b, c \in C)(aRb \wedge bRc \longleftrightarrow aRc)$
Negativamente transitiva	(nT)	$(\forall a, b, c \in C)(a\neg Rb \wedge b\neg Rc \to a\neg Rc)$
Serial	(Se)	$(\forall a \in C)(\exists b \in C)(aRb)$
Dirección	(Di)	$(\forall a, b \in C)(\exists c \in C)(cRa \wedge cRb)$
Contradirección	(Cdi)	$(\forall a, b \in C)(\exists c \in C)(aRc \wedge bRc)$
Euclidea	(E)	$(\forall a, b, c \in C)(aRb \wedge aRc \to bRc)$
Proyección[1]	(F)	$(\forall a, b, c \in C)(aRb \wedge aRc \to b \approx c)$
Proyección C^C	(Fc)	$(\forall a \in C)(\exists! b \in C)(aRb)$
Asignación	(As)	$(\forall a, b, c \in C)(bRa \wedge cRa \to b \approx c)$
Débilmente densa	(D)	$(\forall a, b \in C)(aRb \to (\exists c \in C)(aRc \wedge cRb))$
Débilmente dirigida	(Dd)	$(\forall a, b, c \in C)(aRb \wedge aRc \to (\exists d \in C)(bRd \wedge cRd))$
Completitud débil	(Cd)	$(\forall a, b, c \in C)(aRb \wedge aRc \to bRc \vee cRb \vee b \approx c)$
Completitud	(C)	$(\forall a, b \in C)(a \not\approx b \to aRb \vee bRa)$
Completitud fuerte	(Cf)	$(\forall a, b \in C)(aRb \vee bRa)$
Relación de Ferrers	(Fe)	$(\forall a, b, c, d \in C)(aRb \wedge cRd \to aRd \vee cRb)$
Semi-transitiva	(St)	$(\forall a, b, c \in C)(aRb \wedge bRc \to (\exists d \in C)(aRd \vee dRc))$
Trivialidad	(Tr)	$(\forall a, b \in C)(aRb)$
Vacuidad	(V)	$(\forall a, b \in C)(a\neg Rb)$

Tabla 3.1: *Propiedades frecuentemente satisfechas por una relación binaria R definida sobre un conjunto no vacío C.*

Si R es una relación binaria definida en un conjunto no vacío C, entonces:

* Si R es reflexiva, entonces R es serial.
* Si R es reflexiva, entonces R es euclidea si y sólo si R es simétrica y transitiva.
* Si R es reflexiva y euclidea, entonces R es simétrica.
* Si R es reflexiva y euclidea, entonces R es simétrica y transitiva.
* Si R es irreflexiva, transitiva y fuertemente completa, entonces R es negativamente transitiva.
* Si R es simétrica y transitiva, entonces R es euclidea.
* Si R es simétrica, transitiva y serial, entonces R es reflexiva.
* Si R es simétrica y euclidea, entonces R es transitiva.
* Si R es asimétrica, entonces R es irreflexiva y antisimétrica.
* Si R es asimétrica y negativamente transitiva, entonces R es transitiva.
* Si R es transitiva, entonces ser R asimétrica equivale a ser R irreflexiva.
* Si R es una proyección, entonces R^{-1} (la inversa o dual de R) es una asignación, y viceversa.
* Si R es fuertemente completa, entonces R es reflexiva y completa.

3.2 Órdenes

«Otto Neugebauer le refirió al autor la siguiente leyenda acerca de Einstein. Parece ser que Einstein fue un niño tardo en hablar, lo cual, naturalmente, tenía preocupados a sus padres. Finalmente, un día, durante la cena, rompió a hablar, con la siguiente frase: "Die Suppe ist zu heiss" (La sopa está demasiado caliente). Sus padres se sintieron muy aliviados, pero enseguida le preguntaron por qué no había hablado hasta entonces. He aquí su respuesta: "Bisher war Alles in Ordnung" (Hasta ahora todo estuvo en orden).»
—Philip J. Davis y Reuben Hersh [67] (p. 132)

Un conjunto C, no vacío, entre alguno de cuyos pares de elementos se de una relación binaria que sea *asimétrica* y *transitiva*, y en la que haya efectivamente pares de elementos *incomparables* —$(\exists a, b \in C)(a \not\prec$

$b \wedge b \not\preceq a)$—, es una estructura de **orden parcial** —*cfr.* GALINDO [266] (p. 58).

Notamos mediante $\langle a, b\rangle$ el **par ordenado**[2] de componentes a y b. Se satisface que:

$$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(\forall t)\,(\langle x, y\rangle = \langle z, t\rangle \leftrightarrow x = z \wedge y = t) \tag{3.1}$$

La noción de n-**tupla ordenada** ($n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$) generaliza el concepto de par ordenado. La 3-tupla o **terna ordenada**:

$$\langle x_1, x_2, x_3\rangle = \langle\langle x_1, x_2\rangle\,, x_3\rangle \tag{3.2}$$

la 4-tupla o **cuaterna ordenada**:

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle = \langle\langle x_1, x_2, x_3\rangle\,, x_4\rangle \tag{3.3}$$

y en general, siendo $m \in \mathbb{N} \wedge m \geq 2$:

$$\langle x_1, x_2, \ldots\,, x_m\rangle = \langle\langle x_1, x_2, \ldots\,, x_{m-1}\rangle\,, x_m\rangle \tag{3.4}$$

si bien hemos leído a autores que usan nombres más musicales, pero quizás también más plásticos, como cuarteto o cuarteta, quinteto y sexteto.

Como quiera que ser asimétrica una relación transitiva, equivale a ser *irreflexiva*, también podemos definir un orden parcial en C, como toda relación irreflexiva y transitiva en C.

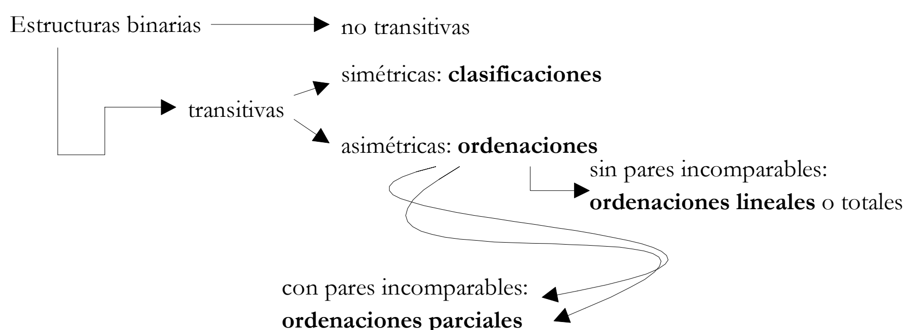


Figura 3.1: *Principales estructuras binarias. En un principio, la reflexividad carece de importancia (ver texto). Quizás el lector observe que las flechas desde ordenaciones a ordenaciones parciales se cruzan dos veces. Con ello queremos plasmar gráficamente la existencia de* **pares incomparables**. *Lo único que ha de hacerse es contemplar cada flecha como un orden lineal.*

En principio, el ser reflexiva —$(\forall a \in C)(a \preceq a)$—, o no serlo, carece de importancia —*cfr.* Fig. 3.1—. No obstante, como sentencia Karl MENGER en la primera página de *Kurventheorie* [268]: «lo que afirma la intuición no debe negarlo el concepto» y «lo que niega la intuición no debe afirmarlo el concepto», y hay múltiples ejemplos en los que la necesidad de la reflexividad es patente.

Uno clásico es la ordenación cronológica de los puntos de un recorrido cíclico, donde cada punto es precedido en el tiempo por él mismo: por ejemplo, las 17 horas de hoy preceden a las 17 horas de mañana (pero no deja de ser el mismo número, 17). Otro proviene de nuestra intuición de semejanza: lo muy semejante ha de ser muy poco diferente. Esto significa la tendencia a la reflexividad en el límite hacia la semejanza máxima.

La simetría parece la base de cualquier relación precisa de clasificación: dados dos objetos A y B, si A se clasifica en la misma clase que B, parece lógico que B se clasifique en la misma clase que A. La transitividad, añadida, implica que estas clases sean disjuntas. Las relaciones reflexivas de *clasificación*, esto es, las relaciones transitivas, simétricas y reflexivas, son conocidas como **equivalencias**[3] —*cfr.* Fig. 3.1.

[2] Kacimir KURATOWSKI lo definió, en 1921, como la clase $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, de manera que todo par ordenado es un conjunto no vacío que posee, a lo sumo, dos elementos —*cfr.* ALONSO, BORREGO, PÉREZ y RUIZ [267] (p. 21).

[3] De nuevo, piense el lector en la no importancia de la reflexividad, al menos sin completitud o serialidad. Observe, por ejemplo, el siguiente razonamiento erróneo: «Sea R una relación simétrica y transitiva en A. Sean $x, y \in A$ tales que xRy. De la simetría de R se deduce que yRx. Luego, $xRy \wedge yRx$. De la transitividad de R resulta que xRx. Por tanto, la relación R es reflexiva en A.» —*cfr.* ALONSO, BORREGO, PÉREZ y RUIZ [267] (p. 36).

Por cierto, a las relaciones simétricas y reflexivas, a veces, se les llama relaciones de **tolerancia** (en ellas, al no exigir que sean transitivas, se permite que un elemento sea clasificado en más de una clase). Una relación de **indiscernibilidad** es una relación de tolerancia, que además sea una equivalencia.

Es usual[4] utilizar el adjetivo «*estricto*» para un orden e impedir su reflexividad. Se denota por el símbolo $\prec$. A la par, han surgido nombres como *preorden* o *casi orden* para la estructura que verifica la reflexividad y la transitividad (aunque dada la poca significación de la reflexividad, puede parecer pecar de ampulosa).

Si $P = (C, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.), y definimos $a \succeq b$ como equivalente a $b \preceq a$, esta relación es un orden y al c.p.o. que surge se le llama **dual** de P. Una aplicación f del c.p.o. $(C, \preceq)$ en el c.p.o. $(C', \preceq')$ se denomina —*cfr.* Skorniakov [270] (p. 424)— *isótona* u **homomorfismo de orden** (resp., antiisótona o antihomomorfismo de orden) si $\forall a, b \in C$, $a \preceq b$ implica $f(a) \preceq f(b)$ (resp., $f(b) \preceq f(a)$). Si el *(anti)homomorfismo* es biyectivo se denomina *(anti)isomorfismo*.

La Tabla 3.2 muestra los nombres de tipos de ordenaciones más usuales en Teoría de la Decisión —*cfr. v. gr.* Fishburn [271]; Roubens y Vincke [272].

Relación\Propiedad	**R**	**I**	**S**	**A**	**An**	**T**	**nT**	**C**	**Cf**	**Fe**	**St**
Preorden parcial (casi orden)	✓					✓					
Preorden (orden débil)						✓			✓		
Preorden estricto				✓			✓				
Orden parcial	✓				✓	✓					
Orden parcial estricto				✓		✓					
Orden lineal					✓	✓			✓		
Orden lineal estricto				✓		✓		✓			
Orden de intervalos									✓	✓	
Orden estricto de intervalos		✓								✓	
Semiorden									✓	✓	✓
Semiorden estricto		✓								✓	✓

Tabla 3.2: *Diferentes nombres de ordenaciones, según las propiedades que satisfagan. El significado de las abreviaturas de los nombres de las propiedades puede consultarse en la Tabla 1.1. Puede que otros autores definan estas relaciones atendiendo a otras propiedades, debido a equivalencias entre ellas. Por ejemplo, como toda relación transitiva es asimétrica si y sólo si es irreflexiva, también podemos definir un orden parcial estricto en un conjunto, como una relación irreflexiva y transitiva en él. Se conoce mucho sobre todas estas relaciones. Por ejemplo: si $\precsim$ es un preorden lineal, entonces, $\prec$ es un preorden y $\approx$ es una equivalencia; si $\precsim$ es un orden lineal, entonces, $\prec$ es un orden lineal estricto; si $\precsim$ es un orden de intervalos, entonces, $\prec$ es transitiva; etc.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

3.3 Retículos normados

«La norma, aun mostrándose como un grado del significado de verdad, tiene su medida de vida en el mundo.»
—Enzo Paci, *via* Carlos Alarcón Cabrera [273] (p. 57)

Un *álgebra* $(L; \sqcap, \sqcup)$, esto es, cualquier conjunto equipado con operaciones, se dice que es un **retículo**[5] precisamente si —*cfr.* Birkhoff [276]; Grätzer [277]: L es un conjunto no vacío, $\sqcap$ (*meet*) y $\sqcup$ (*join*) son operaciones binarias en L, ambas conmutativas y asociativas, satisfaciendo las dos identidades de absorción ($x \sqcap (x \sqcup y) = x$ y $x \sqcup (x \sqcap y) = x$). Esta definición equivale a ser $(L, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado, donde $x \preceq y \iff x \sqcap y = x$ (recíprocamente, dado un conjunto parcialmente ordenado $(L, \preceq)$, si se define $x \sqcap y = \inf\{x, y\}$ y $x \sqcup y = \sup\{x, y\}$, el álgebra $(L; \sqcap, \sqcup)$ es un retículo). Una definición concisa pues, es la siguiente: un conjunto ordenado parcialmente $(L, \preceq)$ es un retículo precisamente si todo subconjunto formado por dos elementos tiene ínfimo y supremo en L.

[4] Puede leerse la opinión crítica de M^{a}Purificación Galindo al baturrillo de nombres existente en torno a las estructuras binarias en su trabajo de grado de licenciatura [266] (cap. 3). También puede verse la obra del profesor Norberto Cuesta Dutari [269].

[5] Jean Desanti [274] —*via* Jesús Ibáñez (Coord.) [275] (p. 96)— apunta el uso de otras denominaciones en la literatura: *rejilla*, *enrejado* (*treillis*), *estructuras* (Ore y Glivenko) y *Systeme von Dingen* (Menger). También, aunque antes con mayor frecuencia, aparece traducido como «laticia» (del inglés *lattice*).

Un *espacio vectorial (real) ordenado* —*cfr.* VÚLIJ [278] (p. 310)— es un espacio vectorial real V con una relación de orden $\preceq$ compatible con la estructura de espacio vectorial, es decir, tal que $x \preceq y$ implica $x+z \preceq y+z$ para todo $x, y, z \in V$, y si $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda x \preceq \lambda y$, para todo $x, y \in V$. El conjunto $V^+ = \{x \in V : 0 \prec x\}$ se conoce habitualmente como el *cono positivo* de V mientras que al conjunto $V_0^+ = \{x \in V : 0 \preceq x\}$ suele llamársele *cono no negativo*. Un espacio vectorial ordenado es *arquimediano* si para todo $x \in V^+, y \in V_0^+$, tales que $0 \prec x \prec y$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $y \preceq \lambda x$.

Un **retículo vectorial** —*cfr.* VÚLIJ [278] (p. 311)— es un espacio vectorial ordenado $(V, \preceq)$ tal que la estructura reticular está definida por la relación de orden $\preceq$. Todo elemento x tiene una parte positiva $x_+ = x \sqcup 0$ y una parte negativa $x_- = (-x) \sqcup 0$. La diferencia se conoce como *módulo* de x: $|x| = x_+ + x_-$. Se dice que x e y son *disjuntos* si $|x| \sqcap |y| = 0$. El elemento positivo e es una *identidad débil* si 0 es el único elemento disjunto con e. Si este elemento es tal que para todo $x \in V$, existe $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $|x| \leq \lambda e$, entonces se dice que e es una *identidad fuerte*. Si un retículo vectorial posee una identidad fuerte se le denomina *retículo vectorial de elementos acotados*.

Un *espacio vectorial (real) normado* es cualquier espacio vectorial (real) V en el que se considere una norma. Un **retículo normado** es cualquier retículo vectorial $(V, \preceq)$ con V un espacio vectorial normado. Cualquier retículo vectorial arquimediano $(V, \preceq)$ que posea una identidad fuerte e, y en el que se considere la norma $\|x\| = \min\{\lambda : |x| \leq \lambda e\}$, es un retículo normado —*cfr.* VÚLIJ [278] (p. 312)—. Como es bien sabido, esta norma induce la métrica $d_{\|\|}(x, y) = \|x - y\|$.

La definición de subconjuntos completos en retículos normados es más fuerte que la correspondiente en retículos ordinarios. Decimos que $A \in \mathfrak{P}(V)$ (conjunto potencia de V) es un **subconjunto completo** del retículo normado $(V, \preceq)$ si tiene un ínfimo y un supremo en la clausura de A, respecto de la topología inducida por la métrica $d_{\|\|}$. Si el retículo no es normado, exigimos que posea un ínfimo y un supremo como elementos suyos (esto es, que posea un elemento minimal y un elemento maximal). Si todos los subconjuntos de un retículo ordinario son completos se dice que tenemos un *retículo completo* —*cfr.* GRÄTZER [277]—. Por ejemplo, $(\mathfrak{P}(\mathcal{U}), \subseteq)$ es un retículo completo —*cfr.* HINRICHSEN y FERNÁNDEZ MUÑIZ [279] (p. 474)—. Denotamos mediante $\mathfrak{C}(L)$ la colección de todos los subconjuntos completos de un retículo $(L, \preceq)$.

Un *espacio de* BANACH es cualquier espacio vectorial normado completo (completo con respecto a la métrica inducida[6]). Todo espacio normado puede ser completado a un espacio de BANACH. Un *retículo de* BANACH es cualquier retículo vectorial $(V, \preceq)$ con V un espacio de BANACH, en el que se satisface la ley de monotonía, a saber, para todo $x, y \in V$, si $|x| \leq |y|$ entonces $\|x\| \leq \|y\|$.

3.4 Intervalos

«Hay que saber dudar de lo que es preciso, someterse a lo que es preciso, creer en lo que es preciso.»
—Blaise PASCAL <Pensamientos>

Por motivos de simplicidad y conveniencia, dado un subconjunto completo A de un retículo $(L, \preceq)$, denotamos:

$$a_0 \quad =: \quad \inf A \tag{3.5}$$
$$a_1 \quad =: \quad \sup A \tag{3.6}$$

Dado un retículo $(L, \preceq)$, si un subconjunto completo A está totalmente ordenado, decimos que es un **intervalo**[7] de extremos a_0 y a_1, y lo notamos $\langle a_0, a_1 \rangle$.

Dado un intervalo $A = \langle a_0, a_1 \rangle$, distinguimos las siguientes situaciones: decimos que es un *intervalo abierto* si $a_0, a_1 \notin A$, *abierto hacia la izquierda* si $a_0 \notin A$, *abierto hacia la derecha* si $a_1 \notin A$, *cerrado* si $a_0, a_1 \in A$, *cerrado por la izquierda* si $a_0 \in A$, *cerrado por la derecha* si $a_1 \in A$. Notamos estas situaciones mediante (a_0, a_1), $(a_0, a_1\rangle$, $\langle a_0, a_1)$, $[a_0, a_1]$, $[a_0, a_1\rangle$ y $\langle a_0, a_1]$, respectivamente. También usaremos las notaciones (a), $(a\rangle$, $\langle a)$, $[a]$, $[a\rangle$ y $\langle a]$, para las situaciones anteriores, así como $\langle a \rangle$ para la situación genérica $\langle a_0, a_1 \rangle$. Si $(V, \preceq)$ es un retículo

---

[6] Sea $\mathfrak{M} = (X, \mathcal{M})$ un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\} \subseteq X$ se dice que es una **sucesión fundamental o de Cauchy**, si verifica el criterio de CAUCHY, esto es, precisamente si, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tal que para todos $n, n' > n_\varepsilon$, $\mathcal{M}(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$. Se dice que $\mathfrak{M}$ es un **espacio métrico completo** si toda sucesión de CAUCHY en $\mathfrak{M}$ converge a un punto de $\mathfrak{M}$. En caso contrario, se dirá que $\mathfrak{M}$ es *incompleto*.

[7] En un c.p.o. $(C, \preceq)$, se definen el **cono inferior** y el **cono superior** de un subconjunto A de C como $A^\triangledown = \{x \in C : \forall a \in A, x \preceq a\}$ y $A^\vartriangle = \{x \in C : \forall a \in A, a \preceq x\}$, respectivamente —*cfr.* SKORNIAKOV [270] (p. 424)—. De este modo, por ejemplo, para cualesquiera $a, b \in C$, tales que $a \preceq b$, el **intervalo cerrado** de extremos a y b se define como $[a, b] = \{a\}^\vartriangle \cap \{b\}^\triangledown$.

vectorial, decimos que un intervalo cerrado A es un *segmento* precisamente si $A = \{\lambda a_0 + (1-\lambda)a_1 : 0 \leq \lambda \leq 1\}$. La notación específica más frecuente es[8] $A = [\![a_0, a_1]\!]$.

Dado un c.p.o. $P = (C, \preceq)$, se dice que $A \subseteq C$ es un *subconjunto* **convexo** precisamente si A incluye a todos los intervalos cerrados de extremos puntos de A, esto es, si $a_0, a_1 \in A$ y $a_0 \preceq a_1$, entonces $[a_0, a_1] \subseteq A$. Si el c.p.o. es un retículo vectorial $(V, \preceq)$, entonces se dice que $A \subseteq V$ es un *subconjunto convexo* precisamente si A incluye a todos los segmentos de extremos puntos de A. Denotamos el conjunto de todos los convexos de P mediante $Co(P)$. Birkhoff y Bennett [280] demuestran que el conjunto de convexos de $P = (V, \preceq)$ es isomorfo al conjunto de convexos de $P^* = (V, \preceq^*)$, donde $\preceq^*$ es el dual de $\preceq$. Decimos que $A \subseteq L$ es un *subconjunto* **denso** del retículo $(L, \preceq)$ precisamente si cualquier intervalo abierto (a_0, a_1) de A es no vacío ($a_0, a_1 \in A$ y $a_0 \prec a_1$). Nótese que todo subconjunto convexo es denso (el recíproco no tiene por qué ser cierto).

De manera alternativa, se dice que un subconjunto A de B, es denso en B, si B es un subconjunto de la adherencia de A. Un subconjunto de $\mathcal{U}$, se dice que es: **fronterizo**, precisamente si su complemento es denso en $\mathcal{U}$, o de manera equivalente, si su interior es vacío, o si es un subconjunto de su frontera —*cfr.* Wysocki y Darmochwal [281]; **denso en ninguna parte** (*nowhere dense*), precisamente si su clausura es un conjunto fronterizo; por ejemplo, cualquier subconjunto finito es denso en ninguna parte[9]. Por otro lado, como los puntos aislados son abiertos de la topología, entonces, ningún conjunto que sea denso en ninguna parte puede contener puntos aislados —*cfr.* Wysocki y Darmochwal [281]; **denso en alguna parte** (*somewhere dense*), precisamente si su clausura tiene interior no vacío —*cfr.* Feldman y Bourdon [282]; **denso en todas partes** (*everywhere dense*), precisamente si su interior es un subconjunto denso en $\mathcal{U}$ —*cfr.* Karno [283]; **discreto** si todo punto es aislado —es decir, si $\forall x \in A, \exists O$ abierto tal que $O \cap A = \{x\}$—; hay espacios que no tienen puntos aislados, en los que los conjuntos densos en ninguna parte son discretos. (ejemplo 2.2.1 de la tesis de Paul Cairns [284]); ***crowded***, si no tiene puntos aislados (término introducido por Van Douwen) (denso en sí mismo y perfecto —siempre que sea también cerrado— son también términos con igual significado) —*cfr.* Van Douwen [285]; Cairns [284].

Si $(L, \preceq)$ es un retículo, denotamos mediante $\mathbb{I}L$ la colección de todos los intervalos densos de $(L, \preceq)$. Si $(V, \preceq)$ es un retículo vectorial, denotamos mediante $\mathbb{I}V$ la colección de todos los intervalos convexos de $(V, \preceq)$. Nótese pues que los intervalos cerrados de estas colecciones son conjuntos perfectos en el sentido topológico[10].

Sea $(V, \preceq)$ un retículo normado. Para todo intervalo $A = \langle a_0, a_1 \rangle \in \mathbb{I}V$, se define su anchura o **extensión** $\epsilon(A) = d_{\|\|}(a_0, a_1)$. Puede hablarse entonces de *punto medio* del intervalo $\langle a_0, a_1 \rangle$, es decir aquel punto $\mathrm{m}(a_0, a_1)$ tal que $d_{\|\|}(a_0, \mathrm{m}(a_0, a_1)) = d_{\|\|}(\mathrm{m}(a_0, a_1), a_1)$. Notamos por $a_{1/2}$ a tal punto. De igual forma es posible distribuir equidistantemente (según $d_{\|\|}$) un número finito de puntos en el intervalo $\langle a_0, a_1 \rangle$.

Debemos comentar algo sobre nuestra propuesta de notación. En primer lugar, la notación con los subíndices 0 y 1 que proponemos, para identificar los extremos, no trata de ser un estándar, sino mas bien todo lo contrario, es una notación *ad hoc*, por conveniente, para la resolución, basada en α-percentilado, del problema de la medición de disimilitud entre intervalos convexos en un retículo vectorial (por ejemplo, entre intervalos de números reales). Observe el lector, lo coherente que parece notar, entonces, por $a_{1/2}$, al punto medio entre a_0 y a_1. Existen otras notaciones para los extremos de los intervalos, por ejemplo, a^-, a^+ —*cfr.* Markov [286]; Tupper [287]—, $\underline{a}, \overline{a}$ —*cfr.* Kearfott [288]; Duff [289]—, $a.lo, a.hi$ —*cfr.* Comba y Stolfi [290]—. Obsérvese, por otro lado, que la notación $\overline{a}$ es habitual en Estadística para notar la media aritmética y mediante a_+ ó a^+ suele denotarse en Teoría de Retículos el máximo: $\max(a, 0)$.

Nuestra notación con paréntesis angulares, extiende la propuesta por Hickey, Ju y Van Emden [291] (p. 1046), pues ellos usan $\langle a, b \rangle$ para denotar en lo genérico un intervalo acotado y también uno no acotado, de manera que $\langle a, b \rangle$ siempre denota un conjunto de números reales, o sea, que un extremo pertenece a $\langle a, b \rangle$ precisamente si es un número real. Destaquemos que nuestra notación con paréntesis angulares incluye la posibilidad de intervalos de la recta real extendida; queremos decir que, $\langle -\infty, +\infty \rangle$ puede interpretarse de cuatro formas: como el subconjunto de números reales $(-\infty, +\infty)$, o como un subconjunto de números reales extendidos, pudiendo ser: $(-\infty, +\infty]$, $[-\infty, +\infty)$ ó $[-\infty, +\infty]$. Todo ello, como decimos, extiende la propuesta de Hickey, Ju y Van Emden [291], y también la de los «intervalos de números reales extendidos» —*cfr.* Walster [292]; Walster y Hansen [293]—, pues estos últimos son cerrados, por definición: $[a, b]$ denota un conjunto de números reales extendidos al que siempre pertenecen los extremos a y b.

Finalmente, comentar que, como dijimos en §3.2, usamos también los paréntesis angulares para notar los pares ordenados $\langle a, b \rangle$ y las n-tuplas ordenadas $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ —*cfr.* Ecs. 3.1-3.4— No habrá lugar a confusión,

[8] En un sistema formal lógico, si p es una fórmula bien formada, $[\![p]\!]$ denota habitualmente su significado. Aunque en estas páginas, también ocurrirá así, no habrá lugar a confusión.

[9] De hecho, por ejemplo, cualquier sucesión de números reales, convergente en la recta real euclidea, sigue siendo un conjunto denso en ninguna parte. Aún más, también el caso de sucesiones de números reales con varios puntos de aglomeración.

[10] O sea, cerrados y densos en sí mismos (sin puntos aislados, esto es, conjuntos iguales a sus conjuntos derivados).

pues el contexto marcará la diferencia.

3.5 Aritmética de intervalos

«Yo sé por qué no se sigue el justo medio: el hombre inteligente va más allá, el imbécil se queda acá.»
—Confucio <Conversaciones>

Considere el lector, que si se pretende que una máquina le ayude, y debido a la aritmética de punto flotante, cualquier número real es, en realidad, un intervalo, de extremos inferior y superior, las aproximaciones racionales inferior $\triangledown x$ y superior $\triangle x$, respectivamente, del número real:

$$x \leftrightsquigarrow [\triangledown x, \triangle x] \tag{3.7}$$

extendidas a un número preestablecido de dígitos decimales significativos; por ejemplo, si n es el número de dígitos decimales significativos, entonces: $\triangle x = \triangledown x + 10^{-n}$. Es decir, en vez de aproximar un número real x por un número de máquina, se aproxima x por un intervalo $[x]$, cuyos extremos inferior y superior son números de máquina.

Por lo general, pocos consideran trabajar con $[\triangledown x, \triangle x]$. En vez de ello, suelen escoger una de las aproximaciones racionales (redondeo «a la baja», si $\triangledown x$, y redondeo «al alza», si $\triangle x$, los llaman).

Sólamente consideramos intervalos cerrados de números reales. El lector interesado en otros casos puede consultar, por ejemplo, los trabajos de Walster [292], Walster y Hansen [293], y de Hickey, Ju y Van Emden [291], así como la discusión que haremos en §6.4.

Denotamos un intervalo $[a_0, a_1] = \{x \in \mathbb{R} : a_0 \leq x \leq a_1\}$ simplemente por $[a]$. Dado $D \subseteq \mathbb{R}^m$, denotamos por $\mathbb{I}^n D$ el conjunto de todos los intervalos incluidos en D, o sea, $\mathbb{I}^n D = \{[x] : [x] \in \mathbb{I}^n V \wedge [x] \subseteq D\}$. Por ejemplo, $\mathbb{IR}$ denota el conjunto de todos los intervalos de números reales. Dados $[a], [b] \in \mathbb{IR}$, $[a]$ está *incluido* en $[b]$ precisamente si $b_0 \leq a_0$ y $a_1 \leq b_1$. Sean $Z = \{A \in \mathbb{IR} : a_0 \leq 0 \leq a_1\}$, $Z^* = \{A \in \mathbb{IR} : a_0 < 0 < a_1\}$, $\mathbb{IR}^* = \mathbb{IR} \backslash Z^*$. Se define una función *signo* $s : \mathbb{IR}^* \to \{0, 1\}$ como $s(A) = \{1, \text{ si } 0 \leq a_0;\ 0, \text{ si } a_1 \leq 0\}$, si $A \in \mathbb{IR}^* \backslash \{0\}$, y $s([0, 0]) = s(0) = 1$. Los intervalos de Z^* no tienen signo.

Sunaga [294] y Moore [295, 296] extienden de manera natural a intervalos, las *operaciones elementales de la aritmética* $+$, $-$, $\times$, $/$. Para cualesquiera $[a], [b] \in \mathbb{IR}$:

$$[a] * [b] = \{x * y : x \in [a] \wedge y \in [b]\} \tag{3.8}$$

donde $* \in \{+, -, \times, /\}$, y suponiendo que $[b] \in \mathbb{IR} \backslash Z$, si $*$ es la división.

Las siguientes expresiones son válidas, $\forall [a], [b] \in \mathbb{IR}$:

$$[a] + [b] = [a_0 + b_0, a_1 + b_1] \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}[a] \times [b] = {} & [a_{\neg s(B)} b_{\neg s(A)}, a_{s(B)} b_{s(A)}] \chi_{[a],[b] \in \mathbb{IR}^*} \\ & + [a_{s(A)} b_{\neg s(A)}, a_{s(A)} b_{s(A)}] \chi_{[a] \in \mathbb{IR}^* \wedge [b] \in Z^*} \\ & + [a_{\neg s(B)} b_{s(B)}, a_{s(B)} b_{s(B)}] \chi_{[a] \in Z^* \wedge [b] \in \mathbb{IR}^*} \\ & + [\min\{a_0 b_1, a_1 b_0\}, \max\{a_0 b_0, a_1 b_1\}] \chi_{[a],[b] \in Z^*}\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$1/[b] = [1/b_1, 1/b_0], \ \forall [b] \in \mathbb{IR} \backslash Z \tag{3.11}$$

El producto puede definirse, para cualesquiera $[a], [b] \in \mathbb{IR}$, como:

$$[a] \times [b] = [\min\{a_0 b_0, a_0 b_1, a_1 b_0, a_1 b_1\}, \max\{a_0 b_0, a_0 b_1, a_1 b_0, a_1 b_1\}] \tag{3.12}$$

Si $[a]$ es un intervalo degenerado, o sea, si $[a] = [a, a] = \{a\}$, entonces (3.10) queda:

$$\{a\} \times [b] = [a b_{\neg s(A)}, a b_{s(A)}] \tag{3.13}$$

Para $a = -1$ se obtiene el operador negación:

$$-[b] = [-b_1, -b_0] \tag{3.14}$$

Por (3.9), la operación $-$, se define, para cualesquiera $\forall [a], [b] \in \mathbb{IR}$:

$$\begin{aligned}[a] - [b] &= [a] + (-[b]) \\ &= [a_0 - b_1, a_1 - b_0]\end{aligned} \tag{3.15}$$

y el cociente de intervalos, como:

$$\begin{aligned} [a]/[b] &= [a] \times (1/[b]) \\ &= [a_{\neg s([b])}/b_{s([a])}, a_{s([b])}/b_{\neg s([a])}]\chi_{[a]\in\mathbb{IR}^*\wedge[b]\in\mathbb{IR}\setminus Z} \\ &\quad +[a_{\neg s([b])}/b_{\neg s([b])}, a_{s([b])}/b_{\neg s([b])}]\chi_{[a]\in Z^*\wedge[b]\in\mathbb{IR}\setminus Z} \end{aligned} \tag{3.16}$$

A partir de (3.11) y (3.12) resulta inmediata la definición del cociente de $[a]$ entre $[b]$, dado que $0 \notin [b]$:

$$\begin{aligned} [a]/[b] &= [a] \times (1/[b]) \\ &= [\min\{a_0/b_0, a_0/b_1, a_1/b_0, a_1/b_1\}, \max\{a_0/b_0, a_0/b_1, a_1/b_0, a_1/b_1\}] \end{aligned} \tag{3.17}$$

Puede verse una discusión de las ventajas e inconvenientes de varias definiciones del cociente, propuestas en la literatura, en el artículo de Dietmar Ratz [297].

Diversos autores —*cfr.* Moore [295]; Ratschek [298, 299]; Sunaga [294]— han estudiado las propiedades algebraicas de $(\mathbb{IR}, +, \times, /, \subseteq)$. Las álgebras $(\mathbb{IR}, +)$ y $(\mathbb{IR}^*, \times)$ son semigrupos abelianos. Obsérvese que no son grupos ya que, en general, no existen los inversos.

Svetoslav M. Markov [300, 301, 302, 303] propone otras definiciones para la diferencia y la división, de manera que sí existen los inversos:

$$[a] - [b] = [\min\{a_0 - b_0, a_1 - b_1\}, \max\{a_0 - b_0, a_1 - b_1\}] \tag{3.18}$$

$$[a]/[b] = \begin{cases} [\min\{a_0/b_0, a_1/b_1\}, \max\{a_0/b_0, a_1/b_1\}] & 0 \notin [a] \cup [b] \\ [a]\frac{1}{b_1} & 0 \in [a]\setminus[b] \end{cases} \tag{3.19}$$

De este modo, $[a] - [a] = 0$ y $[a]/[a] = 1$ si $0 \notin [a]$.

Kahan [304] extiende la aritmética de Moore, incluyendo intervalos con extremos infinitos —*cfr.* Ratschek y Rokne [305].

El tratamiento de los **intervalos de tipo 2**, lo encontramos en Bauch [306], quien los denomina **intervalos de tolerancia** (T-intervalos), y los emplea para calcular simultáneamente aproximaciones interiores y exteriores en problemas de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias.

Notemos[11]:

$$\begin{aligned} [[a]] &= [[a]_0, [a]_1] \\ &= [[a_{00}, a_{01}], [a_{10}, a_{11}]] \end{aligned}$$

Bauch define así las operaciones entre ellos:

$$\begin{aligned} [[a]] + [[b]] &= [[a]_0 + [b]_0, [a]_1 + [b]_1] \\ &= [[a_{00} + b_{00}, a_{01} + b_{01}], [a_{10} + b_{10}, a_{11} + b_{11}]] \\ [[a]] - [[b]] &= [[a]_0 - [b]_1, [a]_1 - [b]_0] \\ &= [[a_{00} - b_{11}, a_{01} - b_{10}], [a_{10} - b_{01}, a_{11} - b_{00}]] \\ [[a]] \times [[b]] &= \left[\min_{(i,j)\in P\{0,1\}}\{[a]_i \times [b]_j\}, \max_{(i,j)\in P\{0,1\}}\{[a]_i \times [b]_j\}\right] \\ 1/[[b]] &= [1/[b]_1, 1/[b]_0], \text{ siempre que } [b]_0, [b]_1 \in \mathbb{IR}\setminus Z \end{aligned}$$

siendo:

$$[a]_i \times [b]_j = \min_{(r,s)\in P\{0,1\}}\{a_{ir}b_{js}\}$$

Otra propuesta reciente es la aritmética de Acioly [307, 308], similar a la de Sunaga y Moore; sin embargo, uno de los fines de Acioly es integrar varios conceptos aproximativos en un entorno topológico. Pero la métrica propuesta por Moore genera un espacio topológico de Hausdorff, subyaciendo la idea de separar puntos, y no la de aproximar. El concepto de monotonía respecto de la inclusión, ampliamente usado en algoritmos de intervalos, o la idea de que dados dos intervalos que contienen a un mismo número real, el mejor será el de menor amplitud, son ejemplos de conceptos aproximativos. Para todo esto, Acioly usa la topología de Scott —*cfr.* Smyth [309].

Para saber más, un buen punto de partida puede ser: `http://www.cs.utep.edu/interval-comp/main.html`

[11] La notación original de Bauch para un intervalo de tolerancia es $[\underline{X}, \overline{X}]$.

3.6 Funciones de inclusión: extensión de funciones de números a funciones de intervalos

«La tolerancia es la hija de la duda.»
—Erich María Remarque <Arco de Triunfo>

Definición 1 *Sea $f : A \to B$ una función parcial. Se dice que una función $F : \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(B)$ es una **extensión** de f **a los conjuntos**, precisamente si, para todo $C \subseteq A$:*

$$f\,(C \cap \mathrm{Dom}\, f) \subseteq {}_{\square}f(C) \tag{3.20}$$

Definición 2 *Sean $f : A \to B$ una función parcial y $\widehat{f} : \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(B)$, definida, para todo $C \subseteq A$, por:*

$$\widehat{f}(C) = \{f(x) : x \in C \cap \mathrm{Dom}\, f\} \tag{3.21}$$

*Se dice que $\widehat{f}$ es la **extensión canónica** (o natural) de f **a los conjuntos**.*

Proposición 3 *Sea $f : A \to B$ una función parcial. Entonces, $\widehat{f} : \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(B)$, definida como en (3.21), es la menor extensión de f a los conjuntos, en el sentido de que $\widehat{f}$ es una extensión de f a los conjuntos y si F es cualquier otra extensión de f a los conjuntos, entonces, para todo $C \subseteq A$:*

$$\widehat{f}(C) \subseteq F(C) \tag{3.22}$$

*Más aún, $\widehat{f}$ es **monótona**, esto es, para todo $X, Y \in \mathfrak{P}(A)$:*

$$X \subseteq Y \Longrightarrow \widehat{f}(X) \subseteq \widehat{f}(Y) \tag{3.23}$$

*y **total**, o sea:*

$$\mathrm{Dom}\, \widehat{f} = \mathfrak{P}(A) \tag{3.24}$$

El caso particular de los intervalos de números reales es el que nos interesa. Es tradición —a partir de Moore [295, 296]— denominar funciones de inclusión a las extensiones de funciones numéricas a intervalos.

Sean $n, m \in \mathbb{N}^+$, $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ y $J \in \mathbb{I}^n D$. Denotemos mediante $f(J)$ el conjunto imagen de J por f, es decir, $f(J) = \{y \in \mathbb{R}^n : (\exists x \in J)(f(x) = y)\}$.

Definición 4 *Dada $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, una **función de inclusión** para f —Moore [295, 296]—, es cualquier función ${}_{\square}f : \mathbb{I}^n D \to \mathbb{I}^n V$, tal que para todo $J \in \mathbb{I}^n D$:*

$$f(J) \subseteq {}_{\square}f(J) \tag{3.25}$$

Si f es una función monótona creciente, como por ejemplo, e^x, $\ln x$, o $\sqrt{x}$, una función de inclusión es:

$${}_{\square}f([a_0, a_1]) = [f(a_0), f(a_1)] \tag{3.26}$$

Si f es monótona decreciente, una función de inclusión es:

$${}_{\square}f([a_0, a_1]) = [f(a_1), f(a_0)] \tag{3.27}$$

El caso de funciones no monótonas no es difícil, siempre que conozcamos los intervalos de monotonía de la función. Por ejemplo:

$${}_{\square}\,|[a]| = [\max\{0, a_0^{\alpha}, -a_1^{\alpha}\}, \max\{|a_0^{\alpha}|, |a_1^{\alpha}|\}] \tag{3.28}$$

$${}_{\square}\,([a])^n = [a_0^n, a_1^n]\chi_{n=\dot{2}+1 \vee a_0 \geq 0} + [a_1^n, a_0^n]\chi_{n=\dot{2} \wedge a_1 \leq 0} + [0, (\max\{-a_0, a_1\})^n]\chi_{n=\dot{2} \wedge a_0 < 0 < a_1} \tag{3.29}$$

La extensión natural —*cfr.* Def. 2— a los intervalos de cualquier función real factorizable[12] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se obtiene reemplazando todas las ocurrencias de cada variable x_i con el correspondiente intervalo $[x_i]$, cada

[12] Una **función factorizable** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es aquella que puede representarse como un grafo acíclico dirigido, situando la función $f(x)$ en la raíz, las variables en las hojas y en los que los nodos no hoja representan la suma o el producto de subfunciones o la composición de una función de una variable con una subfunción de f. Nótese que la división también es representable, pues la inversa de f es una función de una variable.

subfunción u, de una variable, con su inclusión $_\square u$, y cada operación con la correspondiente operación entre intervalos. El modo en que están definidas estas últimas garantiza la obtención de una función de inclusión para f.

Por ejemplo:

$$\text{MAX}([a],[b]) = \frac{[a]+[b]+_\square|[a]-[b]|}{2} \tag{3.30}$$

Una función de inclusión $_\square f : \mathbb{I}^n D \to \mathbb{IR}$, para una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, se dice que es *monótona respecto de la inclusión* si:

$$[a] \subseteq [b] \Longrightarrow {_\square f}([a]) \subseteq {_\square f}([b]) \tag{3.31}$$

Usualmente, además de que sea f factorizable, se exige que sus funciones de inclusión sean monótonas respecto de la inclusión y computables eficientemente, ejemplo de las cuales pueden ser $\operatorname{sen} x$, $\ln x$ o x^2.

Además de la extensión natural, aparecen en la literatura con frecuencia, al menos otros dos métodos de hallar una función de inclusión —*cfr.* Mentzer [310]—. Siendo f de clase 1, la **extensión de valor medio**:

$$T_1([a]) = f(c) + G([a])([a]-c) \tag{3.32}$$

donde $c \in [a]$, y $G([a])$ es una función de inclusión para el vector gradiente $\bigtriangledown f$, y siendo f de clase 2, la **extensión mediante un polinomio de Taylor** (Brook) **de grado 2**:

$$T_2([a]) = f(c) + \bigtriangledown f(c)([a]-c) + \frac{1}{2}([a]-c)^T H([a])([a]-c) \tag{3.33}$$

siendo H una función de inclusión para la Hessiana.

3.7 Resumen

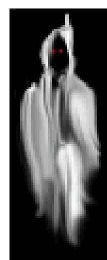
Debido a que a lo largo y ancho de nuestra Tesis hablaremos de clasificaciones y ordenaciones, porque serán básicas para nuestros actos de decisión o juicios por comparación, no está de más comenzar por recordar las propiedades, de más frecuente aparición, de las relaciones binarias —*cfr.* §3.1—. A renglón seguido, nos pareció oportuno centrarnos en los órdenes —*cfr.* §3.2—, debido principalmente a que las decisiones que tomemos en nuestros actos de elección, base de la discusión central de muchas de estas páginas, son decisiones de orden: podemos elegir un objeto entre varios, porque podemos ordenarlos de acuerdo a nuestras preferencias (diremos que conseguimos definir una estructura de preferencias en el conjunto de objetos).

A continuación, en §3.3, recordábamos una serie de nociones acerca de los retículos —estructuras que pueden ser vistas como conjuntos parcialmente ordenados con dos propiedades adicionales—, prestando una atención especial, a los retículos normados. Un motivo para este recuerdo, es que, aunque en un principio, nuestras discusiones parezcan asentarse sobre intervalos de números reales, la realidad es que lo hacen sobre intervalos en retículos normados —*cfr. v. gr.* §12.2—. Es por ello, que en §3.3 hemos recordado algunas definiciones y resultados sobre retículos, centrándonos en intervalos (subconjuntos completos y totalmente ordenados) densos —caso de un retículo—, o convexos —si se trata de un retículo vectorial—. En retículos normados, podemos medir la distancia, según la norma, entre puntos, y por tanto, podemos trabajar con el concepto de extensión o anchura de un intervalo.

Estas nociones extienden el concepto de intervalo en $\mathbb{R}$. Pero, ¿cómo operar algebraicamente con intervalos? En §3.5 hemos presentado las extensiones, ya clásicas, de las operaciones elementales de la aritmética, a intervalos ordinarios y a intervalos de tipo 2 (intervalos cuyos extremos son intervalos). A continuación, en §3.6, presentamos la noción de función de inclusión, esto es, una función de intervalos (su argumento y su resultado son intervalos o n-tuplas ordenadas de intervalos) generada como extensión de una función real de variable real (cuyo argumento y resultado son números reales o n-tuplas ordenadas de números reales), distinguiendo entre la extensión natural —que es la que nosotros usaremos— de funciones reales factorizables, la extensión de valor medio y la extensión mediante un polinomio de Taylor (Brook) de grado 2.

4

Idas y venidas entre lo nítido y lo borroso



«Sólo tengo por seguro lo que es incierto.»
—François VILLON, poeta francés (1431-1463?)

«¿Es borroso el procesamiento humano básico de la información?
¿O es exacto,
pero con los casos borrosos más complicados construidos encima?»
—Ellen HISDAL [311] *(p. 352)*

La mayor parte del presente capítulo, se centra en revisar algunas nociones, propiedades y teoremas, relativos a la lógica y a la teoría de conjuntos borrosas, así como a su historia. No obstante, lo original, además de en las diferentes observaciones que surgen a lo largo de la exposición, se aglomera en dos ***contribuciones concretas****:*

- *En §4.4.5, destacamos la importancia de los números borrosos no normales, a los que denominamos* ***cuasi-números borroso****, motivando su definición con varios ejemplos: fiabilidad de dispositivos medidores como los sonómetros (medidores de nivel sonoro); desempeño de tareas, interpretando la fiabilidad como confianza en el trabajador; comparación de calificaciones en un supuesto de evaluación de capacidades subjetivas; y valoración de la capacidad de juicio de un evaluador.*
- *El anexo anticipador §4.11 recoge algunas investigaciones nuestras a partir de los conjuntos borrosos o L-borrosos intuicionistas de Krassimir T.* ATANASSOV*. Un conjunto borroso queda caracterizado por su función de pertenencia. Un conjunto borroso intuicionista considera, además, la función de no-pertenencia; es un caso particular —para* $L = [0, 1]$*— de conjunto L-borroso intuicionista, siendo* $(L, \leq)$ *un retículo. Las funciones de pertenencia y no-pertenencia se relacionan mediante una involución de inversión de orden en* $(L, \leq)$*. La idea que aportamos en esta sección es ampliar estos conceptos considerando una lógica base trivalente, que refleje situaciones de duda sobre «la pertenencia o no pertenencia» (el típico «no sabe, no contesta» de una encuesta) —tres valores: [Sí], [No], [Ns/Nc]—, o tetravalente: ¿por qué no considerar dudas separadas, es decir, dudas sobre «la pertenencia» y dudas sobre «la no pertenencia»?*

4.1 Verdades y falsedades a medias

«Lakoff [George LAKOFF *[312, 313]] comienza reconociendo que "los conceptos del lenguaje natural tienen límites vagos y bordes borrosos, de tal forma que las oraciones del lenguaje natural no serán, con mucha frecuencia, ni verdaderas, ni falsas, ni carentes de sentido, sino más bien "verdaderas en cierta medida y falsas en cierta medida, verdaderas en ciertos respectos y falsas en otros respectos".»*
—Alfredo DEAÑO [314] (p. 334)

Acerca de situaciones intermedias entre la verdad y la falsedad, se vislumbran trazas en la Antigüedad: Heráclito (aprox. 550-480 a.C.), la tesis de los grados de realidad de Platón (427-347 a.C.), o los *lektá* (*λεκτά*) *deficientes* (ἐλλιπές) —*cfr.* Mates [315] (pp. 37ss.)— de la lógica de la Stoa Antigua —o sea, los estóicos antiguos Zenón de Citio (aprox. 350-260 a.C.), Cleantes (aprox. -230 a.C.) y Crisipo (aprox. 280-205 a.C.).

Uno de los mayores referentes para los que defienden la posición bivalente es Aristóteles (384-324 a.C.), argumentando con citas provenientes de *De Interpretatione*: «Cualquier cosa debe o bien existir o no existir, tanto en el pasado como en el futuro» y «No hay nada entre afirmar [A] y negar [no A]». Para más inri, Aristóteles parece ratificarse en su postura en su *Metafísica*, curiosamente, según él, en el «*más verdadero*» de todos los principios: «el mismo atributo no puede corresponder y no corresponder al mismo tiempo al mismo sujeto en el mismo contexto» y «no puede existir algo intermedio entre cosas contradictorias, sino que de un sujeto sólo se puede o bien afirmar, o bien negar, un predicado cualquiera»[1].

Trillas, Alsina y Terricabras [316] (p. 39), resaltan cómo Aristóteles parece aceptar el más y el menos para graduar los términos cualitativos:

> *[...] una cosa se llama más o menos blanca que otra, y una más justa que otra. Y lo mismo puede tomar incremento: en efecto, siendo blanco, puede hacerse aún más blanco; [...] Pero, en cualquier caso, lo que se dice de acuerdo con estas cualidades admite, indiscutiblemente, el más y el menos»*
> —Aristóteles [317]

así como una gradación del error y por tanto una *gradación de la verdad*:

> *[...] ni yerra igualmente el que cree que cuatro son cinco y el que cree que son mil. Si, pues, no yerran igualmente, es evidente que uno de los dos yerra menos, de suerte que se acerca más a la verdad. Por consiguiente, si lo que es más una cosa está más próximo a ella, habrá al menos algo verdadero, de lo cual estará más próximo lo que es más verdadero.»*
> —Aristóteles [317]

Jan Christiaan Smuts contribuyó a fundar el movimiento holístico[2] que conduciría a la moderna ciencia de los sistemas. La siguiente cita de Smuts (año 1926), parece presagiar la llegada de lo borroso.

[1] Observe el lector lo paradójico de calificar este principio como «el "más verdadero" de todos los principios» (y lea también la segunda cita suya, más abajo).

[2] Jan Christiaan Smuts, filósofo sudafricano, experto agrónomo y militar, de grado mariscal de campo, y uno de los primeros defensores del «anti-*apartheid*» en Sudáfrica, fue el primero en utilizar el término holismo. Éste describe la tendencia de la naturaleza a crear conjuntos mediante la ordenación o agrupación de muchas unidades.

> *«... una fuerza vital responsable de la formación de conjuntos —de gestalts, se diría hoy—; esa misma fuerza sería la formadora de átomos y moléculas en el plano físico, de células en el plano biológico, de ideas en el plano sicológico y de la personalidad en el plano espiritual; el propio universo sería un conjunto en constante formación»*
> —Pierre Weil [318]

La visión holística, en su versión original, se opone a la visión atomista, que asume la composición de partes, independientes unas de otras y en el que el todo no es mas que la suma de las partes. Mas en nuestra opinión, se complementan. Se debe poseer la capacidad de agregar las partes, pero además la capacidad de ver el todo, de poder, cuando interese, considerar situaciones como un todo. Y esta visión, nos tememos, no la poseen las máquinas. Es el «sentido de helicóptero» que defiende Jan Carlzon [319]—, la «visión desde los 10.000 metros» de Gary McClain y Tammy Sachs [320], la contemplación del problema desde «otro planeta», de Roger Dawson [43] (pp. 134-135, de la edición española), o la visión del Director General de una empresa desde la «cima de la montaña» de Luis Puchol [129] (pp. 351-353). Muchas veces se dice que los árboles no dejan ver el bosque, pues precisamente lo que defiende el holismo es la visión del bosque por encima de la de los árboles.

La totalidad es una propiedad inherente de los **sistemas**: «un sistema se comporta como un todo inseparable y coherente. Sus diferentes partes están interrelacionadas de tal forma que un cambio en una de ellas provoca un cambio en todas las demás y en el sistema total», en palabras de Alejandro López, Andrea Parada y Franco Simonetti [321] (p. 145).

El concepto de sistema surge con la Segunda Guerra Mundial, durante la que se desarrollaron métodos con el propósito de incorporar en el análisis estratégico, un conjunto de sistemas que se convertían en interdependientes en el momento de la batalla. Después, en la postguerra, las grandes industrias modernas introducen el estudio de los sistemas en la planificación empresarial, denominándolo Operación de Sistemas, resaltando lo relevante de la interdiciplinariedad y la cooperación organizada de lo he\-te\-ro\-gé\-neo —*cfr.* Austin-Millán [322] (cap. 1)—. Con Karl Ludwig von Bertalanffy [323], se establece claramente la importancia de los estudios de sistemas para diversos campos de la ciencia; su sueño es transformarlo en un lenguaje universal para la ciencia, incluyendo a los estudios de la sociedad; se le considera el fundador de la teoría general de sistemas —*cfr.* Davidson [324]—, al ser sus ideas las promotoras de la unión de los estudios de sistemas con la concepción holística de la sociedad —*cfr.* Ackoff [325] (cap. 1); Rodríguez y Arnold [326] (cap. 3).

Los sistemas son objetos sinérgicos que pueden estar compuestos, a su vez, de otros objetos sinérgicos (subsistemas). Hablamos entonces de sistemas y subsistemas. O si queremos ser más extensos, de **supersistemas**, **sistemas** y **subsistemas**. Cada uno de estos objetos participa del todo inmediato y no inmediato, al compartir propiedades con él —*cfr.* Óscar Johansen [327] (p. 37)—. Esta reiteración nos trae la **recursividad**: «procesos cuya característica es que sus resultados son objeto del mismo proceso que los originó, como por ejemplo, la raíz cuadrada de la raíz cuadrada, el pensamiento del pensamiento, etc. Este es el uso que la moderna teoría de sistemas ha originado» —*cfr.* Rodríguez y Arnold [326] (pp. 53ss.)

[...] Un concepto no es meramente ese centro claro y luminoso; abarca además una esfera de significado o influencia de menores o mayores dimensiones que rodea el centro y donde la luminosidad va decayendo y debilitándose hasta desaparecer. De manera similar, una «cosa» no es meramente lo que se presenta a sí mismo como tal con el más claro y definido de los perfiles, sino que esa área central está rodeada por una zona de intuiciones e influencias que se desvanece en la región de lo indefinido A y $\neg A$»
—Jan Christiaan SMUTS [331]

Dos referencias de antaño, donde podemos saborear[3] lo borroso son dos trabajos de F. GONSETH. El primero de ellos data de 1932, y es una conferencia pronunciada en la asamblea anual de la Sociedad Helvética de Ciencias Naturales [332]. El segundo [333], data de 1938 (aunque se publica en 1941).

Pero quizás el antecedente más relevante ocurrió en el año 1937, cuando el filósofo Max BLACK (1909-1988), publicó su artículo «*Vagueness: An exercise on logical analysis*» [334] sobre los **conjuntos vagos**, exactamente los mismos que nosotros ahora llamamos borrosos. En el artículo de BLACK aparece, por primera vez en la historia, la gráfica de la función de pertenencia de un conjunto borroso (vago, con sus palabras).

«La vaguedad de la palabra silla es típica de todos aquellos términos cuya aplicación suponga el uso de los sentidos. En cualquiera de tales casos, podemos encontrar fácilmente "situaciones frontera" y "objetos dudosos", acerca de los que no podemos afirmar si les podemos o no aplicar el nombre de la clase.»
—Max BLACK [334]

En «*Language and Philosophy*», publicado en 1949, aplica las mismas ideas al lenguaje arguyendo que las reglas del discurso no pueden seguirse, ni de hecho se siguen, de manera precisa. Defiende que la aplicación de un predicado a un objeto es una cuestión de grado, determinado por los juicios de aplicación (*sic*) de la comunidad empleadora del lenguaje[4]. En 1963, dos años antes de la publicación de los «*Fuzzy Sets*» de Lotfi Asker ZADEH, vuelve Max BLACK a trabajar con los conjuntos vagos en su artículo «*Reasoning with loose concepts*» [336].

Dicho esto, ¿por qué se tuvo en cuenta a ZADEH, y no a BLACK? Lo ignoramos, aunque seguramente mucho tuvo que ver la posición destacada de ZADEH en Berkeley. La comunidad científica ignoró sus ideas —al igual que ocurrió con las de Bertrand Arthur William RUSSELL y Jan ŁUKASIEWICZ—. Bart KOSKO apunta hacia el positivismo lógico dominante para explicar la actitud ignorante en 1937, pero no dice nada con respecto a 1963. Bajo la atenta mirada del positivismo lógico[5] —*cfr.* AYER (Comp.) [337]—, la vaguedad no podía ser considerada científica. El poder era de lo nítido y lo preciso. Si se hubiesen tenido en cuenta las ideas de RUSSELL, ŁUKASIEWICZ y BLACK, en la actualidad no se hablaría de conjuntos borrosos, sino de **conjuntos vagos**.

A ZADEH se le han rendido muchos tributos. Menos mal que, aunque tarde (1990), se alzan voces poderosas como la de George J. KLIR.

«El mejor discurso sobre la vaguedad, que, al menos en mi opinión, aún no ha sido superado, lo publicó en 1937 Max Black, un conocido filósofo americano. Este clásico trabajo es tan importante, histórica y conceptualmente, que decidí reeditarlo en este Número Especial. Esta reedición tiene asimismo por objeto rendir tributo a Max Black, que falleció en agosto de 1989.»
—George J. KLIR [338]

Para finalizar esta nota, mencionar algunas de las **componentes fundamentales de un sistema**: los *individuos* (o sea, las unidades integrantes del sistema), los *procesos* de interrelación entre los individuos, la *retroalimentación* (que opera como órgano censor y rector en la mediación tanto del proceso de acción, esto es, de todos los procesos que permiten que el sistema opere o actúe, como de la dirección o producto del sistema, que debe ser siempre el establecido por sus fines), cumpliendo el principio de *equifinalidad* (capacidad de llegar a un mismo fin desde puntos iniciales distintos) —*cfr.* RODRÍGUEZ y ARNOLD [326] (p. 39)—, soportado por una capacidad de *autoevaluación*, que puede conducir a la *homeostasis* (tendencia de los sistemas, especialmente naturales, a mantener ciertos factores críticos: temperatura del cuerpo, densidad de población, etc., dentro de cierto rango de variación estrechamente limitado). Todos ellos, en conjunto, son claves para la componente *autopoyética* de un sistema —*cfr.* MATURANA y VARELA [328, 1] (pp. 43ss.); ECHEVERRÍA [329]; RODRÍGUEZ y ARNOLD [326] (pp. 53ss.)—, es decir, para que sean capaces de mantener su finalidad o propósito estable, a pesar de que a menudo sean objeto de presiones para que cambien.

Alexander VENGEROV [330] elabora una propuesta de **ingeniería holística**, en la que, por ejemplo, la necesidad de «control» es sustituída por la de «armonía».

[3] Agradecemos a Robin B. LAKE, de la *Environmental Modeling Inc.* [`rbl@hal.cwru.edu`], haber sido la fuente de donde emanó la información sobre los trabajos de GONSETH.

[4] El lector puede consultar las críticas a estas ideas, interpuestas por Carl G. HEMPEL, por ejemplo, en la antología de Rosanna KEEFE y Peter SMITH (Eds.) [335].

[5] Resulta curioso que la Tesis Doctoral de Max BLACK fuese «*Theories of Logical Positivism*» —Universidad de Londres, 1939.

Otro exponente fue el economista George L. S. SHACKLE (1903-1992), quien desde finales de los años 40 del siglo XX —*cfr.* SHACKLE [339]—, afirmaba la ineptitud de la teoría de la probabilidad para modelizar la naturaleza de la incertidumbre económica.

> *«Es el grado de sorpresa al que nos exponemos cuando examinamos e imaginamos que sucede en toda su extensión, en general o en las circunstancias predominantes, y evaluamos los obstáculos, tensiones y dificultades que surgen en nuestra mente cuando tratamos de imaginar cómo ocurre, eso nos proporciona el indicador del grado de posibilidad. Ésta es la sorpresa que sentiríamos, si la cosa dada sucediese; es una sorpresa potencial. [...] Únicamente la sorpresa potencial es la que es evocada y evaluada mentalmente, en el momento de tomar la decisión, caso de ser relevante para tal decisión, sólo si puede influir en ella.»*
> —George L. S. SHACKLE [340]

SHACKLE formalizó el concepto de **sorpresa potencial** mediante los siguientes nueve axiomas, que recogemos del libro de Douglas John WHITE [79] (pp. 81-82):

Ax. 1 : «El grado de creencia de un individuo en una hipótesis puede considerarse que consiste en un grado de sorpresa potencial asociado con la hipótesis y en un grado distinto asociado con su contradictoria.»

Ax. 2 : «Los grados de sorpresa pueden ser cero o no cero, con un máximo de $\overline{\rho}$, que significa incredulidad completa.»

Ax. 3 : «La igualdad entre los respectivos grados de creencia, sentida por un individuo, en una hipótesis, requerirá, para su expresión en términos de sorpresa potencial, dos enunciados, a saber: que se asigne algún grado de sorpresa potencial a ambos y que algún grado se asigne a la contradictoria de ambos.»

Ax. 4 : «El grado de sorpresa potencial asociada con cualquier hipótesis será el mínimo grado entre todos aquellos apropiados a diferentes conjuntos de hipótesis mutuamente exclusivos (cada uno considerado como un todo) cuya verdad parezca implicar la verdad de la primera hipótesis. En otras palabras, si $h = \bigcup_i h_i$, $h_i \cap h_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, entonces $\rho(h) = \min_i[\rho(h_i)]$.»

Ax. 5 : «Todos los miembros de un conjunto exhaustivo de hipótesis rivales pueden acarrear sorpresa.»

Ax. 6 : «Cuando h es cualquier hipótesis, el grado de sorpresa potencial asignado a la contradictoria de h es igual al grado más pequeño asignado a cualquier rival de h.»

Ax. 7 (primera versión): «El grado de sorpresa potencial asignado a la verdad conjunta (simultánea) de dos hipótesis es igual al mayor de los grados respectivos asignados a las hipótesis separadas.»

Ax. 7* (segunda versión): «Sea ρ_A^B el grado de sorpresa potencial asignado a la hipótesis B cuando ρ^A es el grado asignado a la hipótesis A, y sea ρ_0^B el grado asignado cuando $\rho^A = 0$. Entonces: $\rho_A^B \leq \max\left[\rho^A, \rho_0^B\right]$.»

Ax. 7** (versión final): «$\rho_A^B = \max\left[\rho^A, \rho_0^B\right]$.»

Ax. 8 : «Cualquier hipótesis y su contradictoria juntas constituyen el conjunto exhaustivo de hipótesis rivales.»

Ax. 9 : «Al menos un miembro de un conjunto exhaustivo de hipótesis rivales debe comportar sorpresa potencial cero.»

No resulta difícil demostrar que la sorpresa potencial es un concepto equivalente al de una *medida de necesidad* en la *teoría de la posibilidad* de ZADEH. A modo de ejemplo, fíjese el lector en los axiomas 8 y 9 y observe su «parentesco» con la conocida relación $\min\{\text{Nec}(A), \text{Nec}(A^c)\} = 0$, para una medida de necesidad Nec —*cfr.* §7.2.1.

De hecho, SHACKLE hacía referencia a grados de posibilidad, además de a los grados de sorpresa potencial, pero no integró ambos conceptos en un cuerpo teórico común. Quizás sea ésta la aportación básica de Lotfi Asker ZADEH.

Otro precedente son los espacios de KUREPA-FRÉCHET, que implícitamente incluyen la noción de conjunto borroso, y cómo en el libro de Đuro R. KUREPA, *The Theory of Sets*, de 1951, aparece la expresión «**conjuntos con estructura borrosa**» —*cfr.* Obs. 60 (pág. 97).

En un artículo de 1962 [341], del que hemos extraído la siguiente cita, ZADEH expresa claramente la necesidad de un nuevo punto de vista en la Matemática, para responder al requerimiento de formalización de la incertidumbre no probabilística.

[...] la inadecuación fundamental de las matemáticas convencionales —las matemáticas de los puntos, funciones, conjuntos, medidas de probabilidad, etc., definidas precisamente— para hacer frente al análisis de los sistemas biológicos, y para trabajar de manera efectiva con tales sistemas, que, por lo general, son de órdenes de magnitudes más complejos que los sistemas hechos por el ser humano, hace que necesitemos una clase de matemáticas radicalmente diferente, las matemáticas de las cantidades borrosas o nebulosas (cloudy) que no son describibles en términos de distribuciones de probabilidad.»
—Lotfi A. ZADEH [341].

Willard Van Orman QUINE, muy recientemente, en 1991, considera que el coste definitorio de la bivalencia es muy alto, a veces prácticamente impagable, pero que merece la pena intentarlo.

«Si la palabra MESA ha de encajar con la idea de bivalencia, debemos situar una demarcación que sea exacta hasta la última molécula, aunque no podamos especificarla. Hemos de considerar que hay objetos físicos que coinciden en todo salvo en una molécula, tales que uno de ellos es una mesa y el otro no lo es»
—Willard van Orman QUINE [175]

En la misma línea, observemos la definición que da, en el mismo artículo, de una montaña:

«La palabra MONTAÑA constituye un buen ejemplo, porque constituye la vaguedad de la altitud aceptable, la vaguedad de los límites en la base y la consiguiente indecisión en cuanto a cuándo se considera que dos cimas son dos montañas o cuándo se dice que es una sola. Se puede estipular lo siguiente: dejando a un lado lo que pueda suceder en otros planetas, podemos definir una montaña como cualquier zona de la superficie terrestre que (a) tenga unas fronteras de altitud uniforme, (b) el punto más alto, o uno de ellos, está a una inclinación de al menos diez grados sobre cualquier punto de la frontera y de veinte grados sobre algunos de estos puntos, y se encuentra al menos a una altura de mil pies sobre ellos, y (c) la zona no forma parte de ninguna otra zona que cumpla los requisitos (a) y (b). (Teorema: la frontera de una montaña es la línea de contorno más externa que se encuentra totalmente dentro de los diez grados de pendiente a partir de la cima y, en parte, dentro de los veinte grados de pendiente.)»
—Willard van Orman QUINE [175]

Como la frontera que define QUINE, entre lo que es una montaña y lo que no lo es, es precisa, la definición de una montaña también es precisa. Pero, como arguye KOSKO [59] (p. 322), QUINE no explica por qué una colina se convierte en montaña al superar el umbral de los mil pies por tan sólo una micra. Por cierto, ¿recuerda el lector la película «El inglés que subió a una colina y bajó de una montaña» (*The Englishman who went up a hill but came down a mountain*), dirigida por Christopher MONGER, e interpretada como actores principales por Hugh GRANT y Tara FITZGERALD, en la que un cartógrafo (Hugh Grant), al visitar una villa galesa para medir una montaña, descubre que la montaña es unos pocos cientos de pies más baja de lo que se requiere para ser calificada como tal ...?

Sorites (del lat. *sorites*, y éste del gr. *sorítes*, de *soreýein*, amontonar) es una forma de razonamiento consistente en encadenar proposiciones de manera que el predicado de la que antecede sea el sujeto de la que sigue, hasta alcanzar la conclusión, de sujeto el de la primera y de predicado el de la última. La **paradoja del Sorites** se produce cuando son «muchas» las proposiciones que se encadenan. Todos estamos de acuerdo en que el Everest es una montaña; también estamos de acuerdo en que si del Everest quitamos un grano de arena, sigue siendo una montaña, es decir, retornamos a la situación de partida. Repitiendo la operación de quitar un grano de arena en cada ocasión, podríamos concluir que una colina es una montaña, y aún más, que una planicie también es una montaña.

[...] a uva, a uva, se comió un golondrino cien cuerdas de viña; y el viñador decía: ¡déjalo, total, que un pobre golondrino se coma una uva de vez en cuando ...!»
—Ildefonso GARZÓN, padre del magistrado Baltasar GARZÓN, citado por Pilar URBANO [342] (p. 129)

Los científicos han impuesto una lógica bivalente a un mundo que no es bivalente. Muchas paradojas —*cfr.* KLINE [343]— surgen de esta imposición. ¿Cuándo formará parte del currículo la matemática borrosa, no, como ahora, que sólo se estudia en seminarios o cursos especializados? —*cfr.* TRILLAS y SOBRINO [344]; ALSINA y TRILLAS [345]; *ASL Commitee on Logic and Education* [346]; SOBRINO [347]—. ¿Eliminará del curriculo a la matemática «clásica»? En absoluto. Cada una tiene su sitio. La situación se nos asemeja paralela a la de la mecánica «clásica» y la mecánica cuántica. De hecho, como ya hemos comentado, muchos son los que defienden que el principio de incertidumbre o indeterminación de Werner Karl HEISENBERG fuerza la entrada de la lógica multivalente en la ciencia —*cfr.* KOSKO [59].

Además de la solución precisa de Quine de una montaña, cabría considerar la posibilidad de trabajar como lo hacen nuestras mentes, es decir, trabajar con las nociones vagas de montaña, colina y planicie, apoyándolas en su interrelación: una montaña es una zona notablemente elevada sobre el terreno, una colina es una zona elevada del terreno de menor elevación que una montaña y una planicie es un terreno llano, sin elevación. Y como perseguimos su formalización, apostamos por trabajar con conjuntos imprecisos, es decir, con conjuntos de cuyas funciones características sólo sabemos de su pertenencia a una colección determinada.

La posición actual, más frecuente, al utilizar la teoría de conjuntos borrosos supone trabajar con conjuntos borrosos ordinarios o no, pero precisos. Por ejemplo, en relación a la cuestión del aborto, Bart Kosko [59] propone encuestar a la humanidad y preguntarle en qué momento del embarazo piensan que el feto comienza a ser persona, y generar, a partir de esta información una «curva borrosa de vida».

4.2 Los conceptos dialécticos y el origen psicológico de la vaguedad

[...] una moderna y adaptada versión de la paradoja de los Sorites. Esta puede ser formulada en la forma siguiente: supóngase que el problema a resolver tiene que ver con el control de un determinado sistema en una planta industrial, problema que –evidentemente– un experto en ingeniería de control identificaría como perteneciente a su ámbito de conocimiento; esta identificación seguiría si en la formulación del problema se sustituye el sistema real a controlar por un modelo simulado mediante un ordenador. El paso siguiente podría ser el considerar, en lugar del modelo, un conjunto de ecuaciones; todavía más, en lugar de éstas, su forma algebraica general, y así sucesivamente, hasta llegar a la publicación del artículo que resuelve el problema original y que podría titularse algo así como "Resíduos de aplicaciones contractantes en espacios de Banach paracompactos". Manifiestamente, nuestro azorado experto en control de sistemas ya no identificaría dicho artículo como perteneciente a su ámbito de conocimiento.»

—B. R. Gaines [348], *via* Llorenç Valverde García [349]

Nicholas Georgescu-Roegen [350] (1906-1994) distingue entre **conceptos aritmomorfos** y **dialécticos**. Los primeros representan realidades susceptibles de medida y son claramente distinguibles entre sí; por ejemplo, la velocidad o la temperatura. En particular, cualquier concepto aritmomorfo es separable con precisión de su contrario. En contra, la definición de un concepto dialéctico comporta una cierta imprecisión —en el ejemplo de la cita anterior lo que ocurre es que se introduce una precisión artificial e innecesaria.

En general no hay una separabilidad clara entre un concepto dialéctico y su contrario: ¿cuál es la frontera entre lo rojo y lo no rojo?. Blas Lara [351] (p. 211), apunta que los conceptos dialécticos quizás puedan interpretarse como los factores o ejes criptotípicos de un análisis factorial —*cfr.* Comrey [352]—, siendo meros instrumentos del cerebro para la representación simultánea de una multiplicidad de variables fenotípicas aritmomorfas: «serían mas bien un artificio de la mente que una realidad objetiva en sí».

Esta falta de claridad en la frontera entre un concepto dialéctico y su contrario tiene mucho que ver con la que Ellen Hisdal identifica como fuente de borrosidad #3a en [353] (p. 335) —Hisdal [354] identifica 14 fuentes de borrosidad diferentes—, a saber, que diferentes personas pensarán en diferentes umbrales de separación entre un concepto y su contrario, o bien desconoceremos tal umbral, aunque estemos convencidos de su existencia —*cfr. infra* «la vaguedad es ignorancia», Timothy Williamson [355].

Esta falta de claridad, asimismo, es consistente con varias hipótesis acerca del **origen psicológico de la vaguedad**. Una posibilidad es considerar que la representación léxica del observador divide el «espacio de caracterización» del concepto en tres regiones, una a la que de seguro el concepto se aplica, otra a la que de seguro el contrario del concepto se aplica y una tercera a la que de seguro ninguno de los dos se aplica, ni el concepto ni su contrario. Se tiene así una **laguna** (*gap*) **de conocimiento** —*cfr.* Fine [356].

Una segunda posibilidad es la que en la literatura inglesa se conoce como «*glut hypothesis*» —*cfr.* Hyde [357]—. En vez de una laguna, de una carencia, se tiene un **exceso de conocimiento**. En vez de caracterizarse esa tercera región por no poder aplicar el concepto ni su contrario, lo que ocurre es que podemos aplicar tanto uno como otro —por ejemplo, ante un determinado color, podríamos afirmar tanto que es verde como que es azul (no verde).

En las dos hipótesis anteriores sólo se han considerado dos valores de verdad. Una tercera posibilidad sería considerar todo un continuo de valores desde 0 (falsedad) hasta 1 (verdad). Sería la que podríamos llamar hipótesis de **la verdad borrosa**. Goguen [358], según nuestro saber, es el primero en aplicar la lógica borrosa a la vaguedad.

Muchísimas críticas ha recibido y recibe la teoría borrosa como una teoría de la vaguedad —*cfr.* Williamson [355]; Osherson y Smith [359]—. Un ejemplo —*cfr.* Bonini, Osherson, Viale y Williamson [360]— es

el siguiente: supongamos que podemos distinguir dos lámparas situadas sobre una mesa sólo por la posición y que ambas lámparas emiten luz de 610nm; consideremos la frase «la luz de la derecha es roja y la luz de la izquierda no es roja». Si empleamos la t-norma mínimo —*cfr.* Def. 34 (pág. 74)— para representar la conjunción borrosa, entonces el valor de verdad de esta frase es 0.5. Sin embargo, nuestra intuición natural parece decirnos que esa frase es falsa, porque las luces son la misma —el mismo ejemplo pero referido a «ser calvo» es propuesto por Ewa ORLOWSKA [361] (p. 476), aportando una «contradicción tan patente» como el hecho de que *Juan es y no es calvo*.

En un sentido parecido, aunque con pretensiones más formales se muestra el artículo de Charles ELKAN [362], en el que pretende haber demostrado que la lógica borrosa se reduce a la bivalente. La revista *IEEE Expert*, dedica un número por entero [363], a la «demostración» elaborada por Charles ELKAN y a sus correspondientes discusiones, participando 22 investigadores de gran prestigio en lógica borrosa, incluyendo a Lotfi Asker ZADEH.

Una conclusión básica se extrae de todo ello: los valores borrosos no son valores de verdad convencionales —*cfr.* SOWA [257] (p. 372)—. No se puede pretender aplicar las reglas de la lógica bivalente a una lógica, la borrosa, que no lo es. No puede, en particular, aplicarse el principio del tercio excluso, sencillamente, porque el punto de partida, epistemológico, en la lógica borrosa es su negación. Esos autores que hablan de contradicción, lo hacen porque su punto de vista es la lógica bivalente y no la lógica borrosa.

La cuarta posibilidad defiende que **la vaguedad es ignorancia** —*cfr.* WILLIAMSON [355]; BONINI, OSHERSON, VIALE y WILLIAMSON [360]—. Un ejemplo son las expresiones en lenguaje natural que frecuentemente utilizamos «por debajo de la media» y «por encima de la media», en relación a un concepto. Pero, ¿cuál es la media? Para la mayoría de la gente nos es desconocida, y sin embargo usamos esas expresiones, ¿por qué?, porque reconocemos que aunque ignoramos el valor de la media, dicho valor existe. Otros ejemplos son las creencias putativas en la existencia de algo esencial aunque oculto (que ni conocemos ni seguramente conoceremos jamás) en conceptos «naturales» como mamífero o cobre —*cfr.* MEDIN y ORTONY [364]; MARGOLIS [365]; KALISH [366]; GELMAN y WELLMAN [367]; GOPNIK y MELTZOFF [368].

Nos permitimos recomendar la antología *Vagueness: A Reader* [335], editada por Rosanna KEEFE y Peter SMITH, en la que la lista de autores colaboradores incluye a: Max BLACK, James CARGILE, Michael DUMMETT, Dorothy EDGINGTON, Gareth EVANS, Kit FINE, Carl G. HEMPEL, Rosanna KEEFE, David LEWIS, Kenton F. MACHINA, Henryk MEHLBERG, Terence PARSONS, Bertrand Arthur William RUSSELL, R. M. SAINSBURY, Peter SMITH, Michael TYE, Timothy WILLIAMSON, Peter WOODRUFF, Crispin WRIGHT.

4.3 Lógicas multivalentes

> *«Las personas que piensan en español (sic) sienten que "la incertidumbre es insoportable" y no tienen nada que hacer desde el punto de vista lógico, sin embargo, para una persona que piensa en Aymara, "ina" [quizás sí quizás no] forma parte de la realidad, y es tan lógico como "jisa" [sí] o "jani" [no]. Si* LUKASIEWICZ *hubiese sido un Quoya, probablemente hubiese considerado la lógica bivalente de los hispanohablantes tan extraña y digna de estudio como lo es la lógica polivalente.»*
> —Iván GUZMÁN DE ROJAS [369] (cap. 3: the trivalent logic of Aymara)

Podrían considerarse entre los primeros esbozos de formalización de una «lógica multivalente» aquellos intentos de Ramón LULL (aprox. 1232-1316) y Nicolás de KREBS (Nicolás de Cusa, 1401-1464) —*cfr.* PEÑA [370] (p. 323)—. Aunque, ya puestos, también podríamos remontarnos hasta Aristóteles, con la discusión de las proposiciones que no lo son pero sí estan, no se les puede asignar un valor de verdad, pero pueden enunciarse, y se vive con ellas, como por ejemplo: «mañana llueve»; o sea, la noción de verdad potencial.

No obstante, fue Charles Sanders PEIRCE (1839-1914) —*cfr.* PEÑA [370] (pp. 323ss.)—, quien, hasta donde sabemos[6], formaliza por primera vez una lógica trivalente, con su idea de la Matemática triádica, extensión de la clásica, en la que el *principio del tercio excluso* ($p \vee \neg p \equiv 1$) no es del todo verdadero —él distingue entre lo verdadero, lo falso, y lo que está en el *límite*—. Parte de este trabajo no publicado, y realizado sobre 1909, está recogido en la obra de RESCHER [371] (pp. 4-5).

El matemático ruso VASILÉV, a partir de 1909, publica una serie de artículos en los que elabora una lógica trivalente, por eliminación del principio del tercio excluso; él la llama «lógica no aristotélica»[7]. El primer sistema desarrollado de lógica trivalente data de 1920 y es de Jan LUKASIEWICZ. Otros sistemas trivalentes

[6] No obstante, José FERRATER MORA asegura que hay evidencias de que William de OCKHAM (1298-1349) hubiese sugerido ya el uso de tres valores de verdad.

[7] José FERRATER MORA nos comenta el hecho de que VASILÉV hizo algo parecido con la lógica bivalente, a lo que había hecho Nikolai Ivanovich LOBACHEVSKY con la geometría euclidea; si bien, este último eliminó el axioma de las paralelas, VASILÉV eliminó la ley del tercio excluso —*cfr.* FERRATER MORA [372]; FERRATER MORA y LEBLANC [373].

son los de Emil Leon POST[8] (1921) [374], Stephen Cole KLEENE (1938) [375] —*et* [376] (p. 334)—, BOCHVAR (1939) [377], Arend HEYTING (1956) [378], Hans REICHENBACH (1944) [379], y algunos otros —*cfr.* Tabla 4.1.

		Łukasiewicz				**Kleene**				**Bochvar**				**Heyting**				**Reichenbach**			
a	b	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tabla 4.1: *Algunas lógicas trivalentes. Sólo aparece el tratamiento del nuevo valor de verdad* $\frac{1}{2}$*, pues todas ellas coinciden con la lógica clásica si* $a, b \in \{0, 1\}$.

Estas lógicas no satisfacen ni el *principio de contradicción* ($p \wedge \neg p \equiv 0$) ni el del tercio excluso ($p \vee \neg p \equiv 1$). El hecho de que la lógica trivalente de BOCHVAR no contenga tautologías (pues todas sus primitivas producen $\frac{1}{2}$ si al menos uno de los argumentos asume tal valor), hizo que surgieran los conceptos de quasi-tautología y quasi-contradicción. Una fórmula es una **quasi-tautología** si todos sus literales son distintos de 0 y es una **quasi-contradicción** si todos sus literales son distintos de 1.

Se desarrollaron varias lógicas de n-valores en los años treinta. Estas lógicas solían valorarse en el siguiente subconjunto de números racionales de $[0, 1]$ (que formalmente es lo que nosotros denominamos en la presente memoria un *α-percentilado uniforme de cardinal n* —*cfr.* Def. 83 (pág. 120)— del intervalo $[0, 1]$:

$$\mathfrak{u}^n([0,1]) = \left\{0, \tfrac{1}{n-1}, \tfrac{2}{n-1}, ..., \tfrac{n-1}{n-1}\right\} \quad (4.1)$$

$$= T_n \quad (4.2)$$

pudiéndose interpretar tales valores como grados de verdad.

La lógica de n-valores ($n \geq 2$) de ŁUKASIEWICZ, denotada L_n, tiene como primitivas:

$$\neg a = 1 - a \quad (4.3)$$

$$a \rightarrow b = \min(1, 1 + b - a) \quad (4.4)$$

y las demás conectivas se definen:

$$a \vee b = (a \rightarrow b) \rightarrow b \quad (4.5)$$

$$a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b) \quad (4.6)$$

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) \quad (4.7)$$

de donde:

$$a \vee b = \max(a, b) \quad (4.8)$$

$$a \wedge b = \min(a, b) \quad (4.9)$$

$$a \leftrightarrow b = 1 - |a - b| \quad (4.10)$$

Por L_∞ se nota la lógica (infinitamente) valorada en el conjunto T_∞ de todos los números racionales de $[0, 1]$. La llamada **lógica estándar de Łukasiewicz** L_1 se valora (infinitamente) en $[0, 1]$ (el 1 subíndice de L_1 es una abreviatura de $\aleph_1$, el cardinal del continuo). Generalmente en la literatura, por **lógica infinitamente valorada** se entiende la valoración en $[0, 1]$. Un resultado bien conocido es que para ninguna lógica infinitamente valorada existe un conjunto finito *completo* de primitivas —*cfr.* KLIR y YUAN [46] (p. 220). Completitud del conjunto en el sentido de capacidad de generar toda la lógica; es decir, que al usar un conjunto finito de primitivas para definir una lógica infinitamente valorada, sólo obtendremos un subconjunto de todas las funciones lógicas.

[8] En realidad, la lógica desarrollada por Emil POST, en 1921, posee un número indeterminado $n > 2$ de valores; además, se trata de una lógica de conjuntos de enunciados, y no de enunciados.

4.4 Teoría de subconjuntos borrosos

«Y no dejamos de estimar tampoco el que en nuestros años, después de haber dominado largamente, desde el filosofante al escolar, la Teoría de Conjuntos como fundamento de todo Cálculo (a saber, una teoría que realizaba la domesticación de la infinitud por la vía de equiparar la serie de los números con un conjunto), haya debido esa Teoría desarrollar, como una especie de herejía suya, los Conjuntos Borrosos, aquéllos a los que los elementos pueden pertenecer más o menos, con la intención ciertamente de ofrecer un artefacto que diera mejor cuenta de turbas o agrupaciones naturales (o sociales —da lo mismo) para las que la noción clásica de 'conjunto' resultaba demasiado rígida y por ello poco servicial, es decir, una vez más, tratando la Lógica de dar razón del 'más o menos' de la continuidad; pero es de agradecer, aparte de la intención, lo revelador de tal invento.»
—Agustín García Calvo [174] (p. 224)

La primera referencia, hasta donde alcanza nuestro conocimiento, a una *teoría de* **conjuntos multivalentes** —que no a lógica multivalente—, data de 1952, y aparece en el libro de Rosser y Turquette [380], dedicado a lógicas multivalentes.

En el binomio conjuntos borrosos – lógicas borrosas, el curso de la historia es a la inversa que en el binomio lógicas multivalentes – conjuntos multivalentes. Si bien nacieron antes las lógicas multivalentes y, posteriormente, los conjuntos multivalentes, en el caso borroso ocurrió al revés, primero vió la luz, en 1965, la teoría de **conjuntos borrosos** —*cfr.* Zadeh [381]—, y después las **lógicas borrosas**, mencionadas de paso en el artículo de 1974 de Menges y Skala [382], y formalizadas en 1976 por Bellman y Zadeh [383], y de las que hablaremos en la Sec. 4.6.

En prácticamente todos los libros sobre conjuntos borrosos, aparece de manera más suscinta o más extensa, su historia (si este término es aplicable, dado el corto espacio de tiempo, desde 1965), así que citaré sólo tres libros: McNeill y Freiberger [384], Klir y Yuan [46] y Trillas, Alsina y Terricabras [316].

Los términos «fuzzy», «borroso», o «difuso» acarrean una connotación negativa en la cultura occidental. El término lógica «fuzzy» parece dirigir nuestra atención en una mala dirección, a la vez que también parece celebrar la neblina mental —*cfr.* McNeill y Freiberger [384]—. Sin embargo, la cultura oriental acepta la coexistencia de contradicciones tal y como refleja el símbolo del Yin y el Yang. Mientras que la lógica aristotélica es la lógica de «A *o* no A», el budismo se refiere a todo lo posible acerca de «A *y* no A».

Muchos piensan que este espíritu tolerante de la cultura oriental fue la razón principal del éxito de la lógica borrosa en Japón. Mientras que la lógica borrosa era atacada en Estados Unidos, las industrias japonesas estaban ocupadas creando una industria de varios miles de millones de euros en torno a ella. Utilizaron lo borroso para redescubrir útiles caseros, como lavadoras y aspiradoras (Matsushita e Hitachi), arroceras (*rice cookers*, electrodomésticos para cocer arroz) (Matsushita y Sanyo), acondicionadores de aire (Mitsubishi), u hornos microondas (Sharp, Sanyo y Toshiba) —*cfr.* José Ángel Olivas [385]—. Otro ejemplo notable fue el estabilizador de imágenes digitales desarrollado por Matsushita, para las cámaras de vídeo CCD. Muchos coches japoneses llevan incorporados ejemplos de sistemas borrosos adaptativos (un híbrido entre sistemas borrosos y redes de neuronas artificiales). Nissan patentó una transmisión automática borrosa que también decidieron portar coches de las marcas Mitsubishi y Honda —*cfr.* McNeill y Freiberger [384]. Todo ello por citar unos cuantos, pues hay muchísimos más ejemplos. Los japoneses ya han superado la cifra de 2.000 patentes relacionadas con aspectos borrosos —*cfr.* Mohaghegh [386] (artículo publicado en noviembre de 2000).

Históricamente, pueden distinguirse tres períodos.

1. Desde 1965 a 1977, conocido como la **fase académica**, y caracterizado por el desarrollo de los fundamentos, aplicaciones teóricas, muchas especulaciones y un número pequeño de aplicaciones específicas.

2. Desde 1978 a 1988, conocido como la **fase de transformación**, en el que además de continuar el desarrollo académico, comienza a conocerse el éxito de un buen número de aplicaciones. Asimismo, comienza a participar activamente la industria y las empresas en las investigaciones, incluyendo lo borroso en sus programas de investigación y desarrollo. Por ejemplo, se prueba con éxito la conducción automática (sin conductor) en el metro de Senday, Japón. Comienzan a aparecer también publicaciones, sociedades profesionales y revistas especializadas dedicadas a la teoría de conjuntos borrosos y sus aplicaciones.

3. En 1989 se inicia lo que se ha llamado «*boom* borroso», caracterizado por un rápido crecimiento en el desarrollo de aplicaciones competitivas. Se desarrolla y comercializa hardware y software borroso: aires acondicionados, cámaras de foto y de video, lavadoras, etc. Grandes empresas en Japón dedican mucho esfuerzo a ello. Emergen más sociedades profesionales, publicaciones y revistas especializadas.

A principios de los 90, se reconoce la teoría de conjuntos borrosos como un miembro más de la área emergente y actualmente en pleno auge de **«soft computing»** —*cfr.* ZADEH [387]; SANGALLI [388].

4.4.1 Una muy breve reseña lexicográfica

El vocablo inglés *fuzzy* es polisémico, a la vez que onomatopéyico, significando[9] «borroso», «difuso», «confuso», «velloso», «peludo», «rizado» (pelo). Las dos traducciones de «*fuzzy*» más difundidas en español son «borroso» y «difuso». Decidir entre uno u otro no es trivial:

- Borroso hace referencia a confuso, y se explicita como confusión en la frontera del conjunto, en clara y expresa oposición a nítido, mientras que el significado de difuso hace referencia a ancho, dilatado, en un sentido también muy claro de que los subconjuntos unitarios de un referencial no vacío y no unitario, al ser considerados como conjuntos estrictamente borrosos, dejan de ser unitarios, pues se difunden, extienden o dilatan, a todo el universo de discurso. El concepto original «*fuzzy set*» es meramente un concepto clasificatorio:

  > *[...] con mayor frecuencia de lo que creemos, no existen criterios de pertenencia definidos de manera precisa para las clases de objetos que encontramos en el mundo real.»*
  > —Lotfi Asker ZADEH [381] (p. 29)

Por ello, en nuestra opinión, tanto da decir que las fronteras de las clases dejan de ser nítidas (*conjunto borroso*), como decir que todos los elementos del referencial dejan de ser nítidos, porque no son elementos, sino nubes de elementos (*conjunto difuso*).

Sin embargo:

- el término español *difu*so, como traducción del término inglés «diffuse», ya estaba asentado en la literatura bayesiana. Nos referimos al conocimiento o información previo, Sir Harold JEFFREYS [389] habla de «conocer poco» («*knowing little*»), Dennis V. LINDLEY [44] de información a priori vaga («*vague*») y Arnold ZELLNER [390], de información difusa («*diffuse*»). Por otro lado, Jorge MURUZABAL [391] apunta otro sentido en el que el término ha sido utilizado en la literatura: se conoce también como información difusa («*diffuse*») aquélla información útil que se presenta entremezclada (secuencialmente) con información irrelevante en una fuente de datos, y por tanto de gran importancia en la extracción automática de conocimiento en grandes bases de datos —*cfr.* MATHEUS, CHAN y PIATETSKY-SHAPIRO [392].

No obstante, el hecho es que se traduce «*fuzzy set*» como *conjunto difuso*, y bastante de lo publicado en español se hace con el término conjunto difuso. Pero también nos encontramos traductores y editores que prefieren el término borroso, por ejemplo, los libros de Bart KOSKO [58] en español, «Pensamiento borroso» y «El futuro borroso o el cielo en un chip». En el primero de ellos, los editores afirman que posiblemente sea «conjunto borroso» la alternativa más ampliamente aceptada —*cfr.* KOSKO [58] (p. 11).

Estamos pues ante un ejemplo de decisión «*fuzzy*»:

$$\text{Aggr}(\alpha[\text{BORROSO}], \beta[\text{DIFUSO}])$$

donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y Aggr es una operación de agregación —*cfr.* §69—. Por ilustrarnos un poco, $\alpha = \beta = 1$ significaría que cada vez que utilizásemos uno utilizaríamos el otro, por ejemplo: «sea A un conjunto borroso-difuso»; $\alpha = \beta = 0$ significaría que habríamos optado por otra denominación; $\alpha = \beta = 1/2$ significaría que nuestra decisión ha sido procurar usar la mitad de las veces uno y la otra mitad el otro; $\alpha, \beta < 1/7$ podría significar que habría entrado en juego otro vocablo, etc.

Nuestro objetivo en este punto ha sido hacer una exposición sobre una controversia que se supone superada. En lingüística existe el concepto de sinonimia y simplemente eso es lo que ocurre. Ante dos sinónimos, la decisión es subjetiva.

[9] Según el Webster's [259]:

fuzz[1] (fuz), *n.* **1.** loose, light, fibrous, or fluffy matter. **2.** a mass or coating of such matter: *the fuzz on a peach.* **3.** *Slang.* a man's very short haircut, similar to a crew cut. –*v.t.* **4. fuzz up,** to make unclear; confuse; bungle: *He fuzzed up the plot line with a lot of emotional nonsense.* [1595-1605; cf. D *voos* spongy, woolly]

fuzzy (fuz´ē), *adj.*, **fuzz·i·er**, **fuzz·i·est. 1.** of the nature of or resembling fuzz: *a soft, fuzzy material.* **2.** covered with fuzz: *a plant with broad, fuzzy leaves.* **3.** indistinct; blurred: *A fuzzy photograph usually means you jiggled the camera.* **4.** muddleheaded or incoherent: *a fuzzy thinker; to become fuzzy after one drink.* [1590-1600; FUZZ[1] + -Y[1]] –**fuzz´i·ly**, *adv.* –**fuzz´i·ness**, *n.* –**Syn. 3.** hazzy, vague, unclear, foggy.

En nuestro caso, optamos por «conjuntos borrosos», quizás por tradición personal: nos hablaron antes de conjuntos borrosos que de conjuntos difusos.

Por citar unos ejemplos de los primeros estudios: los libros de Francisco AZORÍN POCH [393] (1979), y Enric TRILLAS [394] (1980) usan el término «borroso», mientras que la tesis doctoral de Leandro PARDO [395], artículos posteriores suyos [396] (1983) y de José Luis VERDEGAY [397] (1983), usan el término «difuso».

Mas quizás sea peor con los verbos ingleses «*to fuzzify*» y «*to defuzzify*». El primero se ha traducido como «emborronar», «borrosificar», «difuminar» y predominantemente en América Latina como «opacar», «oscurecer» y «nublar» —otros usan «*fuzificar*», creyendo así obviar la cuestión, cuando en verdad la atestiguan—. Las traducciones más frecuentes de «*to defuzzify*» han sido «desborrosificar», «desemborronar», «nitidificar», «precisificar» (Rudolf CARNAP y Susan HAACK) y «aclarar» —aparte de los que usan «desfuzificar».

Nosotros emplearemos, en armonía con la tradición lógica, «**introducir borrosidad**» por «*to fuzzify*» y **«eliminar borrosidad»** por «*to defuzzify*». Con un espíritu más poético, aunque no sabemos si acertado, hemos leído, aunque no logramos recordar dónde, *«agrisar»* —dar color gris— por «*to fuzzify*» y *«ajedrezar»*, *«escaquear»* —formar cuadros de dos colores, como los escaques del tablero de ajedrez—, y *«binarizar»*, por «*to defuzzy*». Estas traducciones de «*to defuzzy*» parecen aceptables, aun cuando, el término «objeto escaqueado» puede estar expuesto a extrañas interpretaciones. Por otro lado, el significado en español de «agrisar», sólo hace referencia a *una* tonalidad de gris.

Claro que, imbuidos, quizás, por el mismo poemario, podríamos traducir «*to fuzzify*» por *«empañar»* y «*to defuzzy*» por *«desempañar»*. Y hablar de *«conectivas empañadas»*[10] (conectivas borrosas, que en realidad son conectivas bivalentes transmutadas mediante un empañamiento de las conectivas bivalentes originales).

Decir por último que en francés, *fuzzy* se traduce por *flou*, en italiano por *sfumato* y en portugués es corriente decir *nebuloso* (lo que no deja de ser una curiosidad, pues ZADEH, en un artículo del año 1962 —*cfr.* pág. 53—, expresaba su indecisión entre los calificativos *fuzzy* y *cloudy*).

4.4.2 Los «conjuntos» borrosos no son conjuntos

Como es bien conocido, la idea de CANTOR de lo que es un conjunto: «cualquier colección en un todo M de objetos definidos y separados, proporcionada por nuestra intuición o nuestro pensamiento» —por cierto, que es la idea natural que posee cualquiera no versado en Matemáticas— es errónea, desde el momento que conduce a paradojas, como la de Bertrand Arthur William RUSSELL: «si la colección de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos fuese un conjunto, entonces, para este conjunto, la propiedad de ser un elemento de sí mismo equivale a no serlo».

Bertrand Arthur William RUSSELL y Alfred North WHITEHEAD resolvieron este problema en sus *Principia Mathematica* (1910), estableciendo una teoría de tipos de colecciones: una colección x puede ser miembro de una colección y, sólamente si y está situada un escalón más arriba en la jerarquía de donde está x. Este sistema tiene infinitas nociones primitivas. Las axiomáticas de Ernst Friedrich Ferdinand ZERMELO, Adolf Abraham Halevi FRAENKEL y Albert Thoralf SKOLEM (ZFS), con dos nociones primitivas: las de conjunto y pertenencia, y la de John VON NEUMANN, Paul Isaac BERNAYS y Kurt GÖDEL (NBG), con tres: conjunto, clase y pertenencia, se han convertido en clásicas, siendo la elección entre ellas una cuestión casi de preferencias. Ambos sistemas son básicamente equivalentes: todo axioma de ZFS es un teorema en NBG, por lo que la consistencia de NBG implica la de ZFS; además, toda fórmula cerrada (sin variables libres) de ZFS que sea un teorema en NBG, lo es en ZFS, de donde la consistencia de ZFS implica la de NBG —*cfr.* ALONSO, BORREGO, PÉREZ y RUIZ [267] (p.xxi).

El lector puede consultar cualquiera de ambas axiomáticas en variadas fuentes, por ejemplo: ALONSO, BORREGO, PÉREZ y RUIZ [267]; LEVY [398]; DEVLIN [399]; TAKEUTI y ZARING [400].

Sea $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ una fórmula bien formada (fbf) del lenguaje de la teoría de conjuntos (LTC) —sin entrar en mayores detalles, piense el lector en una fbf como una propiedad «inteligible» que relaciona las variables $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$—. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ conjuntos (en la formalización de la teoría de conjuntos suelen notarse éstos por minúsculas; las mayúsculas se reservan para las clases). La expresión:

$$\{x : \varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)\} \tag{4.11}$$

representa la idea intuitiva de la colección de todos los conjuntos x que satisfacen $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, y diremos: la **clase** de los x tales que $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

[10] **empañado, da** adj. Dícese de la voz cuando no es sonora y clara. ||Dícese del cristal u otra superficie pulimentada cuando está cubierta de vapor de agua. Ú.t.c.s.

Todo conjunto a puede considerarse como una clase, la asociada a la fbf: $\varphi(x, a) \equiv x \in a$. Sin embargo hay clases (las llamadas **propias**) que no son conjuntos, por ejemplo $\{x : x \notin x\}$. Decir que la clase $A = \{x : \varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)\}$ es un conjunto significa que: $\exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n))$.

Sean A y B clases. El **producto cartesiano** de A por B (que se nota $A \times B$) es la clase:

$$\{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge x \in B\} \tag{4.12}$$

(si A y B son conjuntos, entonces $A \times B$ es un conjunto, pues $A \times B \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B))$, y por el axioma de las partes, la clase de las partes de un conjunto es un conjunto).

Se dice que una clase R es una **relación** binaria (resp., ternaria, cuaternaria, ..., n-aria) precisamente si todos sus elementos son pares ordenados (ternas, cuaternas, ..., n-tuplas ordenadas).

Si R es una relación (binaria) entonces, se llama **dominio** de R a la clase:

$$\operatorname{dom} R = \{x : \exists y\, (\langle x, y\rangle \in R)\} \tag{4.13}$$

y **rango** o **recorrido** de R a la clase:

$$\operatorname{rang} R = \{y : \exists x\, (\langle x, y\rangle \in R)\} \tag{4.14}$$

(obsérvese que $R \subseteq \operatorname{dom} R \times \operatorname{rang} R$; además, si R es un conjunto, entonces $\operatorname{dom} R$ y $\operatorname{rang} R$ son conjuntos).

Una **relación funcional** es una relación R tal que:

$$\forall x \forall y \forall z\, (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, z\rangle \in R \rightarrow y = z) \tag{4.15}$$

Sean a y b conjuntos. Una **función** (parcial) de a en b (se nota $f : a \to b$) es una relación funcional tal que $\operatorname{dom} R \subseteq a$ y $\operatorname{rang} R \subseteq b$. Una **aplicación** (o función total) de a en b es una función (parcial) tal que $\operatorname{dom} R = a$.

Sea a conjunto no vacío (que se denomina universo de discurso). Una **función de pertenencia** es una aplicación de a en $[0, 1]$ —si bien, más adelante, veremos otras alternativas—. La expresión **«"conjunto" borroso»** es sinónimo de «función de pertenencia».

En adelante, suprimiremos las comillas, como es habitual, y abusando del lenguaje, hablaremos de conjuntos borrosos, e indistintamente de función de pertenencia. En definitiva, que adoptaremos la notación más frecuente en la literatura que trata temas borrosos.

Por cierto, que los conjuntos borrosos no se ven afectados por la paradoja propuesta por Bertrand Arthur William RUSSELL, con la que comenzábamos esta sección: un conjunto borroso puede, a la vez, pertenecer y no pertenecer a sí mismo —*cfr.* §4.8.

4.4.3 Operaciones con conjuntos borrosos

Recordamos, a continuación, una serie de conceptos de la teoría de subconjuntos borrosos.

Sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso no vacío. Un subconjunto *nítido* (*crisp*) A de $\mathcal{U}$ es cualquier subconjunto ordinario definido por su función característica $c_A : \mathcal{U} \to \{0, 1\}$. Un **subconjunto borroso** A de $\mathcal{U}$ difiere de uno nítido en que el rango de su función característica, renombrada como **función de pertenencia**[11] es $[0, 1]$ en vez de $\{0, 1\}$, o sea $m_A : \mathcal{U} \to [0, 1]$. El conjunto borroso vacío es tal que su función de pertenencia es la constante 0. Habitualmente se define un conjunto borroso por su función de pertenencia —*cfr.* GOGUEN [405]—, de tal manera que se simplifica la notación: en vez de $m_A(u)$ se usa $A(u)$. Así lo haremos nosotros.

Originalmente, ZADEH definió [381] las operaciones, haciendo un símil con las conectivas de las lógicas multivalentes de ŁUKASIEWICZ. El **complemento** A^c de un conjunto borroso A se define, para todo $u \in \mathcal{U}$ como: $A^c(u) = 1 - A(u)$ —*cfr.* Fig. 4.1—. Dados dos conjuntos borrosos A y B, se define, para todo $u \in \mathcal{U}$, su **intersección**:

$$(A \cap B)(u) = \min\{A(u), B(u)\} \tag{4.16}$$

y su **unión**:

$$(A \cup B)\,(u) = \max\{A(u), B(u)\} \tag{4.17}$$

[11] En el transcurrir de los años, ZADEH ha usado otros nombres para la función de pertenencia (*membership function*): «*possibility function*» —ZADEH [401]—, «*fuzzy restriction*» —ZADEH [402], [403] (p. 29), [401] (p. 6)—, «*degree of ease*» —ZADEH [403] (p. 29)—, «*fuzzy naming relation*» —ZADEH [404] (p. 33)—, «*compatibility function*» —ZADEH [401] (p. 6).

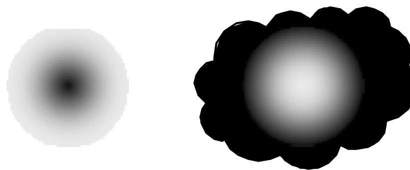


Figura 4.1: *Una representación gráfica de un conjunto borroso y su complementario. Observe el lector que cuando decimos que un conjunto borroso es aquél que no posee una frontera nítida, no nos referimos a la frontera gráfica, al contorno de un dibujo que represente al conjunto borroso, sino a una frontera de pertenencia.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Como notan BELLMAN, KALABA y ZADEH [406] (p.2), si las funciones de pertenencia de los conjuntos borrosos A y B son tri-valoradas, entonces (4.16) y (4.17) llevan a la lógica tri-valorada de Stephen Cole KLEENE [376] (p. 334). En ese mismo artículo [406] (pp.4ss.), BELLMAN, KALABA y ZADEH presentan las primeras ideas de aplicación de la naciente teoría borrosa en el terreno de la clasificación de patrones, viendo una categoría de patrones como un conjunto posiblemente borroso, y haciendo un esbozo muy genérico considerando la distancia como la máxima de la mínima [406] (p.6).

Fue el mismo ZADEH, y en el mismo año 1965, quien propuso dos expresiones alternativas para la unión y la intersección de los conjuntos borrosos [407], a saber, el producto para la **intersección**:

$$(A \cap B)(u) = A(u)B(u) \tag{4.18}$$

y la «suma probabilística» para la **unión**:

$$(A \cup B)(u) = A(u) + B(u) - A(u)B(u) \tag{4.19}$$

Se inicia así el camino hasta llegar al punto de vista actual de utilización de una **norma triangular** para la intersección, una **conorma triangular** para la unión y una **negación involutiva** para la complementación (*cfr. infra* §4.6).

Al igual que los valores de una función característica o indicadora, 0 y 1, son conocidos como *bits* (*binary units*), KOSKO [408] propone llamar **FIT** (*Fuzzy unIT*) a cualquier valor $u \in [0, 1]$.

Pues bien, concretemos estas definiciones.

Definición 5 *Sea $\mathcal{U} \neq \varnothing$ un universo de discurso. Un **subconjunto borroso** A de $\mathcal{U}$, se caracteriza mediante una función similar a la función característica o indicadora $\chi_A : \mathcal{U} \to \{0, 1\}$, de un conjunto clásico, con la única diferencia de que la calificación numérica de los elementos de $\mathcal{U}$ no se hace en $\{0, 1\}$, sino en $[0, 1]$. Es decir, un subconjunto borroso de $\mathcal{U}$ está caracterizado por una función (de pertenencia)[12] $m_A : \mathcal{U} \to [0, 1]$, tal que para todo elemento $u \in \mathcal{U}$, $m_A(u)$ se interpreta como que expresa el «grado de pertenencia» de u a A.*

Observación 6 *Muchos estudiosos, en la medida de nuestro conocimiento, suelen decir que un conjunto nítido es un caso particular de un conjunto borroso, o que la teoría de conjuntos es un caso particular de la teoría de conjuntos borrosos —cfr.* ZADEH *[411]—. Esto, al pie de la letra, puede resultar tan absurdo como, por ejemplo, la pretendida reducción de Charles* ELKAN *de la lógica borrosa a la bivalente —cfr. supra §4.2—. Sería tanto como subsumir lo cuantitativo en lo cualitativo. Tampoco son conjuntos borrosos aquéllos cuya función de pertenencia se valora en lógicas con un número finito de valores (finitamente multivaloradas) —cfr. infra §4.6.*
*Puede que como en otras ramas de la Matemática, el adjetivo «propio» sea correcto para reflejar esta distinción. Así decimos que un conjunto borroso propio, o **propiamente borroso**, es todo conjunto cuya función de pertenencia toma, y puede que entre otros, infinitos valores distintos en el intervalo $[0, 1]$. El resto de conjuntos, nítidos y con funciones de pertenencia finitamente multivaloradas, se denominarían conjuntos borrosos*

[12] Encontramos una idea previa, presente en un método de clasificación (supervisada) no paramétrica (método de PARZEN). Una función potencial recoge la influencia decreciente de una observación (patrón muestral) sobre el prototipo (patrón «teórico»), a medida que aumenta la distancia entre ambos. El promedio de los «potenciales» de las observaciones individuales, con respecto al prototipo, expresa el **«grado de pertenencia»** del prototipo a la clase a la que pertenece la muestra (el vector observación). Este concepto de **función potencial** fue utilizado por PARZEN [409], aunque el nombre se debe a BASHKIROV, BRAVERMAN y MUCHNIK [410].

***impropios** o **degenerados**. En todo caso, y con el fin de evitar posibles confusiones, nosotros seguiremos la convención impuesta por el resto, abusaremos igualmente del lenguaje, y seremos libres de entender por conjunto borroso cualquiera cuya función de pertenencia se valore en* $[0, 1]$.

«Las cosas no "borrosificadas" o sólo trivialmente "borrosificadas" son nítidas; la nitidez es la cualidad opuesta a lo borroso, aunque técnicamente sea un caso particular.»
—J. A. Goguen [405] (p. 157)

Dos son las notaciones más habituales para un conjunto borroso: como un conjunto de pares ordenados, donde la primera componente es un elemento del universo y la segunda su «grado de pertenencia» al conjunto borroso:

$$A = \{(u, m_A(u)) : u \in \mathcal{U}\}$$

o bien, notando una enumeración por + y un par por / (notación de Zadeh):

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{n} m_A(u_i)/u_i, \text{ si } A \text{ es finito,} \\ A &= \sum_{u\in\mathcal{U}} m_A(u)/u, \text{ si } A \text{ es infinito numerable,} \\ A &= \int_{u\in\mathcal{U}} m_A(u)/u, \text{ si } A \text{ es infinito no numerable.} \end{aligned}$$

En vez de decir que un conjunto borroso es un par (A, m_A), la notación se relaja si no hacemos distinción alguna entre el conjunto y su función de pertenencia. Así haremos la identificación notacional $A : \mathcal{U} \to \{0, 1\}$ para un conjunto nítido A y $A : \mathcal{U} \to [0, 1]$ para un conjunto borroso A. En ello seguimos, entre tantos muchos, a Goguen [405]. Denotamos mediante $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$ el conjunto de todos los subconjuntos borrosos de $\mathcal{U}$.

El **conjunto borroso vacío** $\varnothing$ se define por:

$$\begin{aligned} \varnothing : \mathcal{U} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \varnothing(x) = 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Definición 7 *Dado* $\alpha \in [0, 1]$*, el **α-corte**[13] de* A *es el conjunto nítido:*

$$^{\alpha}A = \{u \in \mathcal{U} : A(u) \geq \alpha\} \tag{4.21}$$

El 1*-corte de un conjunto borroso* A *suele llamarse la **parte nítida** (o clásica) de* A *—cfr.* Trillas*,* Alsina *y* Terricabras*—. El **conjunto de niveles** de un subconjunto borroso* A *es:*

$$\Lambda(A) = \{\alpha \in [0, 1] : \exists u \in \mathcal{U}, A(u) = \alpha\} \tag{4.22}$$

Todos los α*-cortes de un conjunto dado* A*, forman una sucesión, decreciente según la inclusión, de conjuntos nítidos, o sea:*

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1], \alpha_1 < \alpha_2 \Longrightarrow {}^{\alpha_1}A \supseteq {}^{\alpha_2}A \tag{4.23}$$

Todo conjunto borroso puede representarse de manera única mediante la familia[14] de todos sus α-cortes. Usualmente se habla de una descomposición del conjunto —*cfr.* Zadeh [413]—. Para conseguirla, consideremos, para cada $\alpha \in [0, 1]$, el conjunto borroso:

$$_{\alpha}A = \alpha \cdot {}^{\alpha}A \tag{4.24}$$

donde ${}^{\alpha}A$ representa su función característica (vista como una función de pertenencia particular). El **teorema de descomposición** afirma que todo conjunto borroso A, es la unión nítida de todos los conjuntos ${}_{\alpha}A$, variando α en $\Lambda(A)$ —*cfr.* Klir y Yuan [46] (teor. 2.7)—, o sea, que todo subconjunto borroso A de $\mathcal{U}$, puede

[13] Kaufmann y Gil Aluja [412] (pp. 35ss.) lo llaman **subconjunto de confianza al nivel de presunción** α. Enric Trillas, Claudi Alsina y Josep-María Terricabras lo denominan **α-nivel de nitidez** —[316] (p. 154)—. El α-corte o nivel de nitidez α de un subconjunto borroso A es el subconjunto clásico que consta de todos los elementos u del universo $\mathcal{U}$ compatibles con el predicado definitorio A, al menos al nivel α.

[14] Cuando una clase de objetos matemáticos se obtiene mediante una forma funcional o expresión variando una serie de parámetros de la expresión, es usual utilizar el nombre de **familia** en vez de clase o colección. En el caso que nos ocupa, la clase de los α-cortes de un conjunto borroso se obtiene variando el parámetro α en el rango $[0, 1]$. De ahí que sea apropiada la denominación de familia.

descomponerse en una familia decreciente de subconjuntos nítidos de $\mathcal{U}$, ponderada con una familia creciente de índices ponderales[15].

Definición 8 *La **altura** de A es $h(A) = \sup\{A(u) : u \in \mathcal{U}\}$. Se llama **núcleo** de A a su 1-corte,* $\text{core}(A) = \{u \in \mathcal{U} : A(u) = 1\}$. *Un conjunto borroso A se dice que es **normal** si* $\text{core}(A) \neq \varnothing$, *o en otras palabras si $h(A) = 1$. Se dice **subnormal** en cualquier otro caso.*

Definición 9 *Consideremos como universo de discurso el retículo normado denso $\mathcal{U} = (U, \preceq)$. Un subconjunto borroso $A \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$, se dice que es **abierto por la izquierda** si $\lim_{u\downarrow} A(u) = 1$ y $\lim_{u\uparrow} A(u) = 0$, **abierto por la derecha** si $\lim_{u\downarrow} A(u) = 0$ y $\lim_{u\uparrow} A(u) = 1$, **abierto** si lo es por la izquierda y por la derecha, y **cerrado** si $\lim_{u\downarrow} A(u) = \lim_{u\uparrow} A(u) = 0$ —cfr.* Jang, Sun *y* Mizutani *[416].*

Definición 10 *El **soporte** de A es el conjunto* $\text{supp}(A) = \{u \in \mathcal{U} : A(u) > 0\}$. *Un conjunto borroso A se dice **acotado** precisamente si su soporte es acotado. Diremos que un conjunto borroso A es **compacto** precisamente si es cerrado y acotado.*

Definición 11 *Si $\mathcal{U}$ es el retículo vectorial $(U, \preceq)$, entonces decimos que un subconjunto borroso A es **convexo** precisamente si dados cualesquiera $u_0, u_1 \in U$, entonces, para todo $u \in [\![u_0, u_1]\!]$:*

$$A(u) \geq \min\{A(u_0), A(u_1)\} \tag{4.25}$$

Teorema 12 *Sea $\mathcal{U}$ el retículo vectorial $(U, \preceq)$. Entonces —cfr.* Zadeh *[381]—, ser convexo un subconjunto borroso A de U, equivale a que todos sus α-cortes $(0 < \alpha \leq 1)$ sean subconjuntos convexos de U.*

Definición 13 *Dados $A, B \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$, se define el **conjunto borroso medio** de A y B como:*

$$\frac{A+B}{2}(x) = \frac{A(x)+B(x)}{2} \tag{4.26}$$

Definición 14 *Una **relación borrosa** entre conjuntos nítidos A y B es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.*

Definición 15 *Sea $A \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$. La **cardinalidad escalar** —o* recuento sigma*— de A se define, en el caso continuo, como:*

$$|A| = \int_{u\in\mathcal{U}} A(u)du \tag{4.27}$$

Definición 16 *Sea $A \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$. El **centro de gravedad** de A se define, en el caso continuo, como:*

$$G(A) = \frac{\int_{u\in\mathcal{U}} u \cdot A(u)du}{|A|} \tag{4.28}$$

Observemos que las **funciones de densidad de probabilidad** son justamente aquéllos subconjuntos borrosos cuya cardinalidad escalar es uno.

[15] La figura de más abajo, muestra el primer mapa topográfico, publicado en París, en 1782, debido a Marcellin Du Carla-Boniface (*Expression des nivellements; ou, Méthode nouvelle pour marquer sur les cartes terrestres et marines les hauteurs et les configurations du terrain* [París, 1782]), que aparece en el artículo de François De Dainville [414] (p. 396) —*cfr.* Hankins [415] (Fig. 15)—. En él, el lector puede apreciar la idea de «apilamiento», en este caso de las diferentes isohipsas (o curvas de nivel, que unen todos los puntos de igual distancia vertical, altitud o cota).



El lector puede imaginar una colina como la representación de un subconjunto borroso bidimensional.

4.4.4 «Mi» 7 puede no ser «tu» 7

> «Borrosificar *es comunicar una estructura borrosa a una definición (concepto), teorema o incluso a toda una teoría. Este proceso no es necesariamente único [...] El* Principio de Borrosificado *proporciona un método básico: Un algo borroso (o L-borroso o L-) es un L-conjunto de algos (esto es, un subconjunto L-borroso del conjunto de algos).»*
> —J. A. GOGUEN [405] (p. 156)

A partir del Principio de Borrosificado de GOGUEN, resulta lícita la siguiente definición —*cfr.* TRILLAS, ALSINA y TERRICABRAS [316] (p. 170).

Definición 17 *Se entiende por **cantidad borrosa**, cualquier subconjunto borroso de* $\mathbb{R}$*.*

Definición 18 *Sea* $X \subset \mathbb{R}$*. Se denomina **valor borroso** a cualquier función* $A : X \rightarrow [0,1]$*. Si* X *es continuo, se exige que* A *sea medible* BOREL *(Emile Félix Edouard Justin), esto es, medible respecto de la* σ*-álgebra de* BOREL[16] *de* X*.*

Definición 19 *Sea* A *un valor borroso. Se denomina **conjunto resolución-**γ *para* A*, al conjunto:*

$$D_\gamma(A) = \{x : x = n\gamma,\ x \in \operatorname{supp}(A) \wedge n \in \mathbb{N}^+\} \tag{4.29}$$

Este conjunto discretiza el dominio real según la precisión en la que estemos interesados. Por ejemplo, si queremos medir la altura de una persona, de poco nos sirve, a nosotros como humanos, saber que mide $1,71234567$ metros; habitualmente utilizamos sólo dos decimales para su expresión: mide $1,71$ metros. Estaríamos así utilizando un conjunto resolución-$0,01$ para el valor borroso $A \equiv$«altura de una persona».

Definición 20 *Se dice que* $A : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ *es **semicontinua superiormente**, precisamente si:*

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R})(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow A(x) < A(x_0) + \varepsilon) \tag{4.30}$$

[16] Sea $\mathcal{U}$ un universal no vacío. Se dice que una clase de subconjuntos $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(\mathcal{U})$ posee **estructura de álgebra**, precisamente si: *(i)* $E \in \mathcal{A}$, *(ii)* $\forall A \in \mathcal{A},\ E \backslash A \in \mathcal{A}$, e *(iii)* $\forall A, B \in \mathcal{A},\ A \cup B \in \mathcal{A}$. Se dice que una clase de subconjuntos $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(\mathcal{U})$ posee **estructura de σ-álgebra** o **tribu**, precisamente si: *(i)* $E \in \mathcal{A}$, *(ii)* $\forall A \in \mathcal{A},\ E \backslash A \in \mathcal{A}$, e *(iii)* Para toda sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^+} \subseteq \mathcal{A}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Decir, de paso, que la condición *(i)* puede ser cambiada por *(i'):* $\varnothing \in \mathcal{A}$, y la *(ii)* por *(ii'):* para toda sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^+} \subseteq \mathcal{A}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Por **familia probabilizable** de subconjuntos, se entiende una álgebra, si E es finito, o una σ-álgebra, si E es infinito numerable. Sea $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra. Al par $(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ se le denomina **espacio medible** o **probabilizable** y a los elementos de $\mathcal{A}$, **conjuntos medibles** (respecto de la σ-álgebra $\mathcal{A}$) o conjuntos $\mathcal{A}$-medibles.

Consideremos el espacio topológico $(\mathcal{U}, \mathfrak{T})$. Se denomina **$\sigma$-álgebra de Borel** sobre $\mathcal{U}$ a la σ-álgebra engendrada por los abiertos de la topología, es decir, a la mínima σ-álgebra que contiene a todos los abiertos de $\mathcal{U}$ para la topología$^{(*)}$ $\mathfrak{T}$. Los conjuntos pertenecientes a la σ-álgebra de BOREL, se denominan **conjuntos de Borel** o **borelianos**. Mientras no haya lugar a confusión con la topología, notaremos simplemente por $B(\mathcal{U})$ a la σ-álgebra de BOREL. Los cerrados de la topología también son conjuntos de BOREL. De hecho, $B(\mathcal{U})$ también puede engendrarse a partir de los cerrados de la topología. Un ejemplo: el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathfrak{r})$, donde $\mathfrak{r}$ es la topología usual$^{(**)}$ sobre $\mathbb{R}$. $B(\mathbb{R})$ está engendrada por cualquiera de las siguientes clases: *(i)* la clase de todos los subconjuntos cerrados; *(ii)* la clase de todos los intervalos de la forma $(-\infty, b]$; *(iii)* la clase de todos los intervalos de la forma $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Es sencillo construir la **mínima álgebra** que contiene a una clase $\mathcal{C}$ no vacía de subconjuntos de $\mathcal{U}$. La clase $\mathcal{C}_3$, construida iterativamente en la forma siguiente, es la mínima álgebra que contiene a la clase $\mathcal{C}$ —*cfr.* IBARROLA, PARDO y QUESADA [417] (p. 28):

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \{\varnothing, \mathcal{U}\} \cup \{A : A \in \mathcal{C} \vee \mathcal{U} \backslash A \in \mathcal{C}\} \\
\mathcal{C}_2 &= \left\{B : B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i, \text{ con } A_i \in \mathcal{C}_1\right\} \\
\mathcal{C}_3 &= \left\{C : C = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \text{ con } B_i \in \mathcal{C}_2 \wedge B_i \cap B_j = \varnothing\right\}
\end{aligned}$$

Por el contrario, no existe ningún método para construir la **mínima σ-álgebra** que contiene a una clase $\mathcal{C}$ no vacía de subconjuntos de $\mathcal{U}$, si bien los teoremas de la clase monótona y de las estructuras de DYNKIN (Eugene Borisovich, 1924-), aportan propiedades que satisface tal mínima σ-álgebra —*cfr.* IBARROLA, PARDO y QUESADA [417] (pp. 30-38).

$^{(*)}$ Dado un conjunto $\mathcal{U}$, se dice que $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{U})$ es una **topología** sobre $\mathcal{U}$, si satisface —*cfr.* HINRICHSEN y FERNÁNDEZ MUÑIZ [279] (p. 64): *(i)* $\varnothing, \mathcal{U} \in \mathfrak{T}$, *(ii)* $\forall A, B \in \mathfrak{T},\ A \cap B \in \mathfrak{T}$, e *(iii)* $\forall_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathfrak{T},\ \cup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathfrak{T}$. Los elementos de $\mathfrak{T}$, se llaman abiertos. Dados un conjunto $\mathcal{U}$ y una topología $\mathfrak{T}$ sobre $\mathcal{U}$, al par $(\mathcal{U}, \mathfrak{T})$ se le llama **espacio topológico**.

$^{(**)}$ Siempre que se considere $\mathbb{R}$ como espacio topológico sin especificar la topología, se entiende que se trata de $(\mathbb{R}, \mathfrak{r})$, siendo $\mathfrak{r}$ —*cfr.* HINRICHSEN y FERNÁNDEZ MUÑIZ [279] (p. 66):

$$\mathfrak{r} = \{\cup_{\alpha \in I} \{(a_\alpha, b_\alpha) : \forall_{\alpha \in I} a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}\}\}$$

donde I es un conjunto (finito o no) de índices.

La semicontinuidad superior de A es equivalente que todos sus α-cortes, salvo ${}^0A$, son conjuntos cerrados.

Definición 21 *Un **número borroso** es cualquier subconjunto borroso de números reales, convexo, semicontinuo superiormente, normal, y con soporte acotado.*

Observación 22 *Algunos autores denominan **intervalo borroso** a lo que nosotros hemos denominado número borroso, reservando esta última denominación para el caso de ser el núcleo unitario.*

Notaremos por $\mathfrak{N}$ la clase de todos los números borrosos.

Las **operaciones entre números borrosos** —*cfr.* Mizumoto y Tanaka [418]:

$$(A+B)(x) = \sup_{r\in\mathbb{R}} \min\{A(r), B(x-r)\} \tag{4.31}$$

$$(A-B)(x) = \sup_{r\in\mathbb{R}} \min\{A(r), B(r-x)\} \tag{4.32}$$

$$(A\cdot B)(x) = \sup_{r\in\mathbb{R}^*} \min\{A(r), B(x/r)\} \tag{4.33}$$

$$(A/B)(x) = \sup_{r\in\mathbb{R}} \min\{A(xr), B(r)\} \tag{4.34}$$

son casos particulares del *principio de extensión de* Zadeh —*cfr. infra* §4.9.1.

Las **identidades aditiva y multiplicativa** en $(\mathfrak{N}, +, \cdot)$ son:

$$\overline{0} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \qquad \overline{1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases} \tag{4.35}$$

El **simétrico** de A se define como $\overline{0} - A$. A partir de las Ecs. (4.31) y (4.32), se obtiene:

$$(-A)(x) = A(-x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \tag{4.36}$$

$$A - B = A + (-B) \tag{4.37}$$

El **valor absoluto** $|A|$ de $A \in \mathfrak{N}$, se define por:

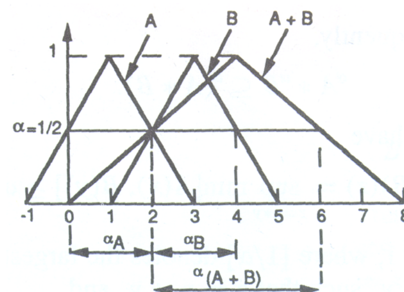
$$|A|(x) = \begin{cases} \max\{A(x), A(-x)\} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{4.38}$$

Las operaciones entre números borrosos pueden definirse también a partir de operaciones entre sus α-cortes —*cfr.* Mizumoto y Tanaka [418]; Kaleva y Seikkala [419] (p. 217); Kaufmann y Gil Aluja [412] (pp. 49-58).

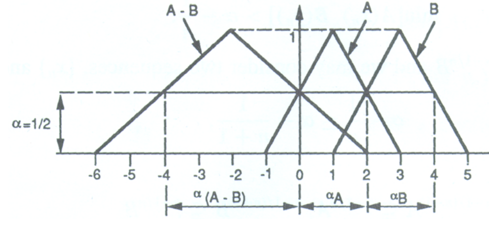
Dados $A, B \in \mathfrak{N}$, sean, para todo $\alpha \in (0,1]$, ${}^\alpha A = [a_0^\alpha, a_1^\alpha]$, ${}^\alpha B = [b_0^\alpha, b_1^\alpha]$. Entonces, por ejemplo, el valor absoluto está definido como:

$${}^\alpha(|A|) = [\max\{0, a_0^\alpha, -a_1^\alpha\}, \max\{|a_0^\alpha|, |a_1^\alpha|\}] \tag{4.39}$$

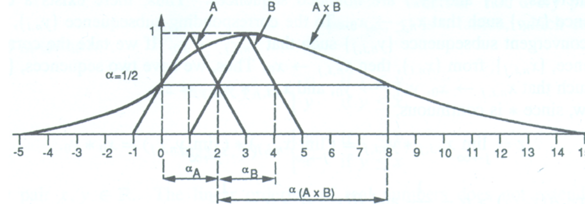
Las operaciones básicas quedan redefinidas de la siguiente manera —la fuente de las representaciones es el libro de George J. Klir y Bo Yuan [46] (p. 107):



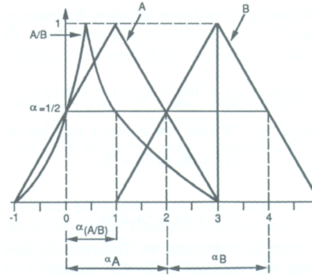
$${}^\alpha(A+B) = [a_0^\alpha + b_0^\alpha, a_1^\alpha + b_1^\alpha] \tag{4.40}$$



$$^{\alpha}(A - B) = [a_0^{\alpha} - b_1^{\alpha}, a_1^{\alpha} - b_0^{\alpha}] \tag{4.41}$$



$$^{\alpha}(A \cdot B) = [a_0^{\alpha} \cdot b_0^{\alpha}, a_1^{\alpha} \cdot b_1^{\alpha}], \text{ para } A, B \in \mathfrak{N}^+ \tag{4.42}$$



$$^{\alpha}(\overline{1}/A) = \left[\frac{1}{a_1^{\alpha}}, \frac{1}{a_0^{\alpha}}\right] \text{ (se muestra } A/B) \tag{4.43}$$

Como sugirieron Rudolf KRUSE y MEYER [420] y VIERTL [421], la imprecisión de un dato puntual puede modelarse utilizando un número borroso. Expresiones como alrededor de x, cercano a x, o aproximadamente x, pueden representarse mediante números borrosos —*cfr.* COX [422]; BOJADZIEV y BOJADZIEV [423]—. De este modo, describimos la imprecisión en los valores de la evidencia mediante conjuntos borrosos ordinarios, viéndolos así realmente como datos borrosos —*cfr.* SCHNATTER [424]—.En el siguiente apartado, vemos un ejemplo de todo esto.

4.4.5 «Un» 7 «menos» 7 que «el» 7: sonómetros borrosos, desempeño de tareas y evaluación de capacidades subjetivas

La mayoría de los autores entiende por número borroso lo mismo que nosotros. Sólo unos poquitos no exigen la hipótesis de normalidad para ellos. Por nuestra parte, hacemos una distinción explícita entre número borroso (n.b.) y **cuasi-número borroso**, entendiendo por éste un número borroso no normal. Una definición alternativa de cuasi-número borroso es la que sigue.

Definición 23 *Decimos que* $A : \mathbb{R} \to [0,1]$ *es un* ***cuasi-número borroso*** *(o dicho alternativamente, un* número borroso no necesariamente normal*) si y sólo si existen* $a, b, \omega_1, \omega_2, k \in \mathbb{R}$*, siendo* $\omega_1 < a \leq b < \omega_2$*,* $k \leq 1$ *y tal que:*

$$A(x) = \begin{cases} k & si\ x \in [a,b] \\ l(x) & si\ x \in (-\infty, a) \\ r(x) & si\ x \in (b, +\infty) \end{cases} \tag{4.44}$$

donde $l : (-\infty, a) \to [0,1]$ *es monótona creciente, continua por la derecha y tal que* $\forall x \in (-\infty, \omega_1), l(x) = 0$ *y* $r : (b, +\infty) \to [0,1]$ *es monótona decreciente, continua por la izquierda y tal que* $\forall x \in (\omega_2, +\infty), r(x) = 0$*. Si* $k = 1$*, diremos que se trata de un* número borroso.

Por poner un ejemplo ilustrativo de un supuesto en el que los cuasi-números borrosos son de utilidad, hablemos de **sonómetros** (aparatos medidores de nivel sonoro).

Inicialmente, los sonómetros eran analógicos, con un marcador de esfera y una aguja o puntero —*cfr.* Fig. 4.2—. Dependiendo del sonido que se estuviese midiendo, podría ocurrir que las fluctuaciones sucediesen tan rápidamente que fuese imposible determinar la posición media de la aguja.



Figura 4.2: *Pantalla de un sonómetro analógico.*

Para amortiguar este hecho, los sonómetros emplean una ponderación de frecuencias y una ponderación exponencial temporal —*cfr.* Yeager y Marsh [425]—. En realidad, la señal registrada por el micrófono, es: *(i)* ajustada por el control de rango de nivel, *(ii)* amplificada, *(iii)* modificada por la ponderación de frecuencia, y *(iv)* promediada para el tiempo (rectificada). Es, entonces, cuando se muestra en un aparato indicador o lector (*readout*).

La precisión de los sonómetros —*cfr.* Johnson, Marsh y Harris [426] (p. 5.18)— está regulada por diferentes normativas nacionales e internacionales. Por ejemplo, el *American National Standard Specification for Sound Level Meters*, ANSI S1.4-1983, distingue tres clases de precisión, según la tolerancia que se permita: Clase (tipo) 0 (Laboratorio), las de menor tolerancia permitida; Clase (tipo) 1 (Precisión); y Clase (tipo) 2 (Propósito general), las de mayor tolerancia permitida.

Actualmente, los sonómetros presentan la información de manera instantánea (en la medida en que se actualice) en un indicador que puede ser analógico, como el de la Fig. 4.2, semi- o cuasi analógico (por lo general, mediante gráficos de barras) o digital (numérico). También pueden proporcionarnos el rango del nivel sonoro en un intervalo de tiempo dado, su media y desviación.

En cualquier caso, todas ellas son medidas inciertas, incluidos esos estadísticos, pues el referencial es un conjunto de datos imprecisos. Y, creemos no banal, pensar en futuros **sonómetros borrosos**, que permitan presentar su información de acuerdo a una partición lingüística especificada por el usuario. Imagina una vocecita, procedente de tu ropa, que de repente te diga:

> «Sara, como permanezcas más de 10 minutos en este sitio, la probabilidad de que sufras una pérdida auditiva es muy alta.»

Pues bien, imaginemos que se hubiese hecho una estimación de la fiabilidad de un sonómetro, interpretada como credibilidad en las medidas proporcionadas por el aparato. A partir de dicha estimación, se concluye que la medición proporcionada por el sonómetro es más fiable en ruidos altos que en bajos, estableciéndose empíricamente además una relación lineal —*cfr.* Fig. 4.3—. Puede parecer lógico incluso establecer un umbral inferior de fiabilidad en $\frac{1}{2}$, es decir, que la altura de cada número borroso sea mayor o igual que $\frac{1}{2}$.

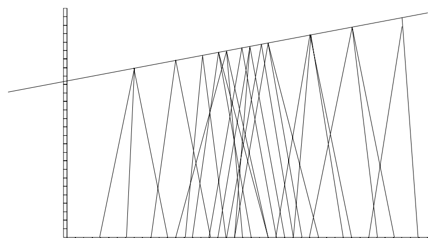


Figura 4.3: *Cuasi-números borrosos triangulares que representan las mediciones proporcionadas por un sonómetro que es más fiable en ruidos altos que en bajos (habiéndose establecido empíricamente además una relación lineal).*
— Fuente: Elaboración propia.

Algo similar ocurre si pensamos en el **desempeño de tareas**: la fiabilidad —interpretada como confianza en el trabajador— puede que no sea la misma, según la tarea. Otro caso que pensamos ocurre en el **supuesto de**

evaluación de capacidades subjetivas. ¿«Mi» 7 es «tu» 7? Supongámoslos nítidos. ¿Por qué la respuesta ha de ser sí? Dado que pudiera definirse un 7 absoluto, objetivo, ¿por qué «mi» 7 es igual al «tuyo»? A lo mejor «mi» 7 participa del 7 objetivo en un 80 por ciento y el «tuyo» lo hace en un 90 por ciento. Y lo mismo pasa, ante una **valoración de la capacidad de juicio del evaluador**. Clásicamente, si un evaluador no es óptimo, y él ha calificado la capacidad de alguien respecto de algo, como 7, entonces, si este 7, se multiplica por un coeficiente (la ponderación asignada al evaluador, al dudarse de su óptima capacidad evaluadora), la nota del enjuiciado se reduce, de modo que el 7 ya no es un 7. Sin embargo, con los cuasi-números borrosos, el 7 seguirá siendo un 7, sólo que un 7 «menos» 7.

> *«Al hombre que hace todo lo que puede, no podemos decirle que no hace lo que debe.»*
> —Antonio de Guevara <*Epístolas familiares*>

No obstante lo dicho en esta sección, estas cuestiones se despliegan en caminos paralelos a por donde discurren las páginas de nuestra Tesis.

> *«Llevo usando el sistema de puntuación de 1 a 10 desde hará unos quince años, pero hasta época muy reciente no me di cuenta de un hecho muy significativo, y es que no todo el mundo tiene una escala de 1 a 10. Hace algunos inviernos alquilé un apartamento en Park City (Utah), para ir a esquiar con mis tres hijos Julia, Dwight y John. Al cabo de un par de días en Park City nos pusimos a debatir si, para cambiar, debíamos ir a la estación de esquí de Snowbird, al otro lado de la montaña. No había manera de decidirlo, conque por último le pregunté a John, el benjamín:*
> *—En una escala de uno a diez, ¿qué te parecería ir a Snowbird?*
> *—Un siete —dijo él, lo que no me sacaba en absoluto del apuro, pero entonces el chico agregó una cosa muy profunda:*
> *—Recuerda que en mi escala no hay ochos ni nueves ni diez —dijo.*
> *Era verdad. John es un muchacho muy tranquilo y jamás se entusiasma demasiado por nada, aunque, por otra parte, tampoco suele deprimirse. Un verano me lo llevé a Europa para practicar el alpinismo, y él escaló la cima del Matterhorn, hazaña increíble teniendo en cuenta que su experiencia montañera se había limitado a dos cimas hasta entonces, y ninguna con escalada en roca. Cuando nos reunimos en la cota de cuatro mil metros, lo abracé diciendo:*
> *—¡No puedo creer que lo hayas conseguido!*
> *Él, con su tranquilidad acostumbrada, contestó:*
> *—¿Cómo? ¿No era eso lo que debía hacer?*
> *En efecto, él no tiene ochos ni nueves ni dieces en su escala, pero tampoco unos ni doses ni treses. Su escala va del 4 al 7. En cambio, mi otro hijo, Dwight, el primogénito, usa una escala que comprende sólo el 1, 2, 3, 8, 9 y 10; las cosas, o le gustan mucho o las aborrece a fondo.»*
> —Roger Dawson [43] (pp. 154-155, de la edición española)

4.5 La incertidumbre incierta

> *«Dudemos incluso de la duda.»*
> —Anatole France

La aproximación clásica a los conjuntos borrosos fuerza a los que la usamos a adoptar un procedimiento para determinar las funciones de pertenencia: métodos manuales, o métodos automáticos en los que se utilizan principalmente *Redes de Neuronas Artificiales*, *Algoritmos Genéticos*, *Prototipos Deformables*, *Búsqueda de Gradiente* o *Razonamiento Inductivo* —*cfr.* §4.10.

Obviamente, asignar números adecuados a las distintas facetas de un problema es extremadamente arduo. Además, muchas veces ocurre que los expertos encarados con la resolución de un mismo problema no llegan a un consenso sobre cuáles deben ser esos valores apropiados. Existen ciertas aproximaciones a este modelo de múltiples expertos —*cfr.* Klir y Yuan [46].

No obstante, tal cantidad de esfuerzo para proporcionar *sólamente* una definición nítida de una función que será interpretada como un conjunto borroso, es cuanto menos algo «sospechosa». Una de las primeras críticas de la lógica borrosa es Susan Haack [427, 428, 429]. Una de sus críticas se orienta precisamente hacia esa precisión en la lógica borrosa: «en vez de modelar la forma en que la gente habla y piensa acerca de la vaguedad, la lógica borrosa fuerza a una cuantificación sin garantías de la vaguedad». En definitiva, que la lógica borrosa no elimina la precisión, sólo retrasa su introducción —*cfr.* Haack [428] (§9.4); Haack [429];

GRUNFELD [430]—. No obstante, ZADEH ya apuntaba algo similar acerca de la precisión, aportando dos posibles soluciones: los *conjuntos borrosos de tipo* 2 —*cfr.* Def. 27— y los *conjuntos borrosos de nivel* 2 —*cfr.* Def. 29.

> *«No hay razón para no tener conjuntos borrosos borrosos borrosos, conjuntos L_1-borrosos L_2-borrosos, etc. De hecho, no hay un final para los grados posibles de borrosificado.»*
> —J. A. GOGUEN [405] (p. 157)

Pero hay autores que discrepan de que esto realmente consiga un tratamiento cualitativo. Por poner un ejemplo, citemos a Blas LARA, quien argumenta que aunque mediante el uso de variables lingüísticas se relaje la hipótesis cuantitativa, al final se acaba aritmetizando —aunque quizás pudiera mejor decirse que se *meta*-aritmetiza.

> *«La liberación de la medida no está aún conseguida: el gran salto metodológico queda por dar.»*
> —Blas LARA [351] (p. 285)

La incertidumbre a la que se alude en esta sección se refiere a la imposibilidad de no poder conocer de una manera precisa, numérica, los datos.

4.5.1 Subconjuntos borrosos de tipo n o de nivel n

> *«En realidad, sostenemos que el éxito de la lógica borrosa puede venir dado por los conjuntos borrosos de tipo 2 y ser un hecho con la próxima generación de sistemas borrosos de tipo 2.»*
> —Robert I. JOHN [431] (p. 241)

Los conjuntos borrosos de tipo n fueron propuestos por ZADEH [432] (I), e investigados inicialmente por MIZUMOTO y TANAKA [433, 434].

Comencemos por los subconjuntos nítidos de tipo 2.

Definición 24 *Sean $\mathcal{U} \neq \varnothing$ un universo de discurso y A un subconjunto nítido de $\mathcal{U}$. Se dice que A es un **subconjunto (nítido) de tipo 2** de $\mathcal{U}$, si el rango de su función indicadora se extiende a $\mathfrak{P}(\{0,1\})$, es decir si se considera como tal la aplicación $\chi^*_A : \mathcal{U} \to \mathfrak{P}(\{0,1\})$.*

En la tabla (4.2) se presenta una interpretación plausible de los cuatro supervalores posibles de χ^*_A para cualquier elemento x de A —*cfr.* SOBRINO [435, 436].

Interpretación de la función indicadora de un subconjunto nítido de tipo 2		
$\chi^*_A(x) = \varnothing$	$\equiv$	«la pertenencia de x a A no está definida»
$\chi^*_A(x) \in \{\{0\},\{1\}\}$	$\equiv$	«la pertenencia de x a A está definida y es nítida»
$\chi^*_A(x) = \{0,1\}$	$\equiv$	«la pertenencia de x a A está definida, pero es indeterminada»

Tabla 4.2: Interpretación de la función de pertenencia de un conjunto nítido de tipo 2

Ejemplo 25 *Un **intervalo de tipo 2**, de números reales, está caracterizado por ser sus extremos también intervalos de números reales, es decir, si por ejemplo es cerrado, entonces, es de la forma $A = [[a_{00}, a_{01}], [a_{10}, a_{11}]]$. Su función característica es:*

$$\chi^*_A(x) = \begin{cases} \{0\} & si\ x \in (\leftarrow, a_{00}) \cup (a_{11}, \rightarrow) \\ \{0,1\} & si\ x \in [a_{00}, a_{01}] \cup [a_{10}, a_{11}] \\ \{1\} & si\ x \in (a_{01}, a_{10}) \end{cases}$$

Si en la definición (24) se cambia $\mathfrak{P}(\{0,1\})$ por $\mathfrak{F}([0,1])$, estaríamos definiendo un **subconjunto borroso de tipo 2**.

> *«Los conjuntos borrosos de tipo 2 son conjuntos borrosos cuyos grados de pertenencia son, a su vez, borrosos. El hecho de que en la práctica sea imposible obtener de manera precisa los grados de pertenencia, los hace intuitivamente atractivos.»*
> —Didier DUBOIS y Henri PRADE [437]

La definición que proporciona ZADEH [432] (I), es:

Definición 26 *Un **conjunto borroso es de tipo** **n** ($n = 2, 3, ...$), si el rango de su función de pertenencia es un subconjunto de la clase de los conjuntos borrosos de tipo $n - 1$. La función de pertenencia de un conjunto borroso de tipo 1 se valora en el intervalo $[0, 1]$.*

Por ejemplo, MIZUMOTO y TANAKA [434] (p. 278) definen un subconjunto borroso de tipo 2 de la siguiente manera:

Definición 27 *Un **subconjunto borroso** A **de tipo 2** de un universo no vacío de discurso $\mathcal{U}$, se caracteriza por una función borrosa de pertenencia $\mu_A : \mathcal{U} \to [0, 1]^{[0,1]}$. Los valores $\mu_A(x) \in \mathfrak{F}([0, 1])$ se denominan **grados borrosos**, y se representan como:*

$$\mu_A(x) = \int f(u) \diagup u, \quad u \in [0, 1]$$

donde $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es la función de pertenencia para el grado borroso $\mu_A(x)$.

Más información sobre conjuntos borrosos de tipo 2, lógica borrosa de tipo 2, relaciones borrosas de tipo 2, así como de diversas aplicaciones, puede encontrarse, por ejemplo, en los artículos de KARNIK, MENDEL y LIANG [438], JOHN [439] y JOHN, INNOCENT y BARNES [440].

Supongamos ahora que los elementos del universo de discurso no pueden especificarse precisamente, sino tan solo aproximadamente, por ejemplo mediante conjuntos borrosos que expresen proposiciones de la forma: «x está cerca de r». Llegaremos al concepto de *conjunto borroso de nivel n* —*cfr.* ZADEH [441] y GOTTWALD [442], que estudia sus propiedades.

Definición 28 *Supongamos que los elementos de un universo de discurso $\mathcal{U}$ son conjuntos borrosos, o sea, que existe un universo primitivo de discurso $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{U} = \mathfrak{F}(\mathcal{X})$. En tal caso se dice que los subconjuntos borrosos de $\mathcal{U}$ son **subconjuntos borrosos de nivel 2** de $\mathcal{X}$.*

Definición 29 *Se dice que A es un **subconjunto borroso de nivel** **n** de un universo no vacío de discurso $\mathcal{U}$, si el dominio de su función de pertenencia es un subconjunto de la clase de los conjuntos borrosos de nivel $n - 1$ de $\mathcal{U}$. Un conjunto borroso de nivel 1 es un conjunto borroso ordinario.*

Por ejemplo, la función de pertenencia de un subconjunto borroso de nivel 2 responde al formato:

$$A : \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \to [0, 1] \tag{4.45}$$

Pueden mezclarse ambas nociones: tipo 2 y nivel 2. La función de pertenencia de un subconjunto borroso de tipo 2 y nivel 2 es de la forma:

$$A : \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathfrak{F}([0, 1]) \tag{4.46}$$

4.5.2 Subconjuntos Φ-borrosos

Un caso particular de conjunto borroso de tipo 2 —*cfr.* Def. 27— se tiene cuando los grados borrosos son intervalos, que por su interés consideramos convexos en un retículo vectorial $(V, \preceq)$. Esto generalizaría los conjuntos L-borrosos (con valoración en un retículo). La generalización de los conjuntos borrosos clásicos (con valoración en $[0, 1]$) se produce considerando funciones de pertenencia con origen en un universo de discurso no vacío $\mathcal{U}$, e imagen en $\mathbb{I}[0, 1]$, el conjunto de intervalos (convexos) del retículo vectorial $([0, 1], \leq)$.

Estos conjuntos aparecen en las publicaciones de 1975 de SAMBUC [443] y de ZADEH [432] (I). Posteriormente, entre otros, los estudian Claude PONSARD [444] y Marian GORZALCZANY, con trabajos sobre inferencia en razonamiento aproximado [445, 446] y sobre controladores basados en conjuntos Φ-borrosos [447], y sobre toma de decisiones, junto a Andrzej DZIECH [448].

Puede verse también el libro de Arnold KAUFMANN y Jaime GIL ALUJA [412], así como los de George J. KLIR y Bo YUAN [46] y Witold PEDRYCZ [449], por citar algunos.

Definición 30 *Sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso no vacío. Un* ***subconjunto Φ-borroso*** *(o* subconjunto borroso con intervalos como valores*) A de $\mathcal{U}$ se define como $A : \mathcal{U} \to \mathbb{I}[0,1]$, siendo para todo $u \in \mathcal{U}$:*

$$A(u) = \langle \underline{A}(u), \overline{A}(u) \rangle \tag{4.47}$$

un intervalo definido por dos funciones de pertenencia, una inferior y la otra superior, es decir, tales que $\forall u \in \mathcal{U} : \underline{A}(u) \leq \overline{A}(u)$.

Si para todo $u \in \mathcal{U} : \overline{A}(u) = 1$, diremos de A que es un conjunto Φ_1-borroso. Denotaremos por $\mathfrak{F}_\Phi(\mathcal{U})$ (resp., $\mathfrak{F}_{\Phi_1}(\mathcal{U})$) la colección de todos los subconjuntos Φ-borrosos (resp., Φ_1-borrosos) de $\mathcal{U}$.

4.5.3 Subconjuntos borrosos no estándares

Una primera generalización del concepto de subconjunto borroso consiste en sustituir el intervalo $[0,1]$.

Definición 31 *Un conjunto L-borroso —cfr.* Goguen *[405]— se caracteriza porque su función de pertenencia es del tipo $A : \mathcal{U} \longrightarrow L$, donde $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

En realidad, L puede ser un semigrupo, un conjunto parcialmente ordenado, un retículo o un σ-anillo de Boole —*cfr.* Goguen [405] (p. 149)—. Sin embargo, la categoría más apropiada de propósito general es la estructura de retículo completo —*cfr.* Goguen [405] (§2 y §3).

Sean $\mathcal{U}$ un universo de discurso no vacío y P una propiedad. Sean A_+ el conjunto de referentes que se sabe que verifican P, y A_- el de aquellos referentes que se sabe que no verifican P. Como pueden existir referentes que no seamos capaces de clasificar, entonces $A_+ \cup A_- \neq \mathcal{U}$, aunque $A_+ \cap A_- = \varnothing$. El conjunto de todos los objetos que verifican P, se aproxima inferiormente por A_+ y superiormente por $\mathcal{U} - A_-$, que notaremos A^+. La diferencia $A^+ - A_+$ comprende aquellos objetos para los que no sabemos si satisfacen P o no. Obviamente, en caso de disponer de información completa con respecto a $(\mathcal{U}, P)$, se tiene $A^+ = A_+$.

Entre los **conjuntos borrosos no estándares** que caen bajo este enfoque se encuentran:

- los **«flou sets»** de Gentilhomme [450]: un par anidado de conjuntos nítidos I (*interior*) y C (*closure*), tal que $I \subseteq C$, donde I se interpreta como el conjunto de elementos «centrales» y $C \cap \bar{I}$ (*boundary*) es el conjunto de elementos «periféricos». Los términos «interior», «cierre» y «frontera» no deben interpretarse en el sentido topológico clásico.
- los conjuntos **Φ-borrosos** —*cfr.* §4.5.2.
- los conjuntos **sub-definitivos** de Narin'yani [451], representados por la cuaterna $(A_+, A_-, \overline{m}, \underline{m})$, donde $\overline{m} \leq |\mathcal{U} - A_-|$ y $|A_+| \leq \underline{m}$ son, respectivamente, una cota superior e inferior del número de objetos que verifican la propiedad P en $\mathcal{U}$.
- los conjuntos **rough** de Zdisław Pawlak [452, 453, 454, 455], para los que A_+ y A^+ provienen de una relación de equivalencia en el universo de discurso.
- los conjuntos borrosos **intuicionistas** de Krassimir T. Atanassov [456, 457, 458, 459]. Además de introducir vaguedad en la pertenencia a un conjunto, se introduce de manera explícita también en la no pertenencia. En un anexo a este capítulo, el lector puede encontrar una anticipación de algunas investigaciones nuestras con respecto a estos conjuntos —*cfr.* §4.11.
- las combinaciones ***fuzzy rough sets*** y ***rough fuzzy sets*** —*cfr.* Pawlak [460], Dubois y Prade [461, 462]; Klir y Yuan [46] (apéndice C).
- los conjuntos **doblemente borrosos** (*twofold fuzzy sets*) de Dubois y Prade [463]: «un conjunto doblemente borroso es un par (A_+, A^+), donde A_+ representa el conjunto de objetos que más o menos necesariamente (o ciertamente) satisfacen la propiedad P característica de A, mientras que A^+ representa el conjunto de objetos que más o menos posiblemente verifican P». En general, los conjuntos A_+ y A^+ no son nítidos, son conjuntos borrosos definidos a partir de medidas de evidencia. Esto diferencia un conjunto doblemente borroso de los conjuntos sub-definitivos de Narin'yani y de los conjuntos *rough* de Pawlak, para los que A_+ y A^+ son nítidos. Los conjuntos doblemente borrosos extienden a los *flou sets* de Gentilhomme, tomando A_+ como I, y A^+ como C, y exigiendo que $I \subseteq \operatorname{core} C$. Un intervalo de números reales acotado por números borrosos $(\widetilde{3}, \widetilde{7})$ puede verse como un caso particular de conjunto doblemente borroso, aunque también puede verse como un caso particular de conjunto Φ-borroso —*cfr. supra* y §13.3.4—. Se podría decir que un conjunto doblemente borroso modela un conjunto con una frontera borrosa —*cfr.* Dubois y Prade [463] (p. 10).

Aunque formalmente, un conjunto *rough* puede verse como un caso particular de conjunto doblemente borroso, sus interpretaciones son muy diferentes: «un conjunto *rough* es tal que sus elementos están individualmente identificados, pero es difícil de caracterizar perfectamente en términos de atributos, mientras que un conjunto doblemente borroso es perfectamente caracterizable en términos de atributos, pero no está bien delimitado en términos de sus elementos» —*cfr.* DUBOIS y PRADE [463] (p. 7)—. Por otro lado, aunque formalmente un conjunto doblemente borroso pueda verse como un conjunto Φ-borroso, sus interpretaciones también son muy diferentes —*cfr.* DUBOIS y PRADE [463] (p. 17): el par de medidas definitorias de la pertenencia en un conjunto doblemente borroso estiman la incertidumbre de los sucesos alternativos: el elemento pertenece o no pertenece —está más relacionado con las lagunas y excesos de conocimiento, los *gaps* y *gluts* (*cfr.* §4.2)—; sin embargo, en un conjunto Φ-borroso, el intervalo expresa que el grado preciso de pertenencia (no ya el suceso de que un elemento pertenezca) es desconocido (esto se relaciona con la hipótesis de vaguedad como ignorancia), o dependiente del observador, mas en todo caso se trata de una cuestión de grado y no de bivalencia (que podríamos decir «metagraduada») como en el caso de un conjunto doblemente borroso.

Otros conjuntos borrosos no estándares son los subconjuntos **aleatorios borrosos**, estudiados por Kaoru HIROTA [464, 465] y por Robert L. FÉRON [466, 467]. Pueden consultarse, por su interés los trabajos de Ernest CZOGAŁA *et alii* en la Teoría de Control, con la publicación en 1988 de la definición de controlador probabilístico borroso como una generalización del concepto de controlador borroso [468, 469, 470, 471, 472].

4.5.4 Singularidades Cantorianas

No pensamos, ni mucho menos, que los conjuntos borrosos sean la herramienta conceptual del futuro. Sería presuponer, en gran medida, la misma uniformidad impuesta por los conjuntos nítidos, aunque desde un grado más alto de abstración y con una mayor libertad en la descripción. Cada descubrimiento tiene su lugar y su razón de ser: a nadie se le ocurre aplicar mecánica cuántica en el ámbito macrofísico (*principio de correspondencia*, enunciado por Niels BOHR).

Existen muchas propuestas alternativas a las teorías estándares de conjuntos como la de Ernst Friedrich Ferdinand ZERMELO y Adolf Abraham Halevi FRAENKEL, o la de de John VON NEUMANN, Paul Isaac BERNAYS y Kurt GÖDEL, y al tratamiento de CANTOR [473].

Los **espacios métricos probabilísticos** (*probabilistic metric spaces*) —*cfr.* MENGER [474, 475]; SCHWEIZER y SKLAR [476, 477]—, el **análisis no estándar** de Abraham ROBINSON [478], los **semiconjuntos** de VOPĚNKA y HÁJEK [479], los **conjuntos internos** (*internal set theory*) de Edward NELSON [480], los **conjuntos alternativos** (*alternative set theory*) de VOPĚNKA [481], los **qua-conjuntos** (*quaset theory*) de M. L. DALLA CHIARA y G. TORALDO DI FRANCIA [482] o los **quasi-conjuntos** de Décio KRAUSE [483], los **conjuntos acotados** (*bounded set theory*) de KANOVEI y REEKEN [484], y tantas propuestas de teorías unusuales de conjuntos, recogidas por ejemplo en el libro de Peter ACZEL [485].

No figura entre los fines de nuestra Tesis tratar sobre ellas[17]. Por cierto que, la teoría de los conjuntos

[17] Por decir algo de algunas, lo diremos de cuatro. Comenzamos por la **teoría de haces** *(Sheaf Theory)*. Una muy buena exposición de su historia se debe a Christian HOUZEL [486], de la cual extraemos el siguiente resumen. En ella se pueden encontrar multitud de referencias a los trabajos de los autores citados. La teoría de haces la introdujo Jean LERAY inmediatamente después de la segunda guerra mundial, como continuación de su trabajo mientras estuvo prisionero en Austria. LERAY definió los grupos de cohomología para aplicaciones continuas, y los relacionó con la cohomología del espacio fuente a través del concepto de sucesión espectral que él mismo introdujo. Henri Paul CARTAN formuló de nuevo la teoría de haces en sus seminarios —por ejemplo, en el de 1950-51: [487]— y, junto a Jean-Pierre SERRE, la aplicó con un rotundo éxito en la teoría de espacios analíticos. A continuación, SERRE extendió estos métodos a la geometría algebraica, siendo más profundamente desarrollados y generalizados por GROTHENDIECK. SATO aplicó los métodos de GROTHENDIECK a los D-módulos, creando el análisis microlocal.

La **categoría o topología de Grothendieck** *(Grothendieck Topoi)* —*cfr. v. gr.* GROTHENDIECK [488]—. La teoría de topos tuvo dos comienzos. El *primero* se debe a GROTHENDIECK [488] —*cfr. v. gr.* GROTHENDIECK y VERDIER [489]—, quien hizo dos observaciones fundamentales para intentar extender conceptos como el de cohomología desde la topología algebraica a la geometría algebraica sobre campos arbitrarios, incluso campos finitos, y para obtener consecuencias en la teoría de números (en concreto, las conjeturas de André WEIL). La primera observación de GROTHENDIECK fue que toda la información necesaria para definir la cohomología de un espacio X está convenientemente contenida en la categoria $Sh(X)$ de haces sobre X. La segunda observación de GROTHENDIECK fue que la teoría de haces, incluyendo las cohomologías, tiene sentido incluso si reemplazamos el c.p.o de conjuntos abiertos de un espacio, con una categoría (pequeña), utilizando una apropiada noción de cubrimiento (*cover*). Proporcionó axiomas para lo noción de ser apropiado en este entorno, y tales conceptos de cubrimiento son ahora conocidas como topologías de GROTHENDIECK. Una categoría provista de una topología de GROTHENDIECK se dice que es un lugar (*site*). Un topos (de GROTHENDIECK) es una categoría de todos los haces sobre algún lugar. El *segundo comienzo* fue obra de F. William LAWVERE [490, 491, 492] y Myles TIERNEY [493]. Aunque el concepto de topos fue presentado en los años 60, fueron ellos quienes lo axiomatizaron —*cfr.* MCLARTY [494]—. Para que nos entendamos, un topos es una categoría con una estructura lógica, lo suficientemente rica como para que pueda ser desarrollada la mayoría de la matemática ordinaria. Es, además, un espacio topológico generalizado, proporcionando así una conexión directa entre la lógica y la geometría.

El **método «forcing»**, inventado por Paul Joseph COHEN [495] para demostrar la independencia de la hipótesis del continuo, y utilizado para demostrar la independencia del axioma de elección y la hipótesis del continuo en el sistema axiomático de ZERMELO-

borrosos, también debería ser incluida aquí como singularidad cantoriana.

Dos conceptos inherentes a esta colección de propuestas son la **variabilidad** y la **vaguedad**. La variabilidad en los conjuntos es consustancial a varias de ellas, por ejemplo a la teoría de haces, a las teoría de topos o al «*forcing*» de COHEN. LAWVERE expresa la esencia y la importancia de los conjuntos variables con las siguientes palabras:

> *«Tradicionalmente, la teoría de conjuntos ha resaltado la constancia de los conjuntos, y tanto el análisis no estándar de Robinson como el método forcing the Cohen suponen pasar de un sistema de conjuntos supuestamente constantes a un nuevo sistema que sigue satisfaciendo los axiomas básicos para los conjuntos constantes: no obstante, es chocante que ambos métodos pasen "incidentalmente" por sistemas de conjuntos variables, y más aún, que la diferencia entre ambos resida en la diferencia entre dos modos fundamentales de analizar la variabilidad.»*
> —F. W. LAWVERE [492]

Según DROSSOS [503], las teorías actuales en **análisis no estándar** pueden categorizarse en **teorías extensionales** y **teorías intencionales**. Las primeras —*cfr.* ALBEVERIO, FENSTAD, JOEGH-KROHN y LINDSTROM [504]; STROYAN y LUXEMBOURG [505]— se basan en ciertas extensiones «objetivas» de la teoría cantoriana de conjuntos. Las segundas se basan en ciertas «intenciones» (con reminiscencias husserlianas) asociadas a las propiedades perceptuales subjetivas de un «observador». No es necesaria ninguna extensión, lo que cambia es el «punto de vista», se trabaja con la axiomática conjuntista de ZERMELO-FRAENKEL con el axioma de elección, pero desde una perspectiva local (subjetiva) y no cantoriana. Fundamentalmente, la vía intencional coincide esencialmente con los *conjuntos internos* de NELSON [480], convenientemente entremezclada con los *conjuntos alternativos* de VOPĚNKA [481].

Los **conjuntos alternativos** de VOPĚNKA tienen sus orígenes en los **semi-conjuntos** —*cfr.* VOPĚNKA y HÁJEK [479]—. Éstos forman una superclase de la de los conjuntos borrosos —*cfr.* ZADEH [381]—. Comparten con ellos la idea de frontera borrosa, pero a diferencia de los conjuntos borrosos, los semi-conjuntos pueden definirse a partir de propiedades vagas, sin utilizar funciones explícitas de pertenencia. No hay grados intermedios de pertenencia a un semiconjunto —lo neblinoso (*haziness*) consiste en que violan diferentes principios de la teoría clásica de conjuntos; por poner un ejemplo, el principio de inducción matemática. En la práctica no se trabaja directamente con semi-conjuntos, sino con aproximantes borrosas de ellos. En 1992, aparece *The Alternative Mathematical Model of Linguistic, Semantics and Pragmatics*, de Vilem NOVAK [506], donde caracteriza la relación entre semi-conjuntos y conjuntos borrosos.

Si observamos con atención la siguiente cita de VOPĚNKA —*cfr.* DROSSOS [503] (p. 298)—, podremos apreciar la similitud con la teoría de la verdad borrosa, iniciada por GOGUEN —*cfr.* §4.2:

> *«Si observamos un conjunto pero no somos capaces de identificar (distinguir) sus elementos, porque están más allá del horizonte de nuestra capacidad de observación, nos topamos con un fenómeno del continuo. [...] los fenómenos del continuo se deben a la existencia de elementos indiscernibles en la clase observada.»*
> —Petr VOPĚNKA [481]

4.6 Lógicas borrosas

> *«Cuando afirmas, aun entonces interrogas.»*
> —Maurice BLANCHOT <La espera, el olvido>

De nuevo, 1937. Max BLACK consigue extender la lógica vaga a los conjuntos vagos. El nombre de lógica vaga proviene de los trabajos de Bertrand Arthur William RUSSELL sobre lógica multievaluada, a la que él denominaba lógica vaga.

> *«Mientras que el matemático construye una teoría en términos de objetos "perfectos", el científico experimental observa los objetos que pueden poseer las propiedades demandadas por la teoría, y que según la*

FRAENKEL. Posteriormente, se han elaborado varias simplificaciones del método, revelándose la relación de este método con los *modelos de valores booleanos* y los *modelos de (Saul) Kripke* [496].

Los **modelos de valores booleanos** (*Boolean-valued models*) se caracterizan por tomar valores en un álgebra booleana completa. A partir de una observación de Robert M. SOLOVAY de que la relación *forcing* de COHEN puede verse como un procedimiento de asignar valores booleanos a fórmulas, Dana S. SCOTT formuló su versión de los modelos de valores booleanos —*cfr.* SCOTT [497]—. Petr VOPĚNKA desarrolló una teoría del método forcing de COHEN usando conjuntos abiertos de un espacio topológico como condiciones forcing —*cfr.* VOPĚNKA [498, 499, 500]; VOPĚNKA y HÁJEK [501]—, llegando a una versión con valores booleanos del forcing más o menos idéntica a la versión de SCOTT y SOLOVAY —*cfr.* VOPĚNKA [502].

naturaleza de la medida, puede que sean sólo aproximadamente ciertas. La deducción matemática, interpretada rigurosamente, no es de utilidad para el físico. Es necesario saber que su validez no se ve alterada si la premisa y la conclusión sólo son "aproximadamente verdaderas". [...] Decir que todo el lenguaje (simbólico o del pensamiento) es vago, es un método muy recurrido para evitar los problemas, aunque esta falta de análisis tiene la desventaja de hacer caer, incluso a los más eminentes pensadores, en el absurdo. No asumiremos esas "leyes" de la lógica o de la matemática que prescriben modos de existencia a los que el discurso inteligible debe adecuarse necesariamente. Se sostendrá, por el contrario, que todas las desviaciones de los estándares de precisión de la lógica o de las matemáticas se extienden o están presentes en el juego simbólico; o sea, que las calificamos de aberraciones subjetivas que producen un abismo infranqueable entre las leyes formales y la experiencia, dejando la utilidad de las ciencias formales como un misterio sin resolver.»

—Max BLACK [334].

La teoría estándar de conjuntos borrosos que hemos visto antes, es sólo una entre una gran variedad de teorías de conjuntos borrosos —que difieren entre sí según las operaciones conjuntistas que utilizan—. Para cada lógica infinitamente valorada (diferentes según las primitivas que las definan) es posible derivar una teoría de conjuntos borrosos isomorfa a ella. Por ejemplo, la lógica estándar de ŁUKASIEWICZ L_1 es isomorfa a la teoría estándar de conjuntos borrosos. El *isomorfismo* es interpretativo al igual que el correspondiente a la lógica bivalente y la teoría de conjuntos nítidos: un valor de pertenencia $A(x) \in [0,1]$ (ámbito de los conjuntos) se interpreta como el valor (grado) de verdad $A(x) \in [0,1]$ (ámbito lógico) de la proposición «x es un elemento de A».

Se hallan intuiciones y detalles sobre lógicas borrosas, en algunos artículos de ZADEH [381] (1965) y [404] (1973), en trabajos de MANDANI [507], ASSILIAN [508], y MENGES y SKALA [382], todos ellos en 1974. Pero quizás el primer tratamiento formal completo pueda considerarse el realizado por BELLMAN y ZADEH [383] (1976).

Para construir una lógica borrosa, lo primero es elegir una lógica base, como por ejemplo la lógica estándar de ŁUKASIEWICZ L_1. En este caso, los valores de verdad de la lógica borrosa serán subconjuntos borrosos de $[0,1]$. Es decir, a diferencia de la lógica clásica, donde el valor de verdad de una proposición es verdadero o falso, en la lógica borrosa, el valor de verdad de una proposición es una cuestión de grado. La forma típica de una proposición borrosa es:

$$p : U \text{ es } B \tag{4.48}$$

donde U es una variable que toma valores u en un universo de discurso no vacío $\mathcal{U}$, y B es un subconjunto borroso de $\mathcal{U}$. El grado de verdad de p es:

$$V(p) = \int_{u \in \mathcal{U}} B(u) \tag{4.49}$$

Cierta terminología que nos será de utilidad más adelante es la siguiente.

Definición 32 *Una **negación** es cualquier aplicación decreciente $\mathcal{N} : [0,1] \to [0,1]$ coincidente con la negación bivalente en $\{0,1\}$, o sea, tal que $\mathcal{N}(0) = 1$ y $\mathcal{N}(1) = 0$. Se dice que una negación $\mathcal{N}$ es **estricta** si es estrictamente decreciente, **continua** si lo es, e **involutiva** si $\forall x \in [0,1], \mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = x$. Toda negación involutiva es estricta y continua, por ejemplo, la negación estándar $\mathcal{N}_s$ definida $\forall x \in [0,1]$, mediante $\mathcal{N}_s(x) = 1 - x$.*

Definición 33 *Una **conjunción** es cualquier aplicación creciente $\mathcal{C} : [0,1]^2 \to [0,1]$, cuya restricción a $\{0,1\}^2$ es la conjunción clásica bivalente, o sea, tal que $\mathcal{C}(1,1) = 1$ y $\mathcal{C}(x,y) = 0$, si $(x,y) \in \{0,1\}^2 \backslash \{(1,1)\}$. Una **disyunción** es cualquier aplicación creciente $\mathcal{D} : [0,1]^2 \to [0,1]$, cuya restricción a $\{0,1\}^2$ es la disyunción booleana, i.e. tal que $\mathcal{D}(0,0) = 0$ y $\mathcal{D}(x,y) = 1$, si $(x,y) \in \{0,1\}^2 \backslash \{(0,0)\}$.*

Definición 34 *Una conjunción $\mathcal{C}$ (resp., una disyunción $\mathcal{D}$) se dice que es una **semi-norma** (resp., una **semi-conorma**) si $\forall x \in [0,1], \mathcal{C}(x,1) = \mathcal{C}(1,x) = x$ (resp., $\forall x \in [0,1], \mathcal{D}(x,0) = \mathcal{D}(0,x) = x$). De una semi-norma $\mathcal{C}$, se dice que es una **norma triangular**, o t-norma (t de triangular, por su relación con la desigualdad triangular en los espacios métricos probabilísticos) —cfr.* SCHWEIZER *y* SKLAR *[476, 509, 477]—, si es asociativa: $\mathcal{C}(\mathcal{C}(x,y),z) = \mathcal{C}(x,\mathcal{C}(y,z))$ y conmutativa: $\mathcal{C}(x,y) = \mathcal{C}(y,x)$. De manera similar, una semi-conorma $\mathcal{D}$ se dice que es una **conorma triangular** (t-conorma); si es asociativa y conmutativa. Que sepamos, no hay una notación normalizada para las t-normas y las t-conormas. Nosotros usaremos $\mathcal{T}$ para las t-normas y $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ para las t-conorms.*

Frecuentemente interesan otras propiedades. Para las t-normas, la **subidempotencia** ($\mathcal{T}(x,x) < x$), para las t-conormas, la **superidempotencia** ($\mathfrak{T}(x,x) > x$), y para ambas, su **continuidad** y el **crecimiento estricto** en ambos argumentos ($x < x', y < y' \Longrightarrow S(x,y) < S(x',y')$) ($S$ siendo una t-norma o una t-conorma).

Una t-norma (resp., t-conorma) continua subidempotente (resp., superidempotente) se dice **arquimediana**. Puede demostrarse —*cfr.* KLIR y YUAN [46] (Teors. 3.9 y 3.14)— que la t-norma mínimo $\wedge$ (la intersección borrosa estándar) y la t-conorma máximo $\vee$ (la unión borrosa estándar) son las únicas t-norma y t-conorma, respectivamente, que son idempotentes.

Proposición 35 *Si $\mathcal{T}$ es una t-norma, entonces, para todo $x, y \in [0,1]$:*

$$x \Cap y \leq \mathcal{T}(x,y) \leq x \wedge y \tag{4.50}$$

Definición 36 *Dada una t-norma $\mathcal{T}$, se define la $\mathcal{T}$-intersección o **intersección triangular** de A y B, para todo $x \in \mathcal{U}$, mediante:*

$$A \cap_{\mathcal{T}} B = \mathcal{T}(A(x), B(x)) \tag{4.51}$$

Generalmente, se acepta como definición de intersección entre conjuntos borrosos, la intersección triangular.

El resultado numérico de la intersección triangular $A \cap_{\mathcal{T}} B$ (Ec. 4.51), puede interpretarse como un *grado de similitud* entre los conjuntos borrosos A y B. Debido a ello, tiene sentido la siguiente definición.

Definición 37 *Dada una t-norma $\mathcal{T}$ en $[0,1]$, se define el **índice triangular de disimilitud** (asociado a $\mathcal{T}$) como la función $d_{\mathcal{T}} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$:*

$$d_{\mathcal{T}}(x,y) = 1 - \mathcal{T}(x,y) \tag{4.52}$$

Una t-conorma puede verse como el resultado de aplicar el **operador de dualidad** a una t-norma:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}(x,y) &= D(\mathcal{T})(x,y) \\ &= 1 - \mathcal{T}(1-x, 1-y) \end{aligned}$$

Las definiciones de algunas t-normas y t-conormas frecuentemente utilizadas aparecen en las Tablas 4.3 y 4.4, respectivamente.

Ejemplos de normas triangulares	
mínimo:	$x \wedge y = \min\{x,y\}$
producto algebraico (t-norma probabilística):	$x \cdot y = xy$
*producto acotado (*LUKASIEWICZ*):*	$x \odot y = \max\{0, x+y-1\}$
producto drástico (t-norma débil):	$x \Cap y = \begin{cases} \min\{x,y\} & \textit{if} \quad \max\{x,y\} = 1 \\ 0 & \textit{if} \quad x,y < 1 \end{cases}$
Dombi [510]:	$\left(1 + \left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{\gamma} + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{-1}, \gamma > 0$
Dubois-Prade [437]:	$x \wedge_{\mathrm{DP}} y = \frac{xy}{\max\{x,y,\gamma\}}, \gamma \in [0,1].$
Frank [511]:	$\log_{\gamma}\left[1 + \dfrac{(\gamma^x - 1)(\gamma^y - 1)}{\gamma - 1}\right], \gamma > 0, \gamma \neq 1$
Hamacher [512]:	$x \wedge_{\mathrm{H}} y = \frac{xy}{\gamma + (1-\gamma)(x+y-xy)}, \gamma \geq 0.$
Schweizer-Sklar(1) [509]:	$(\max\{0, x^{\gamma} + y^{\gamma} - 1\})^{\frac{1}{\gamma}}, \gamma \neq 0$
Schweizer-Sklar(2):	$1 - [(1-x)^{\gamma} + (1-y)^{\gamma} - (1-x)^{\gamma}(1-y)^{\gamma}]^{\frac{1}{\gamma}}, \gamma > 0$
Schweizer-Sklar(3):	$\exp\left(-(\lvert\ln x\rvert^{\gamma} + \lvert\ln y\rvert^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}\right), \gamma > 0$
Schweizer-Sklar(4):	$\frac{xy}{(x^{\gamma} + y^{\gamma} - x^{\gamma}y^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}}, \gamma > 0$
Weber [513]:	$\max\left\{0, \frac{x+y+\gamma xy-1}{1+\gamma}\right\}, \gamma > -1$
Yager [514]:	$1 - \min\{1, ((1-x)^{\gamma} + (1-y)^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}\}$ for $a \geq 1$
Yu [515]:	$\max\{0, (1+\gamma)(x+y-1) - \gamma xy\}, \gamma > -1$

Tabla 4.3: *Ejemplos de normas triangulares empleadas con frecuencia.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

ejemplos de conormas triangulares	
máximo:	$x \vee y = \max\{x, y\}$
suma algebraica:	$x \hat{+} y = x + y - xy$
suma acotada:	$x \oplus y = \min\{1, x + y\}$
suma drástica:	$x \uplus y = \begin{cases} \max\{x,y\} & \textit{if} \quad \min\{x,y\} = 0 \\ 1 & \textit{if} \quad x, y > 0 \end{cases}$
suma disjunta (diferencia simétrica):	$x \Delta y = \max\{\min\{x, 1-y\}, \min\{1-x, y\}\}$
Dombi [510]:	$\left(1 + \left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{\gamma} + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^{\gamma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right)^{-1}, \gamma > 0$
Dubois-Prade [437]:	$1 - \frac{(1-x)(1-y)}{\max\{(1-x),(1-y),\gamma\}}, \gamma \in [0,1].$
Frank [511]:	$1 - \log_{\gamma}\left[1 + \frac{\left(\gamma^{1-x} - 1\right)\left(\gamma^{1-y} - 1\right)}{\gamma - 1}\right], \gamma > 0, \gamma \neq 1$
Hamacher [512]:	$\frac{x + y + (\gamma - 2)\,xy}{\gamma + (\gamma - 1)xy}, \gamma > 0$
Schweizer-Sklar(1) [509]:	$1 - (\max\{0, (1-x)^{\gamma} + (1-y)^{\gamma} - 1\})^{\frac{1}{\gamma}}, \gamma \neq 0$
Schweizer-Sklar(2):	$(x^{\gamma} + y^{\gamma} - x^{\gamma}y^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}, \gamma > 0$
Schweizer-Sklar(3):	$1 - \exp\left(-\left(\lvert\ln(1-x)\rvert^{\gamma} + \lvert\ln(1-y)\rvert^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right), \gamma > 0$
Schweizer-Sklar(4):	$1 - \frac{(1-x)(1-y)}{((1-x)^{\gamma} + (1-y)^{\gamma} - (1-x)^{\gamma}(1-y)^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}}, \gamma > 0$
Weber [513]:	$\min\left\{1, x + y - \frac{\gamma}{1-\gamma}xy\right\}, \gamma > -1$
Yager [514]:	$\min\left\{1, (x^{\gamma} + y^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}\right\}, \gamma > 0$
Yu [515]:	$\min\{1, x + y + \gamma xy\}, \gamma > -1$

Tabla 4.4: *Ejemplos de conormas triangulares empleadas con frecuencia.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

4.7 Trabajando con palabras: valores lingüísticos

[...] el significado de la oración borrosa "Juan es alto" es: que la información específica con respecto a dicha frase (o sea, información acerca de quién es Juan más información que explique el significado de "alto"), conjuntamente con mi estado de creencia con respecto al mundo (en concreto, con respecto a la posibilidad relativa de diferentes estados del mundo –siendo en este ejemplo relevante la altura de Juan en esos distintos posibles estados), me permitirá decidir si afirmo (y cuán satisfecho estoy) que "Juan es alto".»
—Robin Giles [516] (p. 302)

4.7.1 Variables lingüísticas

Sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso no vacío y $E \in \mathfrak{P}(\mathcal{U})$. Una **variable lingüística**[18] cuyos valores son palabras o frases —*cfr.* Zadeh [404, 432]— se define mediante una cuaterna —*cfr.* Driankov, Hellendoorn y Reinfrank [517]; Nakoula, Galichet y Foulloy [518] (p. 282):

$$\langle x_{\text{nombre}}, \mathcal{L}(E), E, M \rangle \tag{4.53}$$

donde:

- x_{nombre} es el nombre de la variable lingüística, por ejemplo *destreza en el desempeño de una tarea*, *aprendizaje de un concepto*, *dolor*, *molestia por exposición al ruido*, *reutilización de una componente*, *probabilidad*, etc.;

- $\mathcal{L}(E)$ es el **conjunto de términos** o *conjunto referencial* de x_{nombre}, esto es, el conjunto *finito* de valores lingüísticos que puede tomar x_{nombre}, cuyos elementos denotaremos por e_L, tales como, por ejemplo, $\mathcal{L}(E) = \{$muy baja, baja, media, alta, muy alta$\}$, en el caso de una *probabilidad* —*cfr.* Tabla 4.5;

[18] En opinión de Ellen Hisdal [311] (p. 349), deberíamos hablar de **valores lingüísticos de variables** en vez de *variables lingüísticas*, en el sentido de que son los valores de la variable los que son lingüísticos, y no la variable en sí. Pero esto no es lo usual. Como en el caso numérico: decir que $x \in \mathbb{R}$, no quiere decir que x sea un número, sino que puede instanciarse en uno, esto es, los números son los valores que puede tomar x.

- E es el *universo de discurso local* o dominio físico asociado a x_{nombre}, por ejemplo, $E = [35, 42]$ para x_{nombre} =temperatura;
- M es una función semántica que asocia un significado borroso (resp., Φ-borroso, L-borroso, de tipo n, nivel n, etc.) a cada valor lingüístico $e_L \in \mathcal{L}(E)$, o sea, es una aplicación inyectiva de $\mathcal{L}(E)$ a $\mathfrak{F}(E)$ (resp., $\mathfrak{F}_\Phi(E)$, etc.).

Abreviamos $\mu_{M(e_L)}$ mediante μ_{e_L} —*cfr.* DRIANKOV *et alii* [517]—, y como identificamos un conjunto borroso con su función de pertenencia —*cfr.* pág. 60 de esta Tesis—, notamos μ_{e_L} simplemente por e_L. Por ejemplo, debido a sus fórmulas más simples y a su eficiencia computacional, la definición de $M(e_L)$, esto es, del significado borroso de e_L, como una función de pertenencia triangular o trapezoidal ha sido usada extensivamente, especialmente en aplicaciones en tiempo real —*cfr.* JANG, SUN y MIZUTANI [416]; DRIANKOV *et alii* [517]— como es el caso de los controladores borrosos.

x_{nombre}	$\mathcal{L}(E)$
destreza	{torpemente, atolondradamente, con soltura, con pericia, con habilidad sorprendente}
concepto	{no aprendido aún, casi aprendido, aprendido, más que aprendido, mucho más que aprendido}
molestia	{ausente, suave, moderada, intensa, severa}
componente	{adecuada, inadecuada}
puntuación	{uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete}
probabilidad	{muy baja, baja, media, alta, muy alta}

Tabla 4.5: *Ejemplos de variables lingüísticas y conjuntos de términos asociados a ellas.* —*Fuente:* Elaboración propia.

4.7.2 Descripción lingüística de un valor nítido de la evidencia

Asociado a cada valor nítido e de E, consideramos $D(e)$, un subconjunto lingüístico borroso (resp., Φ-borroso, L-borroso, de tipo n, nivel n, etc.) que asocia a cada término $e_L \in \mathcal{L}(E)$, el grado con el que e_L describe e. Por ello, D es una aplicación de E en el conjunto de *subconjuntos lingüísticos borrosos* $\mathcal{F}(\mathcal{L}(E))$ (resp., $\mathfrak{F}_\Phi(\mathcal{L}(E))$, etc.), tal que, por ejemplo, en el caso de ser $\mathcal{F}(\mathcal{L}(E))$ —*cfr.* NAKOULA *et alii* [518] (p. 284)—, la **descripción lingüística** (o *valor lingüístico*) de e es:

$$D(e) = \sum_{e_L \in \mathcal{L}(E)} \mu_{D(e)}(e_L) \diagup e_L \tag{4.54}$$

Para toda $e_L \in \mathcal{L}(E)$ y para todo $e \in E$, el significado borroso de e_L y la descripción lingüística de e están relacionados mediante —*cfr.* NAKOULA *et alii* [518] (p. 284):

$$\mu_{D(e)}(e_L) = e_L(e) \tag{4.55}$$

Por ejemplo, si suponemos que una prueba se ha calificado con puntuaciones cualesquiera de $E = [0, 10]$, y que $\mathcal{L}([0, 10]) = \{\text{menor que la media, en la media, mayor que la media}\}$ es una partición borrosa triangular de E, de partición nítida inducida $\{[0, 2.5], [2.5, 7.5], [7.5, 10]\}$ —*cfr.* Nota a pie de página n°1 (pág. 402)—, entonces, una descripción lingüística de la puntuación nítida $e = 6$, es:

$$\begin{aligned} D(6) &= \sum_{e_L \in \mathcal{L}([0,10])} \mu_{D(6)}(e_L) \diagup e_L \\ &= 0 \diagup \text{menor que la media} + 0.8 \diagup \text{en la media} + 0.2 \diagup \text{mayor que la media} \end{aligned}$$

pues:

menor que la media$(6) = 0$

en la media$(6) = 0.8$

mayor que la media$(6) = 0.2$

Esto se conoce como una **introducción de borrosidad lingüística** en el valor numérico nítido e; se trata de un caso particular de la *introducción de borrosidad*, propugnada por el *Principio de Borrosificado* de GOGUEN —*cfr.* §4.4.4, y también §4.9, donde se extienden las operaciones habituales entre conjuntos a conjuntos borrosos.

4.7.3 Valoración nítida de una descripción lingüística de la evidencia

Son muchas las propuestas, desde las simples a las complejas. La eliminación de la borrosidad proporciona un referente (o un valor de tal manera que elegiríamos el referente más próximo a tal valor). Por ejemplo, para conjuntos borrosos unimodales, podríamos eliminar la borrosidad utilizando el valor modal:

$$\widehat{e}(A) = \arg\sup_{u \in \mathcal{U}} A(u) \tag{4.56}$$

En esto se basan los métodos del centro de masas, y del valor máximo medio.

Quizás los dos métodos más populares de eliminación de la borrosidad sean el **método del centro del área** (CA) (también llamado *del centro de gravedad* o *del centroide*) y el **método del valor máximo medio** (MM) —*cfr.* Lee [519]; Pedrycz [449]; Berenji [520]; Klir y Yuan (pp. 336ss.)

En el **método del centro del área**, el valor resultante es el centro de gravedad del conjunto —*cfr.* 16:

$$\widehat{e}_{CA}(A) = \frac{\sum_{u \in \mathcal{U}} A(u)u}{\sum_{u \in \mathcal{U}} A(u)} \tag{4.57}$$

Si $\widehat{e}_{CA}(A)$ no es igual a ningún referente, tomaríamos el valor más próximo a él.

Para el caso discreto, el **método del valor máximo medio** estima:

$$\widehat{e}_{MM}(A) = \frac{\sum_{u \in C} u}{|C|} \tag{4.58}$$

donde C es el conjunto nítido:

$$C = \{u \in \mathcal{U} : A(u) = h(A)\} \tag{4.59}$$

que podríamos llamar *conjunto cima de* A, y $|C|$ es su cardinal.

En líneas generales, el método del centro del área proporciona mejores resultados que el del valor máximo medio —*cfr.* Braae y Rutherford [521]; Larkin [522]; Runkler y Glesner [523].

La literatura está poblada (y repoblada) de estrategias de eliminación de borrosidad. Por citar algunas fuentes: Driankov, Hellendoorn y Reinfrank [517]; Filev y Yager [524, 525], y Yager y Filev [526], quienes introducen varias familias de métodos; Zhao y Govind [527], quienes abordan la eliminación de la borrosidad de los intervalos borrosos (casos particulares de conjuntos borrosos con núcleos continuos); Mabuchi [528]; Wu y Sung [529]; Song y Bortolan [530].

4.8 Incertidumbre, probabilidad y borrosidad

> *«Pensemos en el tigre y en las listas de color de su piel. Puedo soñar, imaginar, o ver un tigre listado, pero ¿debe tener el tigre de mi experiencia un número concreto de listas? Si ver o imaginar es tener una imagen mental, entonces la imagen del tigre —para obedecer a las reglas de las imágenes en general— debe determinar un número determinado de listas y debe ser posible precisarlo con preguntas como ¿más de diez?, ¿menos de veinte? Sin embargo, si ver o imaginar tiene un carácter descriptivo, no es necesario que las preguntas tengan una respuesta precisa. A diferencia de la instantánea del tigre, la descripción del mismo no tiene ninguna necesidad de detenerse en el número de listas; es posible que la descripción se limite a decir "numerosas listas". Naturalmente, en el caso de que se vea realmente un tigre, muchas veces será posible examinarlo detenidamente y contar las líneas de color; pero en ese caso se cuentan líneas reales, no las franjas de una imagen mental.»*
>
> —Daniel Clement Dennett [531] (pp. 136-137), *via* Roberto Colom Marañón y Manuel De Juan Espinosa [532] (p. 87)

Muchas son las medidas de la incertidumbre —en el sentido de una no-certeza graduada— que han sido propuestas a lo largo de la historia —*cfr.* White [79] (§2.3.2).

Algunas involucran probabilidades de diversas clases, tanto objetivas (la probabilidad de frecuencia de Von Mises [533], la probabilidad lógica de Carnap [534], o la probabilidad lógica clásica, en la que se asigna la misma probabilidad a todos los estados), como subjetivas (la probabilidad subjetiva de Savage [535], la de Marschak [536], la de Raiffa y Schlaiffer [537], o la probabilidad subjetiva de Luce en la elección probabilitaria [538]).

Otras no. Una medida subjetiva que no involucra probabilidades es el **grado de sorpresa** de SHACKLE —*cfr. supra* pág. 4.1.

Otro punto de vista es el de las *medidas objetivas subjetivamente derivadas*. GOOD [539] opina que existen medidas, tales como probabilidades objetivas, de naturaleza absoluta, con una interpretación en la realidad, pero cuyos valores no se conocen con precisión, estando, por tanto, sujetas a evaluación subjetiva.

Muchos son también los nombres que se han empleado al hablar de medir la verdad proposicional: **confianza** —*cfr.* REICHENBACH [540]—, **credibilidad** —*cfr.* GOOD [539]—, **confirmación** —*cfr.* CARNAP [534]; Tintner [541]—, **aceptación** —*cfr.* SHACKLE [542]—, **creencia** —*cfr.* GOOD [539]—, además de probabilidad y grado de sorpresa.

El grado de sorpresa de SHACKLE está muy cerca de lo borroso. No resulta difícil demostrar que la sorpresa potencial es un concepto equivalente al de una *medida de* **necesidad** en la *teoría de la posibilidad* de ZADEH —*cfr.* pág. 52 y §18.6—. De hecho, SHACKLE hacía referencia a grados de posibilidad, además de a los grados de sorpresa potencial, pero no integró ambos conceptos en un cuerpo teórico común. Lotfi Asker ZADEH, sin embargo, sí lo hizo.

Didier DUBOIS y Henri PRADE [165] opinan que podemos interpretar la borrosidad sin ayuda de la probabilidad, por ejemplo, viendo las medidas de posibilidad como preferencias o similaridades. Por otro lado, y en un nivel sintáctico, las funciones de densidad de probabilidad pueden considerarse como conjuntos borrosos, justamente aquéllos cuya cardinalidad escalar[19] es uno.

En palabras de William STALLINGS [543], Peter CHEESEMAN [544, 545] y tantos otros: la teoría de conjuntos borrosos, nada nuevo. En palabras de Bart KOSKO [164] (calificado por algunos de *rebelde* e irreverente incluso dentro de la *comunidad* borrosa): el azar no existe; la probabilidad es un caso particular de borrosidad. DUBOIS y PRADE [165] defienden el estudio de una probabilidad de eventos borrosos —*cfr.* §15.2.1—, caso de que no se considere válido el principio de no contradicción, en contra de la postura radical de KOSKO. En este estudio de una probabilidad de sucesos borrosos, la opinión de Judea PEARL, es que la probabilidad y los conjuntos borrosos son conceptos ortogonales:

> *«La lógica borrosa es ortogonal a la teoría de la probabilidad —se centra en las ambiguedades que surgen a la hora de describir sucesos, mas que en la incertidumbre en relación a la ocurrencia o no ocurrencia de eventos.»*
> —Judea PEARL [47] (p. 464)

Steven NAHMIAS, en su artículo definitorio de las variables borrosas [546] (p. 106) aporta un ejemplo donde la diferencia entre el modelo borroso y el probabilístico es patente. Se refiere a variables borrosas normales. Cuando se suman variables aleatorias incorreladas, las varianzas son aditivas. Pues bien, cuando se suman variables borrosas normales, las desviaciones, y no las varianzas, son aditivas. De hecho, él apunta que este hecho puede servir para juzgar qué modelo es el más apropiado en un caso concreto, si el probabilístico o el borroso.

Desde un punto de vista frecuentista, encontramos el teorema LB, YN-MU[20] de Ellen HISDAL [353] (p. 343): «cuando una curva de pertenencia y una curva de verosimilitud han sido ambas deducidas bajo las mismas condiciones reales de experimentación, sean condiciones exactas o no exactas estimadas por el sujeto en conexión con su borrosidad de tipo[21] #1a, entonces, la curva de pertenencia esperada es una versión rematada *(rounded-off)* de la curva de verosimilitud. Más precisamente, es la convolución de la curva de verosimilitud con la curva de error estimado.»

James BEZDEK [547] propone que reflexionemos sobre el siguiente ejemplo, ya clásico. Sea L el conjunto nítido de todos los líquidos y sea L_P el conjunto borroso de todos los líquidos potables. Supongamos que estamos en mitad del desierto, sin nada que beber y tenemos una sed terrible: necesitamos beber. Nos dan a elegir entre dos botellas B_1 y B_2, de las que únicamente nos informan que $L_P(B_1) = 0.91$ (el líquido que contiene B_1 pertenece a L_P con un valor de 0.91) y que $p(B_2 \in L_P) = 0.91$ (la probabilidad de que el líquido que contiene B_2 pertenezca a L_P es de 0.91). ¿Qué botella elegimos?

[19] *Cfr.* Def. 15 (pág. 63).

[20] **LB** (*labeling*): corresponde a situaciones en las que un objeto es descrito «tal como es», *v. gr.*, «muy grande». **YN** (*yes-no*) corresponde a situaciones en las que una persona responde con sí (Y) o no (N). **MU** (*grade of membership*) corresponde a situaciones en las que se asigna un valor de grado de pertenencia. Nótese que esto ocurre muy difícilmente en la realidad —*cfr.* HISDAL [353] (p. 334).

[21] La **borrosidad de tipo #1a** —*cfr.* HISDAL [353] (p. 335)— hace referencia a que el sujeto es capaz de anticipar que en observaciones bajo condiciones reales de experimentación habrá errores; es decir, aunque él disponga de un estimador, sabe que la aplicación de éste en la realidad va acompañada, inevitablemente, de error, debido a la inevitable no exactitud de las condiciones de experimentación en la vida real.

La gran mayoría de la gente preferirá la botella B_1. Argumentarán que B_1 podría contener, por ejemplo, agua de un río o de un pantano (se supone que no contaminada), pero en ningún caso otro tipo de líquidos como pudiera ser ácido clorhídrico (siempre que no te quieran jugar una pésima pasada). Sin embargo, la probabilidad no nos orienta sobre el grado de potabilidad del contenido de B_2. Nos dice que de un número muy grande de situaciones similares a ésta, se espera que el contenido de B_2 sea potable un 91% de las veces, no siéndolo un 9%; en otras palabras, el contenido de B_2 es probable que sea mortal una de cada diez veces.

Claro que muchos se preguntarán si tiene algún sentido hablar de probabilidad en este ejemplo ¿Cuántas veces se ha repetido este experimento para poder hablar de probabilidad? ¿A cuántos viajeros exhaustos y sin nada que beber en mitad del desierto se les ha propuesto este dilema? Quienes se hacen estas preguntas, se llaman frecuentistas.

Imaginemos finalmente, que decidimos examinar los contenidos de ambas botellas. Después de hacerlo, el valor de la función de pertenencia para la «botella borrosa» no cambia (en realidad, no *puede* cambiar, siempre que no te intenten jugar una mala pasada), sin embargo, el valor de la probabilidad de la «botella probabilística», *seguro* que cambia a uno o cero: una vez conocido el contenido, éste será o no será potable.

Un segundo ejemplo alude a la clásica paradoja de RUSSELL (1901) —*cfr.* MOSTERÍN [548] (pp. 152ss.)— sobre aquél barbero que afeita únicamente a aquéllos que no se afeitan a sí mismos. ¿Quién afeita al barbero? GAINES [549] apunta una posible «resolución borrosa» de la paradoja.

Sea $S \equiv$«El barbero se afeita a sí mismo». Se tiene que $S \Rightarrow \neg S$ y que $\neg S \Rightarrow S$, por lo que $S \Leftrightarrow \neg S$. Asumiendo que las proposiciones que son equivalentes deben tener el mismo valor de verdad:

$$\begin{aligned} V(S) &= V(\neg S) \\ &= 1 - V(S) \end{aligned}$$

de donde $V(S) = 1/2$. Este resultado, carente de sentido en lógica bivalente, parece tenerlo en lógica borrosa. Pero, ¿basta con que aparte de sí mismo otra persona participe en su afeitado? O, ¿tiene el barbero que afeitarse media cara y la otra persona afeitarle la otra media? GRIM [550] analiza esta paradoja utilizando *auto-referencia* y *caos*. Esta paradoja representa una clase donde también están la del *cretense*: ¿miente o no aquel cretense que dice que todos los cretenses son unos mentirosos?, o la de la tarjeta: una tarjeta dice en una cara «la frase en la otra cara es verdadera» y dice en la otra cara «la frase en la otra cara es falsa».

No obstante lo dicho, un buen punto de comienzo para el lector interesado pueden ser los artículos de DUBOIS y PRADE [165], MONTERO y MENDEL [169], KOSKO [164], GAINES [549], GRIM [550] y GIL [551]. La opinión de Bart KOSKO puede encontrarse, entre otros lugares, en [176] (pp. 9ss. *et passim*), así como en dos libros divulgativos [58, 59].

4.9 Extensión de una operación a conjuntos borrosos

«Es una desgracia dudar, pero es un deber indispensable indagar en la duda.»
—Blaise PASCAL <Pensamientos>

El problema consiste en, dada una función, operador o relación nítida, definir su extensión borrosa. Seguimos fundamentalmente la línea expositiva de Isabelle BLOCH [552] (§2.1). Destacamos cuatro métodos genéricos, basados en:

- la utilización del principio de extensión de ZADEH [432] (I),
- la utilización de los α-cortes,
- una combinación de los dos anteriores,
- el borrosificado de la definición de la operación, en general, mediante una traducción de las expresiones nítidas a expresiones borrosas equivalentes.

4.9.1 Principio de extensión de Zadeh

Es de todos conocida la forma en que se define la extensión de una función al conjunto potencia de su dominio.

Definición 38 *Sea una función nítida $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$. Notemos, para cualquier $y \in \mathcal{V}$, mediante $f^{-1}(y)$ el conjunto $\{x \in \mathcal{U} : y = f(x)\}$. Se dice que la función:*

$$\begin{array}{rccl} \widehat{f}: & \mathfrak{P}(\mathcal{U}) & \to & \mathfrak{P}(\mathcal{V}) \\ & A & \mapsto & \widehat{f}(A) = \{y \in \mathcal{V} : f^{-1}(y) \neq \varnothing\} \end{array} \tag{4.60}$$

es la ***extensión de* f *a las partes*** *de $\mathcal{U}$.*

Obsérvese —*cfr.* Trillas, Alsina y Terricabras [316] (p. 166)— que la función característica de $\widehat{f}(A) \in \mathfrak{P}(\mathcal{V})$ puede expresarse en términos de la función característica de $A \in \mathfrak{P}(\mathcal{U})$ como:

$$\begin{array}{rccl} \chi_{\widehat{f}(A)}: & \mathcal{V} & \to & \{0,1\} \\ & y & \mapsto & \chi_{\widehat{f}(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \chi_A(x) \end{array} \tag{4.61}$$

Esto motiva la siguiente definición de extensión de una función nítida a los subconjuntos borrosos —*cfr.* Zadeh [432] (I).

Definición 39 *Dada la función nítida $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, se define la* ***extensión de* f *a los subconjuntos borrosos*** *de $\mathcal{U}$, precisamente como la función:*

$$\begin{array}{rccl} {}_\square f: & \mathfrak{F}(\mathcal{U}) & \to & \mathfrak{F}(\mathcal{V}) \\ & A & \mapsto & {}_\square f(A) \end{array} \tag{4.62}$$

tal que:

$$\begin{array}{rccl} {}_\square f(A): & \mathcal{V} & \to & [0,1] \\ & y & \mapsto & {}_\square f(A)(y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si\ f^{-1}(y) = \varnothing \\ \sup_{x \in f^{-1}(y)} A(x) & si\ f^{-1}(y) \neq \varnothing \end{array} \right. \end{array} \tag{4.63}$$

Obsérvese que si f es inyectiva, entonces:

$${}_\square f(A)(y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \varnothing \\ A(f^{-1}(y)) & \text{si } f^{-1}(y) \neq \varnothing \end{array} \right. \tag{4.64}$$

Definición 40 *En general, dada la función nítida $f : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \ldots \times \mathcal{U}_n \to \mathcal{V}$, y notando, para cualquier $y \in \mathcal{V}$, mediante $f^{-1}(y)$ el conjunto $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_n : f(x_1, x_2, ..., x_n) = y\}$, entonces, se define la extensión (cartesiana) de f a $\mathfrak{F}(\mathcal{U}_1) \times \ldots \times \mathfrak{F}(\mathcal{U}_n)$ como —cfr. Isabelle* Bloch *[552] (p. 105):*

$$\begin{array}{rccl} {}_\square f: & \mathfrak{F}(\mathcal{U}_1) \times \ldots \times \mathfrak{F}(\mathcal{U}_n) & \to & \mathfrak{F}(\mathcal{V}) \\ & (A_1, \ldots, A_n) & \mapsto & {}_\square f(A_1, \ldots, A_n) \end{array} \tag{4.65}$$

tal que ${}_\square f(A_1, \ldots, A_n) : \mathcal{V} \to [0,1]$ está definida por:

$${}_\square f(A_1, \ldots, A_n)(y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si\ f^{-1}(y) = \varnothing \\ \sup_{(x_1,...,x_n) \in f^{-1}(y)} \min\{A_1(x_1), \ldots, A_n(x_n)\} & si\ f^{-1}(y) \neq \varnothing \end{array} \right. \tag{4.66}$$

En el libro de George J. Klir y Bo Yuan [46], pueden consultarse (caps. 2 y 5) unas listas de propiedades relativas a este principio. Por citar un ejemplo, observemos que si se alcanza el supremo en (4.66), entonces, para todo $\alpha \in [0,1]$:

$${}^\alpha\left[{}_\square f(A_1, A_2, ..., A_n)\right] = f({}^\alpha A_1, {}^\alpha A_2, ..., {}^\alpha A_n) \tag{4.67}$$

La utilización del mínimo en (4.66) es arbitraria. Usando por ejemplo el producto, y en general una t-norma, resultan otros principios de extensión —*cfr.* Dubois y Prade [437].

4.9.2 Combinación de resultados en α-cortes

Sean $\mathcal{U} \neq \varnothing$ un universo de discurso y $\mathcal{V} \neq \varnothing$ un espacio de valores. Si $R_b : \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{V}$, es una operación o **relación binaria** entre conjuntos nítidos, entonces la **equivalente borrosa** R de R_b se define

como una función —*cfr.* DUBOIS y JAULENT [553]; KRISHNAPURAM, KELLER y MA [554]; BLOCH y MAÎTRE [555]; BLOCH [552]:

$$\begin{array}{rccl} R: & \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{F}(\mathcal{U}) & \rightarrow & \mathcal{V} \\ & A & \mapsto & R(A) = \int_0^1 R_b(^{\alpha}A)d\alpha \end{array} \tag{4.68}$$

Otros procedimientos posibles para **introducir borrosidad** son —*cfr.* BLOCH [552] (pp. 105ss.):

$$R(A) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min(\alpha, R_b(^{\alpha}A)) \tag{4.69}$$

si la relación toma valores en $[0,1]$, o:

$$R(A) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha R_b(^{\alpha}A)) \tag{4.70}$$

Obsérvese que si R_b es bivalente y decreciente (resp., creciente) respecto de α, entonces, las ecuaciones (4.68), (4.69) y (4.70) proporcionan el mismo resultado.

Si R_b tiene dos argumentos, su equivalente borrosa R, se define —*cfr.* BLOCH [552] (p. 106)— como una generalización de las ecuaciones anteriores. Así por ejemplo, $R : \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{V}$, es tal que la Ec. (4.68) queda:

$$R(A,B) = \int_0^1 R_b(^{\alpha}A, {}^{\alpha}B)d\alpha \tag{4.71}$$

o mediante integración doble:

$$R(A,B) = \int_0^1 \int_0^1 R_b(^{\alpha}A, {}^{\beta}B)d\alpha d\beta \tag{4.72}$$

Los procedimientos (4.69) y (4.70) pueden extenderse sin dificultad a vectores borrosos y operaciones de aridad n.

4.9.3 Principio de extensión basado en α-cortes

Sean $\mathcal{U} \neq \varnothing$ un universo de discurso y $\mathcal{V} \neq \varnothing$ un espacio de valores. Si $R_b : \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{V}$, entonces, de forma parecida al principio de extensión de ZADEH, en vez de asignar un valor $v \in \mathcal{V}$, a cada par de conjuntos borrosos A y B, ahora se asignará un subconjunto borroso de $\mathcal{V}$. Así:

$$\begin{array}{rccl} R: & \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{F}(\mathcal{U}) & \rightarrow & \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \\ & A & \mapsto & R(A,B)(v) = \sup_{R_b(^{\alpha}A, {}^{\alpha}B)=v} \alpha \end{array} \tag{4.73}$$

Si R_b es bivalente, entonces:

$$R(A,B) = \sup_{R_b(^{\alpha}A, {}^{\alpha}B)=1} \alpha \tag{4.74}$$

4.9.4 Traducción nítido-borroso

En esta aproximación no se usa la definición de la función nítida sino una transformación sintáctica directa —*cfr.* Tabla 4.6.

Ejemplo 41 (Introduciendo borrosidad en la inclusión de conjuntos) *Si A y B son dos subconjuntos nítidos de un universal $\mathcal{U}$, puede caracterizarse la inclusión de A en B usando sus funciones características:*

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow (\forall u \in \mathcal{U}) \left(\chi_A(u) \leq \chi_B(u)\right)$$

En su artículo de 1965 [381], ZADEH *propuso utilizar la misma relación para definir la inclusión entre subconjuntos borrosos. La* ***inclusión de* Zadeh***, entre conjuntos borrosos se define, para todo $A, B \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$:*

$$A \subseteq_Z B \Longleftrightarrow (\forall u \in \mathcal{U}) \left(A(u) \leq B(u)\right) \tag{4.75}$$

nítido	equivalente borroso
conjunto	conjunto borroso - función de pertenencia
intersección	t-norma
unión	t-conorma
complementario	complementación borrosa
cuantificador existencial	supremo
cuantificador universal	ínfimo

Tabla 4.6: *Equivalencia entre conceptos nítidos y difusos.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

Pero quizás resulte extraño en este ambiente borroso que la inclusión de ZADEH *no permita gradaciones intermedias en el hecho de ser subconjunto, esto es, según ella, un conjunto borroso es subconjunto de otro conjunto borroso o no lo es (grados de inclusión posibles,* 0 *y* 1*). La inclusión propuesta seminalmente por* ZADEH *es pues una inclusión nítida entre conjuntos borrosos.*

Una definición aceptada de (indicador de) inclusión borrosificada es la siguiente —cfr. NACHTEGAEL *y* KERRE *[556] (p. 45)—. La función $Inc : \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n) \to [0,1]$ es una **inclusión «borrosificada»** en $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ precisamente si su restricción a $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ es la inclusión nítida entre conjuntos nítidos, o sea, que para todos $A, B \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$, se verifica:*

$$A \subseteq B \Rightarrow Inc(A,B) = 1 \tag{4.76}$$

$$A \nsubseteq B \Rightarrow Inc(A,B) = 0 \tag{4.77}$$

Isabelle BLOCH *[552] (pp. 107-108) propone*[22] *introducir borrosidad en (4.75) a partir de la siguiente definición de la inclusión nítida entre conjuntos nítidos:*

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\longleftrightarrow A^C \cup B = \mathcal{U} \\ &\longleftrightarrow (\forall u \in \mathcal{U}) \left(u \in A^C \cup B\right) \end{aligned} \tag{4.79}$$

pues entonces, usando la tabla (4.6) obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} \forall u \in \mathcal{U} & \longleftrightarrow & \inf_{u \in \mathcal{U}} \\ x \in A^C & \longleftrightarrow & \mathcal{N}(\widetilde{A}(x)) \\ x \in B & \longleftrightarrow & \widetilde{B}(x) \\ A^C \cup B & \longleftrightarrow & \mathfrak{T}(\mathcal{N}(\widetilde{A}), \widetilde{B}) \end{array} \tag{4.80}$$

donde $\mathcal{N}$ es una negación y $\mathfrak{T}$ una t-conorma (cfr. supra §4.6), y para evitar confusión, A y B representan conjuntos nítidos y $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ conjuntos borrosos.

*De aquí (4.79) se extiende al **indicador de inclusión de*** **Bloch** *[552] (p. 108):*

$$Inc_{\mathrm{B}}(A,B) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \mathfrak{T}(\mathcal{N}(\widetilde{A}(u)), \widetilde{B}(u)) \tag{4.81}$$

[22] Ejemplos de indicadores de inclusión «borrosificada», que permiten tal gradación son las propuestas por BANDLER y KOHOUT [557, 558], SINHA y DOGHERTY [559], y KITAINIK [560].

La aproximación de BANDLER y KOHOUT [557, 558] es, posiblemente, la más conocida. En obras donde el tratamiento es más generalista —*cfr.* ALIMOV [561]—, es la que aparece como definición genérica de grado de inclusión. Esta aproximación se basa en la borrosificación directa de la definición de inclusión conjuntista en $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$:

$$\forall A, B \in \mathfrak{P}(\mathcal{U}) : A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall u \in \mathcal{U})\,(u \in A \Rightarrow u \in B)$$

mediante la noción de implicador (véase también la siguiente nota a pie de página):

Sean $A, B \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ e $\mathcal{I}$ un implicador en $[0,1]$. El indicador de BANDLER y KOHOUT $Inc_{\mathcal{I}}$ de inclusión borrosificada asociado al implicador $\mathcal{I}$ es la aplicación:

$$\begin{aligned} &Inc_{\mathcal{I}} : \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \to [0,1]\ , \\ &Inc_{\mathcal{I}}(A,B) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{I}(A(u), B(u))\ . \end{aligned} \tag{4.78}$$

Las propuestas de SINHA y DOGHERTY [559], y KITAINIK [560], se basan en el postulado de ciertos axiomas intuitivamente aceptables, nueve en el caso de la de SINHA y DOGHERTY, y cuatro en el de la de KITAINIK —*cfr.* NACHTEGAEL y KERRE [556] (§8.3, §8.4 y §8.5).

[22] Aunque los artículos de BANDLER y KOHOUT [557, 558] constituyen todo un estudio sistemático sobre implicadores, pueden verse, desde una panorámica más actual, por ejemplo, en el libro de KLIR y YUAN [46] y en el de TRILLAS, ALSINA y TERRICABRAS [316]. La versiones originales también pueden verse en el artículo de NACHTEGAEL y KERRE [556] (§8.3, §8.4 y §8.5).

4.10 ¿Cómo y por qué eliges esa función de pertenencia?

«Cuando Berkeley le dice a Bayes: "¿de dónde ha salido esa a priori?", Bayes puede responder: "¿de dónde ha salido ese espacio muestral?"»
—Dennis V. LINDLEY [562] (p. 20)

... y, ¿de dónde ha salido esa función de pertenencia? ¿O no?

Una de las razones más frecuentemente oídas —de la comunidad estadística— para no incorporar la teoría borrosa es la dificultad para establecer la función de pertenencia de un conjunto borroso. Que existe tal dificultad es indudable, pero el mismo tipo de problema tiene la distribución a priori en la formulación bayesiana y la verosimilitud en la frecuentista —*cfr.* LINDLEY [562] (§ 1.4); BAYARRI, DEGROOT y KADANE [563]—. Es la dificultad de medir la incertidumbre.

Diversas y muy variadas han sido las propuestas de **construcción de funciones de pertenencia** —*cfr.* PEDRYCZ [449] (§2.8) y §4.5 de la presente tesis—. No obstante, a pesar de lo dicho, no hacemos ninguna suposición acerca de la construcción de las funciones de pertenencia. Mejor dicho, únicamente asumimos la racionalidad del decisor —*cfr.* §1.4.

Como decíamos en §4.5, JOHN [564] distingue dos categorías de métodos para determinar las funciones de pertenencia —*membership function identification methods* (MFIMs): los métodos manuales y los automáticos. Entre los **métodos manuales**, destacan las técnicas estadísticas, de las que WATANABE [565] distingue dos categorías: las basadas en frecuencia y las basadas en una estimación directa, y tras varios experimentos, deduce que las segundas son mejores que las primeras.

Según NAKAMURA [566], estos métodos se dividen en dos grandes categorías. Una incluye aquellos métodos según los cuales los sujetos deben ordenar los referentes según grados de pertenencia —*rating membership grade for presenting element* (RM)—. La otra clase de métodos requiere que los sujetos encuentren el o los referentes (o incluso intervalos de referentes, caso de que ser posible) que correspondan a grados de pertenencia que les han sido presentados —*answering elements corresponding to membership grade(s)* (AE)— (llamados métodos de ordenación inversa (*reverse rating*) —*cfr.* NORWICH y TURKSEN [567]; TURKSEN [568]).

Entre los primeros tenemos: *Estimar el grado de pertenencia como un valor de Probabilidad obtenido a partir de ordenación Binaria* (EPB); *Traducir el grado de Confianza de la ordenación Binaria en grado de pertenencia* (TCB); *Traducir el Tiempo requerido para la ordenación Binaria en grado de pertenencia* (TTB); *ordenación directa —Direct Rating* (DR), conocido también como *magnitude estimation* (*cfr.* NORWICH y TURKSEN [567], p. 11)—, considerando *grados de pertenencia multi-discretos —Direct Rating in Multi discrete membership grades* (DRM)— o *grados de pertenencia continuos* (DRC); *ordenación comparada —Comparing Rating* (CR)—, *ordenando razones de grados de pertenencia —Rating Ratio* (RR)—, o haciendo una *comparación diferencial entre grados de pertenencia —Differential Comparison* (DC)—. Como métodos AE, NAKAMURA [566] distingue entre considerar un sólo grado de pertenencia (AEO) o varios (AES). También hay métodos que combinan varias ideas, por ejemplo, el método BASE (*Boundary ASymptotic Estimation method*) de Ayumi YOSHIKAWA [569]. El más usado, con carácter general, es la ordenación directa, que requiere de los sujetos que asignen directamente valores a cada elemento referente.

Estos métodos se complementan con: los *basados en encuestas* (*polling*) —*cfr.* TURKSEN [568]—, en las que se pregunta a los sujetos si están de acuerdo con las asignaciones establecidas para los referentes —otro autor, Willett KEMPTON [570], emplea un método que considera no una sino un *conjunto de encuestas*—; las *estadísticas con valoración conjuntista* (*set valued statistics*) —*cfr.* TURKSEN [568]—. GAINES [571] (pp. 165-166) sugiere estimar los grados de pertenencia mediante medias de las respuestas bivalentes (si-no). Robin GILES [572] utiliza un procedimiento de apuestas. En relación a las técnicas estadísticas, puede leerse también a Didier DUBOIS y Henri PRADE [573], a BHARATHI DEVI y SARMA [574], a CIVANLAR y TRUSSELL [575] y a Witold PEDRYCZ [449] (§2.8.2).

Robert I. JOHN [564] argumenta que todas las aproximaciones manuales adolecen de la deficiencia de que se basan en una interpretación subjetiva de las palabras. Nosotros no creemos que esto sea un inconveniente. Simplemente es así: ¡eso es lo que hay! El conocimiento es subjetivo, la información es objetiva. Creemos que es una ventaja que los métodos participen de nuestra subjetividad —al menos si nuestra meta es simular la decisión humana.

Las **aproximaciones automáticas** se distinguen de las manuales en que, o bien no se tiene en cuenta a los expertos, o bien la función de pertenencia deducida del conocimiento de los expertos se usa como conocimiento a priori para que el sistema realice lo que se ha venido en llamar un ajuste (*fine tune*) en pos de una mejor estimación de la función de pertenencia. Las principalmente utilizadas son —*cfr.* JOHN [564]: *redes de neuronas artificiales —cfr.* TAKAGI y HAYASHI [576]; WANG [577]— (ISHIBUSHI y MORIAKA [578] las usan para

determinar funciones de pertenencia para conjuntos borrosos de tipo 2), *algoritmos genéticos* —*cfr.* KARR [579]; MEREDITH, KARR y KRISHNA KAMUR [580]; LEE y TAKAGI [581]—, *prototipos deformables* —*cfr.* BREMERMANN [582]—, *búsqueda de gradiente* —*cfr.* BURKHARDT y BONISSONE [583]— y *razonamiento inductivo* —*cfr.* KIM y RUSSELL [584].

4.11 Un pecado lógico: Investigando los conjuntos borrosos «tetra»

«Dudad de todo y sobre todo lo que voy a deciros.»
—Sidharta GAUTAMA (BUDA)

Un conjunto borroso queda caracterizado por su función de pertenencia. Un conjunto borroso intuicionista considera, además, la función de no-pertenencia; es un caso particular —para $L = [0,1]$— de conjunto L-borroso intuicionista, siendo $(L, \leq)$ un retículo. Las funciones de pertenencia y no-pertenencia se relacionan mediante una involución de inversión de orden en $(L, \leq)$. La idea que aportamos en esta sección es ampliar estos conceptos considerando una lógica base trivalente, que refleje situaciones de duda sobre «la pertenencia o no pertenencia» (el típico «no sabe, no contesta» de una encuesta) —tres valores: Sí, No, Ns/Nc—, o tetravalente: ¿por qué no considerar dudas separadas, es decir, dudas sobre «la pertenencia» y dudas sobre «la no pertenencia»?

4.11.1 Los conjuntos borrosos intuicionistas

La definición de conjuntos borrosos (*fuzzy sets —FS*) de ZADEH [381], al igual que su su generalización a conjuntos L-borrosos (*L-fuzzy sets —LFS*) de GOGUEN [405], se basan en una función de pertenencia, extensión a $[0,1]$ o a un retículo $(L, \leq)$, respectivamente, de una función característica bivalente.

Lo mismo ocurre con los conjuntos borrosos intuicionistas (*intuitionistic fuzzy sets —IFS*) de Krassimir T. ATANASSOV [456, 457], al igual que su generalización a conjuntos L-borrosos intuicionistas (*intuitionistic L-fuzzy sets —ILFS*) [585, 458, 459]. Si E es un universal, entonces, un **conjunto L-borroso intuicionista** es:

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in E\} \tag{4.82}$$

donde $\mu_A : E \to L$ y $\nu_A : E \to L$ definen el grado de pertenencia y el de no pertenencia del elemento x a A, que satisfacen la propiedad:

$$(\forall x \in E)(\mu_A(x) \leq N(\nu_A(x))) \tag{4.83}$$

donde $N : L \to L$ es una involución de inversión de orden en el retículo $(L, \leq)$. Si $L = [0,1]$, entonces A es un **conjunto borroso intuicionista** y se satisface:

$$(\forall x \in E)(0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1) \tag{4.84}$$

Un conjunto borroso ordinario es un caso particular de IFS de la forma:

$$\{\langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\rangle \mid x \in E\} \tag{4.85}$$

4.11.2 Una lógica base tri- o tetravalente

Sea Q un conjunto de preguntas. Intuimos que los resultados de una posible encuesta trivalente (de posibles respuestas: sí, no, no sé) para una pregunta $x \in Q$ determinada podrían ser: 60 por ciento sí, 30 por ciento no, y 10 por ciento, no sabe o no contesta. Si A es el conjunto de preguntas de la encuesta cuya respuesta es sí, podríamos asumir, intuitivamente, (aquí no hay probabilidad, al menos en el sentido clásico) que: $\mu_A(x) = 0.6$, y $\nu_A(x) = 0.3$, y así A (pues tendríamos algo parecido, para todo $x \in Q$) es un IFS de Q. Pero, ¿por qué no incluir en la descripción también la posible respuesta no sabe o no contesta?

Podríamos basarnos en lógica trivalente, y definir:

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \delta_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in E\} \tag{4.86}$$

donde $\mu_A : E \to [0,1]$, $\delta_A : E \to [0,1]$ y $\nu_A : E \to [0,1]$ definen el grado de pertenencia, el de duda sobre la pertenencia o no pertenencia, y el de no pertenencia del elemento x a A, que satisfacen:

$$(\forall x \in E)(0 \leq \mu_A(x) + \delta_A(x) + \nu_A(x) \leq 1) \tag{4.87}$$

Un conjunto borroso ordinario es un caso particular de 3FS de la forma:

$$\{\langle x, \mu_A(x), 0, 1 - \mu_A(x)\rangle \mid x \in E\} \tag{4.88}$$

Pero observemos que la duda es sobre «la pertenencia o no pertenencia». ¿Por qué no considerar dudas separadas y basarnos así en lógica tetravalente?

Proponemos la siguiente definición.

Definición 42 *Un **conjunto borroso «tetra»** (tetra fuzzy set —TFS) es:*

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \xi_A(x), \nu_A(x), \zeta_A(x)\rangle \mid x \in E\} \tag{4.89}$$

donde $\mu_A : E \to [0,1]$, $\zeta_A : E \to [0,1]$, $\nu_A : E \to [0,1]$ y $\xi_A : E \to [0,1]$ definen el grado de pertenencia, el de duda sobre la pertenencia, el de no pertenencia del elemento x a A, y el de duda sobre la no pertenencia, que satisfacen:

$$(\forall x \in E)(0 \leq \mu_A(x) + \zeta_A(x) + \nu_A(x) + \xi_A(x) \leq 1) \tag{4.90}$$

Un conjunto borroso ordinario es un caso particular de TFS de la forma:

$$\{\langle x, \mu_A(x), 0, 1 - \mu_A(x), 0\rangle \mid x \in E\} \tag{4.91}$$

4.11.3 Metas inmediatas

- Demostrar la existencia de un TFS puro, es decir, un TFS que no sea un FS.
- Operaciones algebraicas y aritméticas de los TFS. Por ejemplo:

$$\overline{A} = \{\langle x, \nu_A(x), \xi_A(x), \mu_A(x), \zeta_A(x)\rangle \mid x \in E\} \tag{4.92}$$

- Posible extensión a TLFS, es decir considerar un retículo $(L, \leq)$ en vez de $([0,1], \leq)$.
- Estudio de la transformación de un conjunto tetra-borroso en un conjunto borroso. Se usarán operadores modales con tratamiento de la incertidumbre sobre la pertenencia y la no pertenencia.

4.11.4 Uso de operadores modales extendidos

Para la última de las metas relatadas se utilizarán dos operadores extensiones de los operadores de necesidad y posibilidad usuales de las lógicas modales —*cfr.* ORAYEN [586]; JANSANA [264]; HUGHES y CRESSWELL [587]; HAACK [428] (cap. 10); QUESADA [588] (p. 231-253); GARRIDO [589] (§4.1)—, que notaremos $\Box$ y $\Diamond$, respectivamente. Las razones son, fundamentalmente, dos. Primero, que ATANASSOV emplea los operadores modales en su estudio de los conjuntos borrosos intuicionistas. Segundo, el uso de la lógica modal en verificación de programas, campo con el que nos une la asignatura «Lógica y Computabilidad» que impartimos en 5°curso de Ingeniería Informática[23].

En concreto, Krassimir T. ATANASSOV [458] (p. 91) define los operadores:

$$\begin{aligned} \Box A &= \{\langle x, \mu_A(x)\rangle \mid x \in E\} && (4.93)\\ &= \{\langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\rangle \mid x \in E\} && (4.94)\\ \Diamond A &= \{\langle x, 1 - \nu_A(x)\rangle \mid x \in E\} && (4.95)\\ &= \{\langle x, 1 - \nu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in E\} && (4.96) \end{aligned}$$

[23] Por razones pedagógicas y de simplificación, en dicha asignatura consideramos únicamente programas determinísticos. Por estado o mundo posible, entendemos un **«estado de ejecución»**, cuyo dominio estará formado por todos los valores actuales de todas las variables de programa en una cierta etapa de la ejecución. El sistema lógico más adecuado será **S4** —*cfr.* ORAYEN [586] (p. 309)—, pues en un programa, la **relación de accesibilidad** es reflexiva y transitiva, no siendo simétrica.

Planteamos extender ambos operadores de manera que incluyan incertidumbre en la duda:

$$\begin{aligned}
\Box^* A &= \{\langle x, \mu_A(x), \zeta_A(x)\rangle \mid x \in E\} && (4.97)\\
&= \{\langle x, \mu_A(x), \zeta_A(x), N_{\nu,\xi}(\mu_A(x)), N'_{\nu,\xi}(\zeta_A(x))\rangle \mid x \in E\} && (4.98)\\
\Diamond^* A &= \{\langle x, N_{\mu,\zeta}(\nu_A(x)), N'_{\mu,\zeta}(\xi_A(x))\rangle \mid x \in E\} && (4.99)\\
&= \{\langle x, N_{\mu,\zeta}(\nu_A(x)), N'_{\mu,\zeta}(\xi_A(x)), \nu_A(x), \xi_A(x)\rangle \mid x \in E\} && (4.100)
\end{aligned}$$

donde N y N' son tales que:

$$\begin{aligned}
\mu_A(x) + \zeta_A(x) + N_{\nu,\xi}(\mu_A(x)) + N'_{\nu,\xi}(\zeta_A(x)) &= 1 && (4.101)\\
N_{\mu,\zeta}(\nu_A(x)) + N'_{\mu,\zeta}(\xi_A(x)) + \nu_A(x) + \xi_A(x) &= 1 && (4.102)
\end{aligned}$$

Si bien cada operador $\Box$ y $\Diamond$ permite transformar un conjunto borroso intuicionista en único conjunto borroso ordinario, no ocurre lo mismo con los operadores $\Box^*$ y $\Diamond^*$. Dado un conjunto borroso tetra, estos operadores asocian dos familias de conjuntos borrosos ordinarios, parametrizadas por N y N'.

Actualmente estamos investigando si $\Box^*$ y $\Diamond^*$ verifican teoremas clásicos para la lógica modal. Como ejemplo, veamos que la interdefinición:

$$\Box A = \overline{\Diamond \overline{A}} \qquad (4.103)$$

se verifica para los operadores extendidos. En efecto:

$$\begin{aligned}
\Diamond^* \overline{A} &= \{\langle x, N_{\mu,\zeta}(\nu_{\overline{A}}(x)), N'_{\mu,\zeta}(\xi_{\overline{A}}(x))\rangle \mid x \in E\}\\
&= \{\langle x, N_{\nu,\xi}(\mu_A(x)), N'_{\nu,\xi}(\zeta_A(x))\rangle \mid x \in E\}\\
&= \{\langle x, N_{\nu,\xi}(\mu_A(x)), N'_{\nu,\xi}(\zeta_A(x)), \mu_A(x), \zeta_A(x)\rangle \mid x \in E\}
\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
\overline{\Diamond^* \overline{A}} &= \{\langle x, \mu_A(x), \zeta_A(x), N_{\nu,\xi}(\mu_A(x)), N'_{\nu,\xi}(\zeta_A(x))\rangle \mid x \in E\}\\
&= \{\langle x, \mu_A(x), \zeta_A(x)\rangle \mid x \in E\}\\
&= \Box^* A
\end{aligned}$$

4.12 Cola: La «cochina lógica»

«En cuanto una cosa tiene razón de ser y ellos la conocen perdió todo su valor la cosa. Para eso les sirve la lógica, la cochina lógica.»
—Miguel de UNAMUNO, *via* José Luis MOSQUERA VILLAR [114] (p. 145)

La lógica contra la que se subleva Miguel de UNAMUNO es la aristotélica. Su rebelión es explícita contra los principios de contradicción y del tercio excluso. Según UNAMUNO, estamos sometidos a la tiranía del espacio, del tiempo y de la lógica. Del espacio, porque no nos deja estar en todos los lugares a la vez, multilocarnos; del tiempo, porque no nos permite ser antes, ahora y después, ser siempre; y de la lógica, porque nos ordena nuestros pensamientos, obligándonos a actuar según un orden, y privándonos, en consecuencia, de la libertad —*cfr.* MOSQUERA VILLAR [114] (p. 144).

La lógica borrosa sigue siendo una lógica.

Las demás lógicas —la **«tradicional»**, esto es, la *silogística aristotélica*; la **«clásica»**: *cálculo bivalente de enunciados*, *cálculo bivalente de predicados* (CBP), CBP *con identidad*, CBP de *segundo orden*; las **«extendidas»**: lógicas *modales* («necesario», «posible», «imposible»), lógicas *temporales* («solía ser el caso que», «será que», ...), lógicas *deónticas* (normativas) («permitido», «prohibido», «obligatorio»), lógicas *epistémicas* («sabe», «cree», ...), lógicas de la *preferencia* («prefiere», ...), lógicas *imperativas* (oraciones imperativas), lógicas *erotéticas* (interrogativas) (oraciones interrogativas); las **«divergentes»**: lógicas *multivalentes*, lógicas *intuicionistas* (constructivistas), lógicas *cuánticas*, lógicas de la *relevancia* («es relevante», «debería usarse», ...), lógicas *libres*, lógicas *inductivas*, lógicas *paraconsistentes*[24], etcétera—, SIGUEN SIENDO LÓGICA.

Y como tal son rígidas, porque rigen, si decidimos regirnos por ellas.

[24] Una teoría es **trivial**, precisamente si todos sus enunciados son teoremas; una teoría es **inconsistente** si contiene al menos

Cierto que ciertas lógicas flexibilizan la rigidez de las reglas, pero la flexibilidad no es continua, las reglas son dúctiles porque está permitida su modificación, según casos concretos. Sin embargo, una vez modificada, de nuevo es regla, rígida[25].

En oposición a esta rigidez, Miguel de UNAMUNO hablaba de la **cardíaca**:—*cfr.* José Luis MOSQUERA VILLAR [114] (p. 152):

> *«Frente a todas las negaciones de la* lógica, *que rige las relaciones aparenciales de las cosas, se alza la afirmación de la* cardíaca, *que sigue los toques sustanciales de ellas. Aunque tu cabeza diga que se te ha de derretir la conciencia un día, tu corazón, despertado y alumbrado por la congoja infinita, te enseñará que hay un mundo en que la razón no es guía. La verdad es lo que hace vivir, no lo que hace pensar.»*
> —Miguel de UNAMUNO, *via* José Luis MOSQUERA VILLAR [114] (p. 152)

> *«No, el corazón no es sólo una bomba como dicen los cardiólogos. La ciencia ha logrado medir su energía a más de metro y medio de distancia*(*). *Es que irradia. Él activa nuestros valores más profundos y realiza la transformación de* lo pensado a lo vivido. *Él conoce cosas que a nuestra mente no se le alcanzan. En el corazón residen el valor y el espíritu, la integridad y el sentido de misión. Es una fuente de energía y de sentimientos profundos que nos induce a aprender, cooperar, dirigir y servir.»*
> —Robert K. COOPER y Ayman SAWAF [146] (p. 31)
> (*) *En la página 398, nota 13, proporcionan las referencias a tres artículos publicados, respectivamente, en «Journal of Advancement in Medicine», «Subtle Energies»y «American Journal of Cardiology».*

4.13 Síntesis reflexiva

La mayor parte del presente capítulo, se centra en revisar algunas nociones, propiedades y teoremas, relativos a la lógica y a la teoría de conjuntos borrosas, así como a su historia. No obstante, lo original, además de en las diferentes observaciones que surgen a lo largo de la exposición, se aglomera en dos **contribuciones concretas**:

- En §4.4.5 destacamos la importancia de los números borrosos no normales, a los que denominamos **cuasi-números borrosos**, motivando su definición con varios ejemplos: *fiabilidad de dispositivos medidores* como los sonómetros (medidores de nivel sonoro); *desempeño de tareas*, interpretando la fiabilidad como *confianza en el trabajador*; comparación de calificaciones en un supuesto de *evaluación de capacidades subjetivas*; y valoración de la *capacidad de juicio de un evaluador*.

- El anexo anticipador §4.11 recoge algunas investigaciones nuestras a partir de los conjuntos borrosos o L-borrosos intuicionistas de Krassimir T. ATANASSOV. Un conjunto borroso queda caracterizado por su función de pertenencia. Un conjunto borroso intuicionista considera, además, la función de no-pertenencia; es un caso particular —para $L = [0, 1]$— de conjunto L-borroso intuicionista, siendo $(L, \leq)$ un retículo. Las funciones de pertenencia y no-pertenencia se relacionan mediante una involución de inversión de orden en $(L, \leq)$. La idea que aportamos en esta sección es ampliar estos conceptos considerando una lógica base trivalente, que refleje situaciones de duda sobre «la pertenencia o no pertenencia» (el típico «no sabe, no contesta» de una encuesta) —tres valores: [Sí], [No], [Ns/Nc]—, o tetravalente: ¿por qué no considerar dudas separadas, es decir, dudas sobre «la pertenencia» y dudas sobre «la no pertenencia»?

En cuanto a la revisión de la lógica y de la teoría de conjuntos borrosas, primero, llevamos a cabo un examen de sus antecedentes, tratando de situarlas en los contextos históricos y académicos adecuados. Los *grados de realidad* de PLATÓN, los *lektá deficientes* de la lógica de los estóicos antiguos, el «*más verdadero*» de todos los principios según ARISTÓTELES, la *zona de intuiciones e influencias* de Jan Christiaan SMUTS, los *conjuntos vagos* y los *conceptos flojos* (*loose*) de Max BLACK, la *sorpresa potencial* de George L. S. SHACKLE, las *cantidades nebulosas* (*cloudy*) de Lotfi Asker ZADEH, son algunos de los tantísimos nítidos precedentes de lo borroso.

un teorema tal que su negación también lo es; una lógica es **paraconsistente** si puede ser la lógica de teorías inconsistentes no triviales. Estas lógicas presentan muchísimas aplicaciones en Inteligencia Artificial, ..., lógica anotada (hay lógicas anotadas multivalentes), técnicas de programación anotada y de programación paraconsistente, etc. Alexius MEINONG, en su ensayo *The Theory of Objects*[590], elaboró una teoría de todos los objetos: concretos o abstractos, reales o ficticios, posibles o imposibles, presentes, pasados y futuros, independientes o dependientes, etc. Por ejemplo, en ella se permitía, por tanto, la existencia del objeto «círculo cuadrado».

[25] El sentido de esto, al menos así lo pretendemos, es más extenso que el de la afirmación de Susan HAACK de que la lógica borrosa no elimina la precisión, sino que únicamente retrasa su introducción [428] (§9.4), [429].

En §4.2 recordamos algunos orígenes de lo vago, propuestos desde la psicología: *lagunas de conocimiento* (hipótesis *gap*), *excesos de conocimiento* (hipótesis *glut*), la distinción que hace GOGUEN entre *la verdad y la verdad borrosa*, y la *vaguedad como ignorancia*, propuesta de Timothy WILLIAMSON.

La sección §4.3 se centra en la búsqueda de un tratamiento formal de la vaguedad: la lógica multivalente. Repasamos históricamente su nacimiento, a través de nombres como: Ramón LULL, Nicolás de KREBS, PEIRCE, VASILÉV, ŁUKASIEWICZ, POST, KLEENE, BOCHVAR, HEYTING y REICHENBACH.

La sección §4.5 presenta algunos subconjuntos borrosos no estándares: Φ-borrosos de SAMBUC, L-borrosos de GOGUEN, de nivel n o de tipo n de ZADEH, los *«flou sets»* de GENTILHOMME, los conjuntos *sub-definitivos* de NARIN'YANI, los conjuntos *rough* de PAWLAK, los conjuntos *intuicionistas* de ATANASSOV, los *«fuzzy rough sets»* y *«rough fuzzy sets»* de PAWLAK, y los conjuntos *doblemente borrosos* (*twofold fuzzy sets*) de DUBOIS y PRADE. También recordamos algunas otras propuestas alternativas a la teoría de conjuntos, siendo inherente a todas ellas la variabilidad y la vaguedad, como son: la *teoría de haces* de LERAY y CARTAN, la *teoría de topos* de GROTHENDIECK y VERDIER, los *conjuntos internos* de NELSON, los *conjuntos variables*, destacados por LAWVERE y usados en el *análisis no estándar* de ROBINSON y en el *«forcing»* de COHEN, y los *conjuntos alternativos* de VOPĚNKA, evolución de los *semi-conjuntos* de VOPĚNKA y HÁJEK (superclase de la de los conjuntos borrosos, que, a diferencia de estos últimos, *pueden definirse a partir de propiedades vagas, no siendo necesaria la utilización de funciones explícitas de grado de pertenencia*).

En §4.6 recordamos el concepto de una lógica borrosa y las de negación (estricta, continua o involutiva), conjunción, disyunción, semi-norma y semi-conorma, así como de norma triangular (t-norma) y conorma triangular (t-conorma), citando algunas t-normas y t-conormas frecuentes.

Dedicamos §4.7 a presentar cómo se trabaja formalmente con variables lingüísticas, o sea con variables cuyos valores son palabras. Es un trabajo en dos espacios: uno donde se sitúan las palabras (que es en el que el ser humano «trabaja» conscientemente a la hora de emplearlas), y otro donde están las representaciones matemáticas de dichas palabras (que es donde la matemática «trabaja» con ellas, en forma de funciones). En §4.7.2 presentamos métodos frecuentes para introducir borrosidad lingüística y para eliminarla.

En §4.8 recordamos que son muchas las medidas de la incertidumbre, algunas involucrando probabilidades, otras no. Algunos opinan y actúan a favor de la teoría de la probabilidad y en contra de la teoría de los conjuntos borrosos, como medidas de la incertidumbre, otros hacen lo contrario, y son muchos los que creen en su ortogonalidad, en su complementariedad, en que las incertidumbres con las que trabajan son distintas, en definitiva, son muchos los que tratan de trazar «puentes» entre ambas.

Su lema, resumido, es:

A la teoría de la probabilidad le atañen los sucesos,
a la teoría de los conjuntos borrosos, los conceptos.

En §4.9 presentamos cuatro formas típicas de hallar la *extensión borrosa* de una función, operador o relación nítida: utilizar el principio de extensión de ZADEH, combinar los resultados obtenidos para los α-cortes, usar el principio de extensión basado en α-cortes, o introducir borrosidad directamente en las operaciones que intervengan. En §4.10 citamos algunas de las propuestas de construcción de funciones de pertenencia, un problema similar al que presenta la distribución a priori en la formulación bayesiana y la verosimilitud en la frecuentista. Para nuestra Tesis, la única suposición que hacemos es la racionalidad del decisor.

Finalmente, en §4.12, compartimos la opinión de Miguel de UNAMUNO sobre la rigidez de la lógica.

5

Comparar, para aprender

«La semejanza entre los objetos comparados ha de ser, si no tan obvia que no cause placer ninguno el descubrirla, cuando menos tan sensible que tampoco sea necesario atormentarse para comprenderla.»
—Gómez de HERMOSILLA, *<El Arte de Hablar>*

Al ser una de nuestras metas la definición de un marco de trabajo adecuado para comparar conjuntos borrosos, ordinarios o no, parece ser de cajón que comencemos preocupándonos de la propia noción de comparación. Comenzamos estableciendo la reflexividad y la irreflexividad, como esencia de la comparación, y definimos los conceptos de asignación básica de similitud, de asignación básica de disimilitud y de medida de comparación entre objetos. Asimismo, reflexionamos sobre ciertas propiedades que cualquier asignación de medida de comparación entre objetos debería satisfacer. La introducción de la simetría, nos permite definir las nociones de similitud y disimilitud, a partir de las asignaciones básicas respectivas.
Los capítulos 6, 7 y 10, y los cuatro ensayos (Caps. 11, 12, 13 y 14), completarán el marco de trabajo, aquí iniciado, para comparar conjuntos borrosos, sean ordinarios o no.

5.1 Preámbulo

El término «comparación» será el más genérico que empleemos. Según el diccionario de la Real Academia Española (D.R.A.E.), *comparar* es «parangonar, fijar la atención en dos o más objetos para descubrir sus relaciones o considerar sus diferencias o semejanzas». En nuestro contexto, por «comparación», y *grosso modo*, entendemos una *semejanza* o *desemejanza*, siempre que la distinción entre ellas no necesite ser hecha[1]. De este modo, los vocablos semejanza y desemejanza, se arraciman con el término comparación, pendiendo los primeros del último, como gérmenes de una jerarquía lingüística.

A todos los efectos, consideramos sinónimas semejanza y asignación básica de similitud y desemejanza y asignación básica de disimilitud. No admitimos la simetría como elemento ingrediente de la forma sustancial, básica, de una similitud o disimilitud. Al menos, en español y en inglés. Según el diccionario de la R.A.E., semejanza posee el significado de copia, de imitación. Según el WEBSTER's [259], su equivalente inglés, *likeness*, posee el significado de «*the state or fact of being like*» (el estado o hecho de ser como), o sea, el mismo significado.

Definiremos —*cfr.* Defs. 48 y 49— los conceptos de *similitud* y *disimilitud* como semejanza y desemejanza simétricas, respectivamente. A continuación, definimos los conceptos de *distancia (de* BIRKHOFF*), separación, métrica, ultramétrica, distancia (écart) de* FRÉCHET y *distancia (écart) regular de* FRÉCHET.

Más adelante, en el Capítulo 11, definiremos *similaridad* (y su antónimo, *disimilaridad*) y *parecido* (y su antónimo, *distinción*). Todo ello conformará un marco de trabajo apropiado para comparar conjuntos borrosos. En este capítulo examinamos ciertas propiedades que las medidas de comparación deberían satisfacer. En capítulos posteriores, sugerimos algunas familias de medidas que se usarán como soporte para ciertos criterios basados en proximidades, que se utilizarán para comparar subconjuntos borrosos.

[1]KRZANOWSKI y MARRIOT [591] (p. 106), hacen una reflexión de intención parecida, sólo que ellos utilizan el término **«proxi\-mi\-dad»**. Sin embargo, nosotros reservamos este vocablo para denotar una relación simétrica de cercanía —*cfr. infra* Cap. 12—. Los **espacios de proximidad** —*cfr.* PERVIN [592]; THRON [593]— constituyen una clase «intermedia» de espacios entre los *espacios topológicos* —*cfr.* RIESZ [594]; FRÉCHET [595]; MOORE [596]; HINRICHSEN y FERNÁNDEZ [279]— y los *uniformes* —*cfr.* WEIL [597]; MAMUZIC [598]; BOURBAKI [599]; HINRICHSEN y FERNÁNDEZ [279]—. En páginas siguientes, no obstante, trabajaremos con un tipo particular de espacios uniformes, los *espacios métricos* —*cfr. infra* Def. 59 (pág. 97).

Uno de las metas que debemos tener siempre en mente es que, dado un universo de discurso no vacío (o referencial) $\mathcal{U}$, y una pareja de subconjuntos borrosos de $\mathcal{U}$, esto es $A, B \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$, donde $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$ denota la potencia borrosa de $\mathcal{U}$ —esto es, la clase de todos los subconjuntos borrosos de $\mathcal{U}$—, estamos interesados en definir y calcular una función:

$$d : \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{V} \tag{5.1}$$

donde $\mathcal{V}$ es un espacio de valoración adecuada, de forma que $d(A, B) \in \mathcal{V}$ represente un «coste» asociado a alguna de las sustituciones posibles «A por B» o «B por A», pudiendo interpretarse como una medida de la *desemejanza* existente entre A y B.

J. A. Hartigan [600] propuso la siguiente relación de doce estructuras de semejanza:

S1: s es la distancia euclidea —*cfr.* Ec. 5.17— en $E \times E$.

S2: s es una métrica —*cfr.* Def. 55— en $E \times E$.

S3: s se define en $E \times E$, está valorada en $\mathbb{R}$ y es simétrica.

S4: s se define en $E \times E$, está valorada en $\mathbb{R}$.

S5: s es un orden completo en $E \times E$.

S6: s es un orden parcial en $E \times E$.

S7: s es un árbol τ en E, esto es, un orden parcial de semejanza, $(i, j) \leq (k, l)$ siempre que $\sup_\tau(i, j) \leq \sup_\tau(k, l)$.

S8: s es un orden relativo completo de semejanza $\leq_i$ en E para cada objeto E_i de E: $j \leq_i k$ significa que E_j no es más semejante a E_i de lo que es E_k.

S9: s es un orden relativo parcial de semejanza $\leq_i$ en E.

S10: s es una dicotomía de semejanza en $E \times E$, esto es, $E \times E$ se divide en un subconjunto de pares semejantes y otro de pares no semejantes.

S11: s es una tricotomía de semejanza en $E \times E$, o sea, $E \times E$ se divide en un subconjunto de pares semejantes, otro de pares no semejantes, y el resto.

S12: s es una partición de E en subconjuntos de objetos similares.

Según Cormack [601], la mayoría de los estudios empíricos se han realizado con alguna de las tres primeras.

5.2 Reflexividad e irreflexividad: las esencias de la comparación

(Marina tiene cuatro años y es hija de Juan Miguel)
—J.M.: Pero si ambas cajas son iguales.
—Marina: No, no son iguales.
—J.M.: Pues yo no veo la diferencia.
—Marina: Es que la chica ha metido una bolsa de gusanitos en ésta.
—J.M.: Y, ¿cómo sabes que no ha metido otra bolsa de gusanitos en la otra?
—Marina: Porque no lo he visto.

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto referencial o universal no vacío. Sea $P = (C, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.)

Definición 43 *Denominamos* ***asignación*** *(parcial o total)* ***de comparación*** *entre elementos de $\mathcal{U}$, a cualquier función (parcial o total) $m : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to P$, tal que satisfaga los dos requisitos siguientes:*

i) $\mathrm{Ran}\, m$*, el recorrido o rango de la función m, es completo en el c.p.o., o sea, que posee mínimo y máximo;*

ii) $\forall u \in \mathcal{U},\ m(u, u) = \inf \mathrm{Ran}\, m$ *ó* $\forall u \in \mathcal{U},\ m(u, u) = \sup \mathrm{Ran}\, m$.

Es decir, a nuestro parecer, debemos exigir que al comparar un elemento consigo mismo, el valor establecido por la asignación de comparación sea el «máximo» o el «mínimo» permitido. A una asignación de comparación que asigne lo máximo (resp., lo mínimo) permitido, podríamos denominarla «asignación básica maximal» (resp., «asignación básica minimal»)[2].

Sin embargo, cuando se formaliza cualquier tipo de semejanza, es habitual que el mínimo del rango represente la desemejanza absoluta y que el máximo del rango represente la semejanza total. Esto motiva que nos atrevamos a llamar «asignación básica de similitud» a la «asignación básica maximal», y «asignación básica de disimilitud» a la «asignación básica minimal». Pero, insistimos, sólo es una licencia que nos permitimos.

Definición 44 *Decimos que una asignación de comparación $s : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to P$ es una* ***asignación básica de similitud*** *en $\mathcal{U}$, precisamente si es tal que para todo $u \in \mathcal{U}$:*

$$s(u, u) = \sup \operatorname{Ran} s \tag{5.2}$$

Definición 45 *Decimos que una asignación de comparación $d : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to P$ es una* ***asignación básica de disimilitud*** *en $\mathcal{U}$, precisamente si es tal que para todo $u \in \mathcal{U}$:*

$$d(u, u) = \inf \operatorname{Ran} d \tag{5.3}$$

Proposición 46 *Las únicas funciones reales f que son a la vez asignación básica de similitud y de disimilitud en un mismo universal $\mathcal{U}$, son las funciones constantes.*

Demostración. En efecto, trivialmente $\operatorname{Ran} f = \{\min \operatorname{Ran} f\} = \{\max \operatorname{Ran} f\}$. ■

Observación 47 *Por asignación de comparación, por tanto, nos referimos a cualquiera de las dos asignaciones básicas, de similitud o de disimilitud, siempre que la distinción entre ellas no necesite ser hecha. Advertimos varias consideraciones:*

1. *Parece obvio que si nuestro objetivo es comparar dos objetos u e v, pertenecientes a un universal $\mathcal{U}$, debemos hacerlo en el* ***espacio observado*** *$O(\mathcal{U})$ usando alguna clase de función que actúe sobre ciertos valores observados asignados a tales objetos:*

$$s(u, v) = f(o(u), o(v)) \tag{5.4}$$

   y que de alguna forma indique la «fuerza cohesiva» de la relación (de similitud básica) existente entre los objetos.

2. *Parece deseable que una asignación de comparación sea una* ***función total*** *en $O(\mathcal{U}) \times O(\mathcal{U})$, de forma que sea posible comparar* cualquier *par de objetos del universal observable $O(\mathcal{U})$. Para simplificar, notaremos de ahora en adelante, $O(\mathcal{U})$ como $\mathcal{U}$ y $o(u)$ como u, es decir,* presumimos nuestra capacidad de poder observar todo lo observable y nuestra capacidad de poder llevar a cabo restricciones de dominio *—uno es el dominio de los planetas y satélites y otro el de los quesos, aunque la luna se compare con uno de estos últimos—. A pesar de que todo ello, pueda parecer a algunos, que lo único que enaltezca esta presunción sea a nuestro antropocentrismo.*

3. *Una asignación de comparación debería valorarse en determinadas estructuras algebraicas, por ejemplo, en un cuerpo, pero en todo caso esto depende de los requerimientos mínimos de* ***poder de cálculo*** *que se pretenda que posea el sistema. La estructura elegida debería estar ordenada, pues así podrían compararse las valoraciones de la medida de comparación asociadas a diferentes parejas de objetos. Una estructura con amplio poder de cálculo es un* cuerpo ordenado *$(K, +, \cdot, \leq)$. Por ejemplo, podría hacerse en el cuerpo ordenado y* completo *de los números reales $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$. Si se considera sólo valoración no negativa, entonces, para un cuerpo ordenado cualquiera $(K, +, \cdot, \leq)$, la valoración se haría en K_0^+, el conjunto de los elementos* no negativos *del cuerpo.*

4. *Muchas asignaciones de comparación se valoran en la* ***recta real extendida*** *$P = (\overline{\mathbb{R}}, \leq)$, donde $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Esto se debe a que por ejemplo, en Análisis Jerárquico de Agrupamientos, se trabaja con* coeficientes de similaridad *(un caso particular de asignación básica de similitud) que pueden valer $+\infty$*

[2] El capítulo cuarto de la obra de Mª Purificación Galindo [266] repasa algunas condiciones suficientes para la existencia de extremos en una ordenación: lema de Max Zorn, lema minimal y maximal de Kacimir Kuratowski, principio minimal de Luitzen Egbertus Jan Brouwer, principio minimal de Zygmunt Janiszewski, principio maximal de John Wilder Tukey.

—por ejemplo, el índice σ^{SS2} *de* SNEATH *y* SOKAL *(cfr. Ec. 10.30) o el coeficiente* σ^{K1} *de* KULCZYNSKI *(cfr. Ec. 10.37)—, y también con* coeficientes de disimilaridad *(un caso particular de asignación básica de disimilitud) con posible valoración infinita —por ejemplo, la distancia euclidea* δ^{E} *(cfr. Ec. 10.80), su cuadrado* δ^{E2} *(cfr. Ec. 10.81), el índice de diferencia de tamaños* δ^{tam} *(cfr. Ec. 10.91) o el índice de discrepancia* δ^{di} *(cfr. Ec. 10.79)—. Asimismo, existen coeficientes de similaridad que toman valores negativos —por ejemplo, el índice* σ^{DIS} *de dispersión (cfr. Ec. 10.61), el coeficiente de coalición* Y *de* YULE *(cfr. Ec. 10.31), el índice de similaridad* Q *de* YULE *(cfr. Ec. 10.32), el coeficiente* phi *de* PEARSON *(cfr. Ec. 10.56) o el índice de* HAMANN *(cfr. Ec. 10.57).*

5. *Establecemos como axioma la* ***reflexividad*** *de una asignación básica de similitud. Si nuestro espacio de valoración es* $\mathbb{R}$ *y si la asignación básica de similitud está acotada superiormente en* $\mathbb{R}$*, por ejemplo por* 1*, resulta intuitivo asociar a un objeto tal cota superior como asignación básica de medida de la similitud consigo mismo (expresión de una máxima similitud), esto es:*

$$s(u, u) = 1 \tag{5.5}$$

De manera similar, si nuestro espacio de valoración es $\mathbb{R}$ *y si suponemos que las asignaciones básicas de disimilitud están acotadas inferiormente en* $\mathbb{R}$*, por ejemplo por* 0*, resulta natural asociar a un objeto tal cota inferior como asignación básica de medida de la disimilitud consigo mismo (expresión de una máxima disimilitud), esto es:*

$$d(u, u) = 0 \tag{5.6}$$

quedando así establecido como axioma la ***irreflexividad*** *de una asignación básica de disimilitud.*

Si las asignaciones básicas de similitud (resp., disimilitud) se suponen no acotadas superiormente (resp., inferiormente) en $\mathbb{R}$*, la expresión de la reflexividad (resp., irreflexividad) será* $s(u, u) = +\infty$ *(resp.,* $d(u, u) = -\infty$*).*

Insistimos, la única propiedad cierta *que exigimos a una asignación básica de similitud (resp., disimilitud) es su reflexividad (resp., irreflexividad).*

5.3 Simetría: similitud y disimilitud

La incorporación de la propiedad de **simetría** a una asignación de comparación, no es algo tan evidente como pueda parecer en un primer momento. Un ejemplo de GORDON [10] (p.14) puede ilustrarnos. Tal ejemplo surge en el análisis de confusión que se realiza sobre datos procedentes de una transmisión de símbolos mediante código MORSE (Samuel Finley Breese): cada símbolo se transmite muchas veces y los datos presentados en términos de las frecuencias f_{ij} de que fuese enviado el símbolo i, pero que un receptor (inexperto) recibiese en su lugar el símbolo j. Claramente, puede que f_{ij} no sea igual a f_{ji}.

En otras palabras, puede suceder que la similitud entre i y j, vista desde i (el patrón enviado) hacia j (el estereotipo identificado), sea distinta de la similitud entre i y j, vista desde j (el patrón enviado) hacia i (el estereotipo identificado).

Sin embargo, podemos, de inmediato, definir una asignación básica y simétrica de similitud (una *similitud, en el sentido de la Def. 48*). Una medida de la similitud percibida, para la pareja de símbolos (i, j) podría basarse en:

$$s_{ij} = \frac{1}{2}\,(f_{ij} + f_{ji}) \tag{5.7}$$

—y esta matriz simétrica de similitudes, podría analizarse mediante métodos de clasificación (*cfr.* SHEPARD [602]).

Casos particulares de asignaciones de comparación asimétricas y su aplicación a tareas de clasificación y análisis de agrupamientos (*clusters*) pueden consultarse en los trabajos de GOWER [603, 604], CONSTANTINE y GOWER [605], SCHÖNEMANN [606] y CHAUHAN, HARPER y KRZANOWSKI [607].

Por esta posible existencia de asimetría, no consideramos fundamental la simetría en las asignaciones básicas de similitud ni en las de disimilitud. Proponemos, pues, dos nuevas definiciones.

Definición 48 *Decimos que una asignación básica de similitud* s *en* $\mathcal{U}$*, es una* ***similitud***[3] *en* $\mathcal{U}$*, precisamente si es simétrica, o sea, si para todo* $u, v \in \mathcal{U}$*:*

$$s(u,v) = s(v,u) \tag{5.8}$$

Definición 49 *Decimos que una asignación básica de disimilitud* d *en* $\mathcal{U}$*, es una* ***pseudodistancia*** *o* ***disimilitud***[4] *si es simétrica, o sea, si para todo* $u, v \in \mathcal{U}$*:*

$$d(u,v) = d(v,u) \tag{5.9}$$

5.4 Mismo lugar, mismo objeto (si mismo tiempo): distancias de Birkhoff y de Fréchet, métricas y ultramétricas

«Cualquier color, siempre que sea negro.»
—Henry FORD (1863-1947) (Atribuido a él, hace referencia a las opciones de color del Ford T)

Definición 50 *Una* ***distancia***[5] ***(de* Birkhoff*)*** *—cfr. v. gr.* MARTIN *[612],* MILLMAN *y* PARKER *[615];* ***semimétrica****, p. ej. según* SCHWEIZER *y* SKLAR *[477];* ***semidistancia****, p. ej. según* CECH *[621]—, es una disimilitud, cuyo rango es* $[0, +\infty)$*:*

$$d : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow [0, +\infty) \tag{5.11}$$

tal que[6] *para todo* $u, v \in \mathcal{U}$*:*

$$d(u,v) = 0 \Longrightarrow u = v \tag{5.12}$$

(o sea, «mismo lugar, mismo objeto»[7]*).*

---

[3] Una relación binaria reflexiva y simétrica, a veces aparece en la literatura con el nombre de (relación de) **parecido**. Claro que también nos la podemos encontrar con el nombre de **semejanza** —*cfr. v. gr.* KAUFMANN, DUBOIS y COOLS [608] (p. 34, de la edición española).

[4] A veces se denomina **coeficiente de disimilaridad** *(dissimilarity coefficient)* —*cfr.* GORDON [10] (p. 13)—. No debe confundirse con la **medida de disimilaridad** que definiremos más adelante —*cfr.* Def. 197.

[5] Esta noción de distancia se debe a BIRKHOFF [609], y está basada en trabajos previos de BIRKHOFF y BEATLEY [610]. Su construcción de la geometría, conocida como la **aproximación métrica**, consiste en la utilización de axiomas motivados por el uso de regla y transportador. Las ideas de BIRKHOFF son seguidas por muchos autores —*cfr.* BIRKHOFF y BEATLEY [611]; MARTIN [612]; MOISE [613]; PRENOWITZ y JORDAN [614]; MILLMAN y PARKER [615].

El concepto de **geometría métrica** se desarrolla de la siguiente manera —*cfr.* MARTIN [612]; MILLMAN y PARKER [615]—. Una **geometría abstracta** $\mathcal{A} = \{S, L\}$ consta de un conjunto S, cuyos elementos se denominan *puntos*, junto a una colección L de subconjuntos no vacíos de S, denominados *líneas*, tales que: *a)* para toda pareja de puntos (distintos) $A, B \in S$ existe una línea $l \in L$ con $A \in l$ y $B \in l$, y *b)* toda línea tiene al menos dos puntos. Si además, *a)* cualesquiera dos puntos distintos de S pertenecen a una única línea, y *b)* existen tres puntos $A, B, C \in S$ que no pertenecen todos a una misma línea, la geometría abstracta $\mathcal{A} = \{S, L\}$ se denomina una **geometría de incidencia**.

Sea l una línea de una geometría de incidencia $\{S, L\}$ y d una distancia definida sobre S. Una función $f : l \rightarrow \mathbb{R}$ es una *regla* (o un sistema de coordenadas) para l si

$$\begin{array}{rl} i) & f \text{ es una biyección,} \\ ii) & \text{para todo pareja de puntos } P, Q \in l, \ |f(P) - f(Q)| = d(P,Q) \end{array} \tag{5.10}$$

Una **geometría métrica** $\mathcal{M} = \{S, L, d\}$ es cualquier geometría de incidencia $\{S, L\}$ que tenga asociada una función distancia d tal que toda línea $l \in L$ tenga una regla. Nótese que no toda distancia proporciona una geometría métrica —*cfr.* MILLMAN y PARKER [615].

La aproximación métrica a la geometría no es la única. Otra es conocida como la **aproximación sintética**, y fue usada por EUCLIDES en sus Elementos (∼ 300 a. de C.) —*cfr.* HEATH [616]—. El primer sistema axiomático riguroso para la geometría euclidea se debe a PASCH [617]. Desde ese momento, se han propuesto, y siguen construyéndose, infinidad de sistemas axiomáticos diferentes —*cfr.* MARTIN [612]—. Quizás el más famoso sea el debido a David HILBERT [618] —*cfr.* BORSUK y SZMIELEW [619]; GREENBERG [620]; MARTIN [612]—. En la aproximación sintética, los *axiomas de congruencia* reemplazan las definiciones de medida de distancias y ángulos propias de la aproximación métrica. Un conjunto de axiomas para la **geometría neutra** (ver siguiente nota a pie de página), esencialmente los propuestos por HILBERT [618] pueden consultarse en —*cfr.* BORSUK y SZMIELEW [619]; GREENBERG [620]; MILLMAN y PARKER [615].

[6] Tal definición de distancia no prohíbe la existencia de una geometría métrica en la que la distancia se mida, por ejemplo, en metros sobre algunas líneas y en centímetros sobre otras. Esto se debe a la **existencia local de la regla**: *una regla por línea.*

[7] Es decir, dos objetos distintos no pueden ocupar el mismo lugar. Claro que se refiere al mismo instante de tiempo, porque es perfectamente posible que en instantes de tiempo diferentes, objetos distintos ocupen la misma localidad espacial.

Cualquier modelo potencial de la teoría del tiempo debe incluir un conjunto de instantes T y un orden lineal entre instantes $<$, de tal forma que $t < t\prime$ signifique que t se halla temporalmente delante de $t\prime$. Parece lógico postular, de cara a la realidad, además,

Observación 51 *Sea $\mathcal{U}$ un conjunto referencial o universal no vacío. Sea $d : \mathcal{U}\times\mathcal{U} \to [0,+\infty)$ una asignación real de comparación en $\mathcal{U}$. Si para todo $u,v \in \mathcal{U}$,*

$$u = v \iff d(u,v) = 0 \tag{5.16}$$

*se dice que d es **definida positiva**. En ciertos ambientes, se denomina **distorsión** a toda asignación real de comparación que sea definida positiva —cfr.* Rabiner *y* Juang *[623] (p. 150, p. 195, et passim).*

Fue René Maurice Fréchet, en su disertación de doctorado [595], quien propuso por primera vez la *desigualdad triangular* (5.18) para junto a los axiomas anteriores (5.3, 5.9 y 5.12), fundamentar la teoría de espacios métricos —*cfr.* Def. 55— (si bien el nombre de espacio métrico se debe a Félix Hausdorff).

Definición 52 *Una función distancia d sobre $\mathcal{U}$, satisface la **desigualdad triangular**[8] si para cada terna de puntos $u,v,w \in \mathcal{U}$:*

$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w) \tag{5.18}$$

Observación 53 *La desigualdad triangular tiene su parecido con la noción de transitividad: si es mucha la similitud entre u y v, y también es mucha la similitud entre v y w, entonces parece que no debería ser mucha la disimilitud entre u y w (piénsese, por ejemplo, en aplicaciones de* comparación y reconocimiento de patrones*, donde, en principio, cualquier otro resultado no sería del todo deseable). Por otro lado, una función de similitud debería estar de acuerdo con nuestras nociones intuitivas de parecido entre los objetos particulares en consideración. Así, sería bueno que la función fuese insensible a pequeñas perturbaciones o incluso errores en los datos, esto es, sería buena su* robustez*.*

No obstante, exigir una transitividad «estricta» puede, aparentemente, conducir a paradojas: si es mucha la similitud entre u y v, y también es mucha la similitud entre v y w, entonces debe ser mucha la similitud entre u y w, pero, entonces, todos los objetos reales (e imaginarios) serían muy semejantes entre sí —paradoja del Sorites (cfr. Vásconez *[624];* Vásconez *y* Peña *[177])—. Según Marvin* Minsky *[625], esto ejemplifica uno de los problemas inherentes a la postura logicista[9] (deductiva) en Inteligencia Artificial, concretamente el*

que $<$ sea denso —*cfr.* Balzer [622] (*teoría del tiempo*, pp. 155ss.):

$$(\forall t,t' \in T)\ (t < t' \longrightarrow (\exists t'' \in T)\ (t < t'' < t')) \tag{5.13}$$

y continuo en T:

$$\begin{aligned}&(\forall X,Y \subseteq T)\ (X \cap Y = \emptyset \wedge (\forall t,t' \in T)\ (t \in X \wedge t' \in Y \longrightarrow t < t')\\ &\longrightarrow (\exists t'' \in T)\ (\forall t,t' \in T)\ (t \in X \wedge t' \in Y \longrightarrow t < t'' < t'))\end{aligned} \tag{5.14}$$

Como la estructura anterior es meramente topológica, no surgen valoraciones aritméticas de la proximidad, aunque si se considera $T \subset \mathbb{R}$, puede utilizarse cualquier distancia sobre $\mathbb{R}$, para inducir una distancia sobre T. Para aunar los puntos espaciales y los temporales se hace necesaria una función de distancia ternaria $d : T \times S \times S \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, que para cada instante t valore la distancia entre dos puntos espaciales a y b, de tal forma que

$$\begin{aligned}&d(t,a,a) = 0\\ &d(t,a,b) = d(t,b,a)\\ &d(t,a,b) = 0 \to a = b\end{aligned} \tag{5.15}$$

es decir, que para cada instante t, la función $d_t : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $d_t(a,b) = d(t,a,b)$ sea una distancia.

[8] En el plano Euclideo, la distancia

$$d_2(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2} \tag{5.17}$$

satisface la desigualdad triangular, lo que se interpreta diciendo que para todo triángulo del plano Euclideo, la longitud de un lado del triángulo es estrictamente menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. Esta «visión plana» de la desigualdad triangular puede extrapolarse a cualquier geometría neutra, bajo una aproximación métrica a la geometría.

Aunque la **desigualdad triangular** está bien establecida por definición 5.18, puede también ser vista como una consecuencia de ciertos axiomas que querremos que satisfagan desde el punto de vista de la aproximación métrica. Se denomina **geometría de Pasch** a cualquier geometría métrica en la que toda línea que interseque un lado de un triángulo debe intersecar alguno de los otros dos lados. Una **geometría neutra** (o absoluta) es cualquier geometría métrica dotada de una medida de ángulos (geometría «*protactor*» –transportador), que verifica el axioma lado-ángulo-lado: si siempre que dos lados de un triángulo y el ángulo que forman son congruentes con otros dos lados de otro triángulo y el ángulo que forman estos últimos, entonces los dos triángulos son congruentes. En cualquier geometría neutra, la longitud de un lado de un triángulo es estrictamente menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. La igualdad se da precisamente si los vértices del triángulo son puntos colineales. Esta es la desigualdad triangular —*cfr.* Millman y Parker [615]—. Por último, observemos que la desigualdad triangular no se satisface en cualquier geometría métrica —*cfr.* Millman y Parker [615].

[9] Esta postura ha de entenderse como «la reducción del proceso de construcción de un sistema inteligente a la selección de un conjunto de sentencias en un lenguaje lógico, sobre el que opera un demostrador de teoremas como emulador de los mecanismos de razonamiento» —*cfr.* Carnota [626] (p. 152).

que surge al separar axiomas y deducción —o sea, al asumir la independencia entre el conocimiento y su forma de uso—, pues dificultará a posteriori la clasificación de las proposiciones y el control del proceso deductivo.

Ulises MOULINES *[627] propone, como alternativa, una inyección de probabilidad, que en nuestro caso podría quedar así:*

«si es mucha la similitud entre u y v,
y también es mucha la similitud entre v y w,
entonces es sólo probable que sea mucha la similitud entre u y w.»

De este modo, una relación binaria de similitud no sería exactamente una relación de equivalencia.

De todo esto, surge una definición alternativa y plausible de similitud (acotada en $[0,1]$*): Cualquier función total:*

$$s : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to [0,1] \tag{5.19}$$

tal que para todo $u, v \in \mathcal{U}$*:*

$$\begin{array}{rl} i) & u = v \Longrightarrow s(u,v) = 1 \\ ii) & s(u,v) \simeq 1 \Longrightarrow p\left(s\left(v,u\right) \simeq 1\right) \simeq 1 \\ iii) & s(u,v) \simeq 1 \wedge s(v,w) \simeq 1 \Longrightarrow p\left(s\left(u,w\right) \simeq 1\right) \simeq 1 \end{array} \tag{5.20}$$

donde p es una medida de probabilidad.

Definición 54 *Félix* HAUSDORFF *denomina **separación** —pseudométrica o semidistancia, p. ej. según* HINRICHSEN *y* FERNÁNDEZ MUÑIZ *[279]— a toda disimilitud que satisfaga la desigualdad triangular (5.18).*

Definición 55 *Se denomina **métrica**[10], a toda distancia* $d : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}_0^+$*, que verifique la desigualdad triangular (5.18).*

Observación 56 *Si la métrica se valora en* $\mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$*, en vez de en* $\mathbb{R}_0^+$*, se denomina **métrica de valoración real extendida**. Una* métrica *se dice **asimétrica** si satisface (5.3), (5.12) y (5.18).*

Definición 57 *Se denomina distancia ultramétrica o simplemente **ultramétrica**, a toda distancia de* BIRKHOFF $d : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}_0^+$ *que en vez de la desigualdad triangular (5.18), satisfaga, para todo* $u, v, w \in \mathcal{U}$*, una condición más fuerte, la* desigualdad ultramétrica*:*

$$d(u,w) \leq \max\{d(u,v), d(v,w)\} \tag{5.22}$$

Observación 58 *Se prueba fácilmente que la desigualdad ultramétrica implica la desigualdad triangular, de modo que: **toda ultramétrica es una métrica**. Un resultado importante sobre ultramétricas afirma que, toda ultramétrica definida en un conjunto finito, determina una* jerarquía indexada *en tal conjunto finito. Y, recíprocamente, toda jerarquía indexada sobre un conjunto finito, define una ultramétrica en dicho conjunto finito —cfr.* CUADRAS *[631] (Teorema 4, p. 449).*

Definición 59 *Sea* $\mathcal{U} \neq \varnothing$*. Caso de ser d una métrica, pseudométrica, disimilitud, o una ultramétrica, se denominará al par* $(\mathcal{U}, d)$*, **espacio métrico**,* pseudométrico, de disimilitud*, o* ultramétrico*, respectivamente.*

Observación 60 *Son muchas las nociones que pueden considerarse extensoras del concepto de espacio métrico[11]. Đuro R.* KUREPA *definió la noción de espacio de pseudo-distancias (pseudo-distancial space), donde la función distancia toma valores en un conjunto totalmente ordenado. Actualmente se conocen como **espacios de*** **Kurepa-Fréchet***, porque Maurice René* FRÉCHET *concibió posteriormente este mismo concepto de espacio*

[10] Una definición equivalente —*cfr.* DEL CASTILLO [628] (p. 2); PFLAUMANN y UNGER [629] (p. 64)— se tiene incluyendo implícitamente la simetría en la desigualdad triangular. Sea $\mathcal{U} \neq \emptyset$, una función $d : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ es una **métrica** en $\mathcal{U}$ si

$$\begin{array}{rl} M1) & u = v \Longleftrightarrow d(u,v) = 0 \ , \\ M2) & d(u,v) \leq d(u,w) + d(v,w) \end{array} \tag{5.21}$$

para todo $u, v, w \in \mathcal{U}$. La *simetría* y la *no negatividad* de d se deducen fácilmente como consecuencia de esta nueva definición.

Finalmente, decir que algunos autores —*cfr. v. gr.* AYALA, DOMÍNGUEZ y QUINTERO [630]—, emplean la denominación «*distancia métrica*».

[11] A lo largo de los años, han sido propuestas diversas generalizaciones del concepto de espacio métrico. Una de ellas es el concepto de espacio métrico generalizado, propuesto por TRILLAS [632] —*cfr.* ALSINA [633]; TRILLAS y ALSINA [634]; SCHWEIZER y SKLAR [477] (Def. 15.5.2).

Un **T-semigrupo** es —*cfr.* TRILLAS [632] (*via* SCHWEIZER y SKLAR [477], Def. 15.5.1)— una cuaterna $(G, +, e, \leq)$ donde $(G, +)$

y han sido objeto de estudio por grandes matemáticos como MAMUZĬC*,* PAPĬC*,* APPERT*,* COLMEZ *o* BOLTJANSKI*.*
La importancia que tienen estos espacios para nosotros es que la noción de conjunto borroso está implícita en ellos. Y no sólo eso, en el libro de Đuro R. KUREPA*, The Theory of Sets (1951), aparece la expresión «**conjuntos con estructura borrosa**», según nos refiere Z.* MIJAJLOVĬC *[637].*

Definición 61 *Se dice que una distancia de* BIRKHOFF *—cfr. Def. 50— es una* ***distancia (écart) de Fréchet*** *[638] si existe una función $\varrho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, tal que para todo $u, v \in \mathcal{U}$ y para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$:*

$$d(u,v) \leq \varepsilon \wedge d(v,w) \leq \varepsilon \Longrightarrow d(u,w) \leq \varrho(\varepsilon) \tag{5.31}$$

Si además $\lim_{x \to 0} \varrho(x) = 0$, se dirá que d es regular*.*

---

es un semigrupo conmutativo con elemento neutro e, y $\leq$ es una relación de orden parcial en G tal que

$$i) \quad e \leq a$$

y $+$ es isótona respecto de $\leq$, o sea,

$$ii) \quad a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c$$

para todo $a, b, c \in G$.
Un **espacio métrico generalizado** es una terna $(\mathcal{U}, \mathcal{G}, d)$, donde $\mathcal{U}$ es un conjunto no vacío, $\mathcal{G} = (G, +, e, \leq)$ es un T-semigrupo y d es una aplicación $d : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to G$, tal que para todo $u, v, w \in \mathcal{U}$, es simétrica, verifica la desigualdad triangular y la condición de identidad: si e es la unidad de G, entonces, $d(u,v) = e \Longleftrightarrow u = v$.
Ejemplos de espacios métricos generalizados:

1. Si $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^+, +, 0, \leq)$ entonces $(\mathcal{U}, \mathcal{G}, d)$ es un *espacio métrico ordinario* de FRÉCHET.
2. Si Δ^+ es el conjunto de funciones de distribución nulas en el origen y a su izquierda, ε_0 es la función de (Oliver) HEAVISIDE, τ es una función triangular —una operación binaria en Δ^+ conmutativa, asociativa no decreciente en cada componente y con elemento neutro ε_0—, y $\mathcal{G} = (\Delta^+, \tau, \varepsilon_0, \geq)$ entonces $(\mathcal{U}, \mathcal{G}, d)$ es un **espacio métrico probabilístico** en el sentido de SCHWEIZER y SKLAR [477] [477] (Def. 8.1.1).
3. Las *álgebras booleanas autometrizadas* y los *espacios métricos booleanos* —*cfr.* BLUMENTHAL [635] (cap. 15)— también pertenecen a la clase de espacios métricos generalizados, porque la diferencia simétrica confiere estructura de grupo a cualquier álgebra booleana.

Otra generalización del concepto de espacio métrico puede encontrarse en los trabajos sobre **«distancias abstractas»** de MAMUZĬC [598] —*cfr.* PFLAUMANN y UNGER [629] (pp. 86ss.)—. Sólo veremos aquí un ejemplo, presentado por APPERT, Maurice René FRÉCHET, Đuro R. KUREPA y Ky FAN —*cfr.* PFLAUMANN y UNGER [629] (pp. 86ss.)—. Supongamos que queremos definir una distancia:

$$d : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to H \tag{5.23}$$

siendo H un conjunto con un orden filtrante por la izquierda —$(\forall \{x, y\} \subseteq H)(\exists z \in H)(z \preceq x \wedge z \preceq y)$—, con un elemento mínimo o y al menos otro elemento. La condición (M1) —*cfr.* Ec. 5.21— es la misma, pero la condición (M2) debe transformarse en:

$$\bigwedge_{h \in H \setminus \{o\}} \bigvee_{h' \in H} \left(d(u,v) \leq h' \wedge d(w,v) \leq h' \Rightarrow d(u,w) \leq h \right) \tag{5.24}$$

A partir de esta definición, es imposible deducir la simetría. En vez de ella, tendríamos:

$$\bigwedge_{h \in H \setminus \{o\}} \bigvee_{h' \in H} \left(d(x,y) \leq h' \Rightarrow d(y,x) \leq h \right) \tag{5.25}$$

KRAMOSIL y MICHALEK [636] introducen el concepto de **espacio métrico borroso** generalizando el concepto de espacio métrico probabilístico al caso borroso. La definición que se presenta a continuación , es la propuesta por KALEVA y SEIKKALA [419] (pp. 218-219). Ellos definen la distancia entre dos puntos como un número borroso no negativo. Obtienen, además, una desigualdad similar a la conocida desigualdad triangular para espacios métricos.
Al igual que el valor $d(x,y)(t)$ en un espacio métrico probabilístico, se interpreta como la probabilidad de que la distancia entre x e y sea t —*cfr.* SCHWEIZER *y* SKLAR [477] (p. 13 *et passim*)—, en un espacio métrico borroso se interpretará como la posibilidad de que la distancia entre x e y sea t —*cfr.* KALEVA y SEIKKALA [419] (pp. 219ss).
Sea X un conjunto no vacío, d una función total de $X \times X$ en $\mathfrak{N}^+$, y sean las funciones totales $L, R : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, simétricas, no decrecientes en ambos argumentos y tales que $L(0,0) = 0$ y $R(1,1) = 1$. Sea:

$$^{\alpha}(d(x,y)) = [\lambda_\alpha(x,y), \rho_\alpha(x,y)] \tag{5.26}$$

para $x, y \in X$ y $0 < \alpha \leq 1$. La función d es una **métrica borrosa**, si para todo $x, y, z \in X$:

$$d(x,y) = \overline{0} \leftrightarrow x = y \tag{5.27}$$
$$d(x,y) = d(y,x) \tag{5.28}$$
$$d(x,y)(s+t) \geq L(d(x,z)(s), d(z,y)(t)), \text{ si } s \leq \lambda_1(x,z),\ t \leq \lambda_1(z,y),\ s+t \leq \lambda_1(x,y) \tag{5.29}$$
$$d(x,y)(s+t) \leq R(d(x,z)(s), d(z,y)(t)), \text{ si } s \geq \lambda_1(x,z),\ t \geq \lambda_1(z,y),\ s+t \geq \lambda_1(x,y) \tag{5.30}$$

La cuaternidad (X, d, L, R) se denomina **espacio métrico borroso** —*cfr.* KALEVA y SEIKKALA [419] (pp. 218-219).
En la anterior definición, una elección para L puede ser una t-norma —*cfr. infra* §4.6—, a la vez que una elección para R puede ser una t-conorma —*cfr. infra* §4.6.

Observación 62 *Se demuestra fácilmente que toda métrica de* BIRKHOFF *es una distancia regular de* FRÉCHET*. En efecto, sea d una métrica de* BIRKHOFF*; entonces, por la desigualdad triangular, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, si $d(u,v), d(v,w) \leq \varepsilon$, de donde, $d(u,v) \leq 2\varepsilon$, por lo que d es una distancia de* FRÉCHET *con $\varrho(x) = 2x$, y como $\lim_{x\to 0} 2x = 0$, se tiene que d es regular.*

5.5 Ejemplos de métricas: familias de Minkowski

«De tal palo, tal astilla.»
—REFRÁN

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universal no vacío. Sea $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de variables numéricas, en función de las cuales se representan todos los objetos o individuos de $\mathcal{U}$. Denotamos mediante u_k, el valor de la variable x_k para el individuo $u \in \mathcal{U}$.

Veamos, a continuación, varias familias de métricas de MINKOWSKI.

5.5.1 La familia $\mathcal{M}^1$ de métricas de Minkowski

La familia de métricas de MINKOWSKI:

$$\mathcal{M}^1 = \{d_p : p \in [1, +\infty)\} \tag{5.32}$$

donde, para todo $u, v \in \mathcal{U}$, y $p \in [1, +\infty)$:

$$d_p(u,v) = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|^p \right)^{1/p} \tag{5.33}$$

Se satisface que si $p, q \in [1, +\infty)$, son tales que $2 < q < p < \infty$, entonces —*cfr.* HINRICHSEN y FERNÁNDEZ MUÑIZ [279] (p. 43):

$$d_\infty \leq d_p \leq d_q \leq d_2 \leq d_1 \leq n d_\infty \tag{5.34}$$

siendo $d_\infty = \lim_{p\to\infty} d_p$ la métrica de TCHEBYCHEFF:

$$d_\infty(u,v) = \sup\{|u_i - v_i| : i = 1, \ldots, n\} \tag{5.35}$$

En los casos $p = 1$ y $p = 2$ reconocemos las métricas del valor absoluto —también llamada Manhattan, *box-car*, taxista, *city-block*, o HAMMING— y la euclidea[12], respectivamente.

[12] Aunque es habitual referirse a d_2 como *la* distancia euclidea, la realidad es más extensa. Se dice que una función $d : \mathcal{U}\times\mathcal{U} \to \mathbb{R}_0^+$, es euclidea si existe un espacio de representación real euclideo, es decir, precisamente si existe $m \in \mathbb{Z}^+$, tal que todo par de elementos $u, v \in \mathcal{U}$, tenga asociado un par de puntos $P, Q \in \mathbb{R}^m$, de modo que:

$$d(u,v) = d_2(P,Q) \tag{5.36}$$

Toda ultramétrica es euclidea —GOWER lo conjetura [639], HOLMAN lo demuestra [640], y por ejemplo, CUADRAS y USÓN lo confirman y precisan [641] —y CUADRAS [631] (p. 451).

Una distancia que provenga de una norma, es euclidea, si la norma se define a partir de un producto escalar definido positivo —*cfr.* CUADRAS [631] (p. 376)— (si $x \cdot y$ representa el producto escalar, entonces la norma es $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$). De este modo, de la familia $\mathcal{M}^1$ de métricas de MINKOWSKI, sólo d_2 es euclidea:

$$d_2(u,v) = (u-v)^T(u-v)$$

siendo $u, v \in \mathcal{U}$. La distancia de TCHEBYCHEFF tampoco es euclidea.

Sin embargo, la distancia cuadrática y la de MAHALANOBIS, sí son euclideas (la matriz métrica es definida positiva). Por ejemplo, esta última se define de la siguiente forma. Si $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. de matriz de covarianzas C, no singular, y u y v individuos de coordenadas:

$$\begin{aligned} u &= (u_1, \ldots, u_n) \\ v &= (v_1, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

entonces la distancia estadística general (al cuadrado) de MAHALANOBIS [642] entre u y v es:

$$D^2(u,v) = (u-v)^T C^{-1} (u-v) \tag{5.37}$$

Proposición 63 *Si $0 < p < 1$, d_p es una distancia de* Birkhoff *(cfr. Ec. 50) no triangular (cfr. Ec. 52). En realidad, es un «écart de* Fréchet*» (cfr. Def. 61) de función $\varrho(x) = x2^{1/p}$.*

Demostración. *Puede verse en la tesis doctoral de Francisco* Montalvo *[643] (p. 20).* ■

Observación 64 *En particular, esta última proposición asegura que si $0 < p < 1$, entonces d_p es una disimilitud.*

5.5.2 La familia $\mathcal{M}^{1,w^*}$ de métricas ponderadas de Minkowski

Definición 65 *La **familia de métricas ponderadas de*** **Minkowski***:*

$$\mathcal{M}^{1,w^*} = \{d_p^{w^*} : 1 \leq p < \infty\} \tag{5.38}$$

donde, para todo $u, v \in \mathcal{U}$, y $1 \leq p < \infty$:

$$d_p^{w^*}(u,v) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^* |u_i - v_i|^p\right)^{1/p} \tag{5.39}$$

donde $w^* = (w_1^*, \ldots, w_n^*)$ es un vector de índices ponderales, que permite la consideración de que las diferentes dimensiones sean desigualmente relevantes. Nótese que usamos el superíndice «estrella» para indicar que el vector de índices ponderales no tiene por qué estar necesariamente normalizado.

Definición 66 *Una subfamilia de la anterior es $\mathcal{M}^{1,w}$, la **familia de métricas de*** **Minkowski** ***con ponderación normalizada**. La diferencia es que los índices ponderales están normalizados, perteneciendo a* $[0, 1]$.

Para $p = \infty$ se tiene la métrica de Tchebycheff:

$$\begin{aligned} d_\infty(u,v) &\triangleq \lim_{p\to\infty} d_p(u,v) \\ &= \lim_{p\to\infty} d_p^{w^*}(u,v) \\ &= \max\{|u_1 - v_1|, \ldots, |u_n - v_n|\} \end{aligned}$$

A veces se usa la conocida como «**distancia ponderada de Tchebycheff**»:

$$d_\infty^{w^*}(u,v) \triangleq \max\{w_1^*|u_1 - v_1|, \ldots, w_n^*|u_n - v_n|\} \tag{5.40}$$

Otras veces, se añade un sesgo a las distancias «puras»; por ejemplo, en el marco de la decisión multicriterio, y siendo u una alternativa, y w_i^* el índice ponderal asociado al criterio i, Wierzbicki [644, 645] propone una «parametrización»:

$$\delta_1(u,v) = d_\infty^{w^*}(u,v) + \alpha \sum w_i^* |u_i - v_i| \tag{5.41}$$

que como vemos, usa $d_1^{w^*}$.

Bernard Roy, en un trabajo [646] anterior al de Wierzbicki, considera:

$$\delta_2(u,v) = d_\infty^{w^*}(u,v) + \sum \alpha_i u_i \tag{5.42}$$

Nótese la asimetría subyacente a su propuesta (en su marco de trabajo, u es una alternativa en un problema multicriterio). No obstante, hay que señalar que él trabaja sólo con la Ec. 5.42 y nunca con $d_\infty^{w^*}(v,u)$, ni con ninguna relación entre ambas.

5.6 Armonizando las dimensiones: normalización

«No te preocupes, querida, todos estamos hechos iguales, aunque algunos más que otros.»
—Noël Coward <The Café de la Paix>

Como hemos hablado de vectores normalizados, dedicamos un pequeño espacio al concepto de normalización.

Notemos por $v^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ un vector genérico no normalizado. Normalizar significa usar una norma $\| \ \|$ de forma que el vector normalizado sea unitario, o sea, tal que $\|v^*\| = 1$. El vector normalizado v es:

$$(v_1, \dots, v_n) = \left(\frac{v_1^*}{\|v^*\|}, \dots, \frac{v_n^*}{\|v^*\|} \right) \tag{5.43}$$

Habitualmente se elige una norma $\| \ \|_p$:

$$\begin{aligned} \|v^*\| &= \|v^*\|_p \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i^*|^p \right)^{1/p} \end{aligned} \tag{5.44}$$

o bien la norma de TCHEBYCHEFF:

$$\begin{aligned} \|v^*\|_\infty &= \lim_{p\to\infty} \|v^*\|_p \\ &= \max\{|v_1^*|, \dots, |v_n^*|\} \end{aligned} \tag{5.45}$$

- La normalización por cualquiera de las normas $\| \ \|_p$ es tal que:
  - $\forall i \in \mathbb{Z}_n^+ : v_i \in (0, 1)$;
  - respeta la proporcionalidad, o sea, $\forall i \in \mathbb{Z}_n^+ : \frac{v_i}{v_j} = \frac{v_i^*}{v_j^*}$.
- En el caso de la normalización usando la norma máximo se tiene:
  - $\forall i \in \mathbb{Z}_n^+ : v_i \in (0, 1]$;
  - respeta la proporcionalidad.

Como ejemplos en Decisión Multicriterio, usando estas normalizaciones para las alternativas (como vectores de evaluaciones de los criterios), citaremos el método AHP (*Analytic Hierarchy Process*) de Thomas L. SAATY que usa la norma $\| \ \|_1$, el software IDEAS de VETSCHERA [647, 648] que usa la norma euclidea $\| \ \|_2$, y el software DECISION PAD de KEPNER y TREGOE [649] que usa la norma del máximo.

Es frecuente también usar el rango:

$$\text{rango}\{v_1^*, \dots, v_n^*\} = \max\{v_1^*, \dots, v_n^*\} - \min\{v_1^*, \dots, v_n^*\} \tag{5.46}$$

- En este caso hay dos posibilidades:
  - $(v_1, \dots, v_n) = \left(\frac{v_1^* - \min\{v_1^*, \dots, v_n^*\}}{\text{rango}\{v_1^*, \dots, v_n^*\}}, \dots, \frac{v_n^* - \min\{v_1^*, \dots, v_n^*\}}{\text{rango}\{v_1^*, \dots, v_n^*\}} \right)$
  - $(v_1', \dots, v_n') = \left(\frac{\max\{v_1^*, \dots, v_n^*\} - v_1^*}{\text{rango}\{v_1^*, \dots, v_n^*\}}, \dots, \frac{\max\{v_1^*, \dots, v_n^*\} - v_n^*}{\text{rango}\{v_1^*, \dots, v_n^*\}} \right)$
  - $\forall i \in \mathbb{Z}_n^+ : v_i, v_i' \in [0, 1]$;
  - asegura que: $\min\{v_1, \dots, v_n\} = \min\{v_1', \dots, v_n'\} = 0$ y $\max\{v_1, \dots, v_n\} = \max\{v_1', \dots, v_n'\} = 1$ (o sea, $\text{rango}\{v_1, \dots, v_n\} = \text{rango}\{v_1', \dots, v_n'\} = 1$);
  - no respeta la proporcionalidad.

En el caso de la normalización por el rango, en Decisión Multicriterio, el uso de $(v_1, \dots, v_n)$ o $(v_1', \dots, v_n')$, depende de que nuestra meta sea maximizar todos los criterios o minimizarlos, respectivamente —*cfr.* §10.1.4.

5.7 Resumen

Como una de nuestras metas es la definición de un marco de trabajo adecuado para comparar conjuntos borrosos, sean o no ordinarios, hemos comenzado por preocuparnos de la propia noción de comparación. En §5.2, hemos establecido la reflexividad y la irreflexividad, como esencia de la comparación, y hemos definido los

conceptos de asignación básica de similitud, de asignación básica de disimilitud y de medida de comparación entre objetos. Asimismo, hemos reflexionado sobre ciertas propiedades que cualquier asignación de medida de comparación entre objetos debería satisfacer. En §5.3, el introducir la simetría, nos ha permitido definir las nociones de similitud y disimilitud, a partir de las asignaciones básicas respectivas.

Diversas nociones, ya establecidas, medran la construcción de este marco inicial de trabajo —*cfr.* §5.4: distancia de BIRKHOFF, separación de HAUSDORFF, métrica de BIRKHOFF, ultramétrica, distancia (écart) de FRÉCHET y distancia (écart) regular de FRÉCHET. Como ejemplos notorios de métricas hemos visto la familia $\mathcal{M}^1$ de métricas de MINKOWSKI —*cfr.* §5.5.1— y la familia $\mathcal{M}^{1,w^*}$ de métricas ponderadas de MINKOWSKI —*cfr.* §5.5.2—, así como la distancia ponderada de TCHEBYCHEFF y dos ejemplos de parametrizaciones de ella, la de Bernard ROY y la de A. WIERZBICKI.

Finalizamos el capítulo con una breve reseña sobre normalización —*cfr.* §5.6—, ejemplificando ésta en las normas $\| \|_p$ (MINKOWSKI), TCHEBYCHEFF, máximo y normalización por rango.

Los capítulos 6, 7 y 10, y los cuatro ensayos: Caps. 11, 12, 13 y 14, completarán el marco de trabajo, aquí iniciado, para comparar conjuntos borrosos, sean ordinarios o no.

6

Asignaciones de comparación entre intervalos

En este capítulo ampliamos la idea clásica de medir como distancia entre dos intervalos, el promedio de las distancias entre sus extremos correspondientes, a medir dos colecciones de puntos pertenecientes a los intervalos, siempre con los puntos extremos entre sus elementos, o sea dos α-percentilados de los intervalos, respondiendo así a la existencia de situaciones de no discernibilidad, cuando para comparar intervalos, sólo se tienen en cuenta, como clásicamente, sus puntos extremos. Hemos estudiado los que denominamos intervalos y líneas de confusión para las métricas α-percentiladas de MINKOWSKI*. Hemos encontrado condiciones suficientes en el caso finito, para que estas disimilitudes α-percentiladas y ponderadas que hemos propuesto, sean pseudodistancias, distancias o métricas, en el espacio de intervalos considerado. En §6.19.1 hemos logrado identificar una subclase de φ-métricas basada en subaditividad, y otra subclase de φ-métricas basada en concavidad.*
Extendemos la idea de disimilitud entre intervalos, calculada a partir de disimilitudes locales entre puntos, a la idea de calcularla a partir de disimilitudes locales entre subintervalos de los intervalos originales, proponiendo un esquema iterativo de cálculo. Como un primer ejemplo ilustrativo, observamos que las quasi-normas de los espacios lineales complejos $\ell_q^N(\ell_p^M)$ $(M, N \in \mathbb{N};\ 0 < p, q \leq \infty)$ son un caso particular de las definidas por dicho esquema iterativo. Como segundo ejemplo ilustrativo, reflexionamos sobre varios temas relacionados con las dificultades de evaluar los aprendizajes.

6.1 Dos intuiciones —entre muchas— sobre medidas de disimilitud entre conjuntos

En particular, nos interesa comparar intervalos. Dos intervalos no son más que dos conjuntos. Cómo medir la disimilitud entre dos conjuntos es algo subjetivo. Puede parecer intuitivo que venga dada por la menor de todas las disimilitudes entre pares de elementos de ambos conjuntos.

Proposición 67 *Sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso no vacío y $d : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to [0, +\infty]$ una función total. Sean $S \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{U})$ y $D_{\inf} : S \times S \to [0, +\infty]$ definida, para todo $A, B \in S$, como:*

$$D_{\inf}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \wedge b \in B\} \tag{6.1}$$

Entonces:

i) si d es una asignación básica de disimilitud en $\mathcal{U}$ —cfr. Def. 45—, entonces $D_{\inf}$ lo es en S;

ii) si d es una disimilitud en $\mathcal{U}$ —cfr. Def. 49—, entonces $D_{\inf}$ lo es en S;

iii) si d es distancia en $\mathcal{U}$ —cfr. Def. 50—, entonces $D_{\inf}$ lo será o no, dependiendo de S;

iv) si d es triangular —cfr. Def. 52— o ultramétrica —cfr. Def. 57— en $\mathcal{U}$, entonces $D_{\inf}$ lo será o no, dependiendo de S.

Demostración. En efecto, (i) y (ii) son triviales, por definición. Respecto a (iii), un ejemplo negativo se tiene cuando existen $A, B \in S$, tales que, aun siendo $A \neq B$, se verifica que $adh(A) \cap adh(B) \neq \varnothing$,

pues entonces, $D_{\inf}(A,B) = 0$. Finalmente, (iv): sean por ejemplo, $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$, y $A = [0,1]$, $B = [3,4]$ y $C = [5,6]$; entonces, como $d(A,C) = 4$, $d(A,B) = 2$, y $d(B,C) = 1$, d no es triangular, ya que $d(A,C) > d(A,B) + d(B,C)$ (y por tanto, tampoco ultramétrica). ■

Observación 68 *Si en 6.1, en vez del ínfimo, utilizamos el supremo,* $D_{\sup}$ *ni siquiera es disimilitud básica (los únicos conjuntos cuya distancia* $D_{\sup}$ *a sí mismo es cero, son los unitarios).*

Claro que otra opción intuitiva es que D exprese la distancia entre los **centros de masas** *(centroides)*. Si d es disimilitud, triangular o ultramétrica en $\mathcal{U}$, entonces D_{CM} lo será, respectivamente, en S. No obstante, aunque d sea distancia en $\mathcal{U}$, D_{CM} no tiene por qué serlo en S —basta imaginar dos intervalos distintos y concéntricos, dos figuras semejantes y concéntricas.

La **diferencia simétrica** también ha sido utilizada por varios autores, como expresión de la disimilitud entre conjuntos —*cfr. infra* §10.2.1 y §11.4.1—. Por ejemplo, el cardinal de la diferencia simétrica es una distancia entre conjuntos finitos.

6.2 Disimilitud entre intervalos: representando su proximidad

Sea $(V, \preceq)$ un retículo normado. Sean $I, J \in \mathbb{I}V$, tales que $I = \langle i_0, i_1 \rangle$ y $J = \langle j_0, j_1 \rangle$. Si nuestra meta es evaluar la «proximidad» entre estos dos intervalos, entonces, además de las aproximaciones anteriores (ínfimo o centroide), parece intuitivo calcularla a partir de sus puntos extremos. Admitiremos[1] pues, que:

$$\begin{array}{c} I \text{ está } \textit{próximo} \text{ a } J \\ \Longleftrightarrow \\ (i_0 \text{ está } \textit{próximo} \text{ a } j_0) \ \wedge \ (i_1 \text{ está } \textit{próximo} \text{ a } j_1) \end{array} \tag{6.2}$$

Es decir, admitimos la identificación de cada intervalo con su representación «virtual»[2] como el conjunto binario de sus puntos extremos:

$$I = \langle i_0, i_1 \rangle \leftrightsquigarrow \{i_0, i_1\} \tag{6.3}$$

El problema surge al tener que encontrar una representación material (por lo general, una expresión algebraica) que plasme sintácticamente el concepto semántico pretendido de proximidad. Esto es, que la representación hallada sea adecuado interpretarla como proximidad.

Consideremos la correspondencia:

$$f : \mathsf{SINTAXIS} \rightarrow \mathsf{SEMÁNTICA} \tag{6.4}$$

Esta correspondencia no es función, pero tampoco es una correspondencia inyectiva. No es función, porque una expresión sintáctica —una información, en palabras de Ferdinand de SAUSSURE[3]— puede admitir múltiples **interpretaciones** (*polisemia*). El conjunto de estas interpretaciones o *significante* se denomina **semántica** *de la información interpretada —cfr.* SIMON [651]. Y no es inyectiva, porque varias expresiones sintácticas (**representaciones**) pueden ser interpretadas como un mismo concepto semántico (*sinonimia*).

[1] Sean $I, J \in \mathbb{IR}$, tales que $I = \langle i_0, i_1 \rangle$ y $J = \langle j_0, j_1 \rangle$. En un principio podría pensarse en medir la disimilitud entre I y J «hacia la derecha», midiendo la distancia entre i_0 y j_0. Esta disimilitud sería insensible a cambios en las secciones finales de los intervalos, y sería el procedimiento correcto si el entorno de trabajo (el espacio de intervalos) fuese:

$$\mathcal{W} = \{[x,1] : x \in (0,1)\}$$

o sea, si en general, $\mathcal{W}$ está «lateralizado», por ejemplo, si fuese:

$$\mathcal{W} = \{[x,a) : x \in (0,a)\}$$

En este último caso, con $a \in \mathbb{R}$ fijo, estaría midiéndose una cierta «adecuación hacia a». La situación es similar si se trata de comparar «hacia la izquierda», entre i_1 y j_1. Pero si $\mathcal{W}$ es por ejemplo $\mathbb{IR}$, lateralizar se convierte en una desventaja, debiéndose pensar en medir la disimilitud haciendo intervenir ambos extremos.

[2] En un sentido parecido al original de Ferdinand de SAUSSURE, de carencia de **contextura material** (en su caso calificaba el signo lingüístico). La contextura material de intervalo la posee $I = [i_0, i_1]$, pero no el conjunto $\{i_0, i_1\}$.

[3] Según Ferdinand de SAUSSURE [650], una **información** es «un conjunto de signos recibidos e interpretados por el hombre dentro del sistema complejo de una lengua».

Aunque no hay en Ciencias Cognitivas ninguna definición estándar de **concepto** —*cfr.* §13.1—, cabe admitir un repertorio de posibles «modelos» —*cfr.* FODOR [652]; LAKOFF y JOHNSON [653]; PUTNAM [654]; DENNETT [655]; DÍEZ y MOULINES [656]—. Por ejemplo, cada concepto semántico puede verse como un subconjunto borroso del universo de discurso de todas las expresiones sintácticas, donde el valor de la función de pertenencia en cada expresión sintáctica indica su grado de representatividad con respecto al concepto semántico dado. El problema sería encontrar la o las expresiones sintácticas que tengan asignadas un mayor valor de la función de pertenencia. Aunque de todos son conocidos resultados parciales en contextos muy locales (juegos de lenguaje circunscritos a mundos cerrados), compartimos la opinión de SEARLE referente a la posibilidad de que uno de los problemas sea que la semántica no sea expresable sintácticamente —*cfr.* SEARLE [77].

> *«El argumento de la habitación jeroglífica.-*
> *Axioma 1: Los programas son objetos puramente sintácticos.*
> *Axioma 2: Las mentes humanas poseen contenidos semánticos.*
> *Axioma 3: La semántica no es generable a partir de niguna cantidad de sintaxis.*
> *Conclusión: Los programas no son ni necesarios ni suficientes para las mentes.»*
> —John L. CASTI [657] (p. 83) —que en realidad es el argumento de la habitación china de SEARLE, puesto por CASTI en boca de Ludwig WITTGENSTEIN.

Ya lo decía Ludwig WITTGENSTEIN en el *Tractatus*:

> *«De hecho existen cosas que no pueden ser expresadas con palabras. Ellas se hacen a sí mismas cuando se manifiestan. [...] De lo que no podemos hablar, debemos pasar en silencio.»*
> —Ludwig WITTGENSTEIN

El conocimiento del mundo, el conocimiento de lo que significan las cosas y su relación con su comportamiento o papel en el mundo, esta semántica exterior, podríamos decir, nos ayuda a elegir la interpretación correcta. John R. SEARLE, en *La construcción de la realidad social* [658] (pp. 142-143), cita y discute un ejemplo de Robyn CARSTON [659]: ¿Cómo interpretar la frase: «Ella le dio a él la llave y él abrió la puerta»?

Algo añadido es que aunque existiera dicha ligazón, entre sintaxis y semántica, tampoco estaríamos seguros de que fuese computable —*cfr.* el ya citado SEARLE [77]; PENROSE [660, 661, 662], otro de los febriles detractores de las «máquinas pensadoras» y su nueva Física Cuántica, determinista pero no computable, cuya actividad (su explicación a nuestras conciencias) tiene lugar en los microtúbulos de las neuronas; CRICK [663]; DENNETT [655].

En el caso que nos ocupa, la relación semántica de proximidad entre intervalos de números reales, nos preocupa:

$$\exists s \in \mathsf{SINTAXIS} \text{ tal que } f(s) = \text{«es próximo a»} \in \mathsf{SEMÁNTICA} \tag{6.5}$$

Representamos sintácticamente dicha relación semántica de proximidad, como un par:

$$(\delta_0(i_0, j_0), \delta_1(i_1, j_1)) \tag{6.6}$$

donde $\delta_0, \delta_1 : V \times V \to \mathbb{R}^+$ son funciones de disimilitud puntuales entre elementos del retículo normado $(V, \preceq)$, que miden la disimilitud localmente en los extremos de los intervalos, y obtenemos, como resultado, una función de disimilitud valorada en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, concretamente:

$$\begin{gathered} \delta_{01} : \mathbb{I}V^2 \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \delta_{01}(I, J) = (\delta_0(i_0, j_0), \delta_1(i_1, j_1)) \end{gathered} \tag{6.7}$$

donde $V^2 = V \times V$.

El problema reside en la dificultad de comparar dos valoraciones de δ_{01} en el semiplano real positivo $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. En principio, y debido a la propia naturaleza de los intervalos, no existe motivo alguno para que δ_0 sea distinta de δ_1. Aunque su propia pretendida naturaleza de axioma hace que pueda ser discutible.

Supondremos pues $\delta_0 = \delta_1$, la denotamos δ, y valoraremos en $\mathbb{R}^+$ la función de disimilitud entre los intervalos, usando para ello algún operador o procedimiento conveniente de agregación —*cfr.* §6.3—. Resumiendo, proponemos:

$$\begin{gathered} d : \mathbb{I}V^2 \to \mathbb{R}^+ \\ d(I, J) = \mathsf{Agregación}(\delta(i_0, j_0), \delta(i_1, j_1)) \end{gathered} \tag{6.8}$$

6.3 Operaciones de agregación

Salvo en alguna situación puntual, trabajamos *cæteris paribus* —como dirían los empiristas—, es decir, evaluamos comparaciones característica a característica —y no simultáneamente— para después agregar.

El proceso de agregación de información es frecuente en el desarrollo de sistemas inteligentes. Se encuentra presente en *redes neuronales*, *controladores borrosos*, *sistemas de visión*, *sistemas expertos*, *sistemas de ayuda a la decisión multicriterio*, *sistemas de aprendizaje automático*, *reconocimiento de patrones*, *inteligencia artificial*, etc.

A la hora de agregar, puede hablarse de tres clases principales de conectivas: de unión, de intersección y de compensación. Pensemos en el par ordenado de disimilitudes locales:

$$(\delta(i_0, j_0), \delta(i_1, j_1)) \tag{6.9}$$

La diferencia en la acción de las conectivas, atendiendo a su tipo, es la siguiente. Para que una **conectiva de unión** genere un valor alto, basta que el valor de alguna de las disimilitudes locales sea alto. Sin embargo, para que esto suceda con una **conectiva de intersección**, ambos valores correspondientes a las disimilitudes locales deben ser altos. Las **conectivas de compensación** gozan de la propiedad de poder compensar el hecho de que una de las disimilitudes locales tenga un valor alto, mientras que la otra lo tenga bajo.

Si en vez de pares ordenados de disimilitudes locales, pensamos en n-tuplas ordenada de valores de información local:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{6.10}$$

entonces, diremos de manera general que, para que las conectivas de unión generen un valor alto, basta que alguno de los valores de información local sea alto. Sin embargo, para que esto suceda en las conectivas de intersección, todos los valores de información local deben ser altos. Las conectivas de compensación gozan de la propiedad de poder compensar valores altos de información local con valores bajos de información correspondientes a otras localidades. (son grados de satisfacción por ejemplos en problemas de elección de personal y puestos dentro del mundo de la administración con personas —*cfr. infra* §8—, mas en el entorno de disimilitudes donde nos movemos en este momento, son disimilitudes locales, en general podríamos llamarlos informaciones locales).

En supuestos que estudiaremos más adelante —por ejemplo, en problemas de elección de personal—, interpretaremos estos valores de disimilitud o de información locales, como *grados de satisfacción*.

A modo de ejemplo, consideremos el **mínimo ponderado** y el **máximo ponderado**, introducidos por Didier Dubois y Henri Prade [664]:

$$w\min(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n}((1-\omega_i) \vee x_i) \tag{6.11}$$

y

$$w\max(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{i=1}^{n}(\omega_i \wedge x_i) \tag{6.12}$$

con los pesos normalizados de forma que:

$$\bigvee_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \tag{6.13}$$

Según George J. Klir y Bo Yuan [46] —*cfr. item* Dubois y Prade [665] y Yager [666]—, son tres los requisitos axiomáticos esenciales para que una función:

$$\mathrm{Aggr} : [0,1]^n \to [0,1] \tag{6.14}$$

sea una operación de agregación sobre n conjuntos borrosos ($n \geq 2$).

Definición 69 *Sea $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Se dice que una función* $\mathrm{Aggr} : [0,1]^n \to [0,1]$ *es una* ***operación de agregación*** *sobre n conjuntos borrosos, precisamente si verifica al menos los siguientes tres requisitos axiomáticos (si satisface exactamente estos tres, diremos que es una* ***operación de agregación esencial****):*

i) $\mathrm{Aggr}(0,0,\ldots,0) = 0$ *y* $\mathrm{Aggr}(1,1,\ldots,1) = 1$ *(condiciones de contorno),*

ii) $(\forall i \in \mathbb{N}_n^+, x_i \leq y_i) \Longrightarrow \mathrm{Aggr}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \mathrm{Aggr}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *(*Aggr *es monótonamente creciente en todos sus argumentos, o sea, es monótona con respecto al orden producto),*

iii) Aggr *es continua en* $[0,1]^n$*.*

Además, generalmente se desea que un operador de agregación entre conjuntos borrosos satisfaga también:

iv) $\mathrm{Aggr}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{Aggr}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ para cualquier permutación $\sigma : \mathbb{N}_n^+ \to \mathbb{N}_n^+$ (Aggr es simétrica en todos sus argumentos, a veces se dice que Aggr es *conmutativa*),

v) $\mathrm{Aggr}(x, x, \ldots, x) = x$ (Aggr es *idempotente*).

El axioma *iv)* refleja la suposición de que los agregados son igualmente importantes. Obsérvese que *v)* implica *i)*. Diversos autores, bajo diferentes conjuntos de axiomas, demuestran que las únicas normas y conormas triangulares idempotentes son $\wedge$ y $\vee$. Si h satisface *ii)* y *v)*, entonces:

$$\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \mathrm{Aggr}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{6.15}$$

Obsérvese que (6.15) implica el pretendido axioma *v)*. De hecho —*cfr. v. gr.* Klir y Yuan [46]—, los únicos operadores de agregación idempotentes son los que satisfacen (6.15). Se denominan **operaciones de media** (*averaging operations*). Por ejemplo, las φ-medias ponderadas $\mathfrak{M}_{\varphi,\omega}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ —*cfr. infra* §95—, son operaciones de media.

Otro ejemplo de operación de media son los operadores OWA (*Ordered Weighted Averaging*), introducidos por Yager [667].

Definición 70 *Dada una* n*-tupla ordenada* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, y otra* n*-tupla ordenada de índices ponderales normalizados* $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ *tal que* $\sum_{i=1}^n w_i = 1$*, un* ***operador OWA*** *es cualquier aplicación* $A : [0,1]^n \to [0,1]$*, tal que:*

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_i x_{\sigma(i)} \tag{6.16}$$

donde la permutación $\sigma : \mathbb{N}_n^+ \to \mathbb{N}_n^+$ *es tal que* $x_i < x_j \Longrightarrow x_{\sigma(j)} \leq x_{\sigma(i)}$ *(es decir,* $x_{\sigma(k)}$ *es el* k*-ésimo elemento mayor en* X*).*

Estos operadores satisfacen los axiomas anteriores para las operaciones de agregación. Los notaremos h_w. Si $w_* = (0,0,\ldots,0,1)$ y $w^* = (1,0,\ldots,0)$, entonces:

$$h_{w_*}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{6.17}$$
$$h_{w^*}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{6.18}$$

Si $w_{\mathrm{m}} = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$, entonces:

$$h_{\mathrm{m}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{media}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{6.19}$$

Se satisface que:

$$h_{w_*} \leq h_w \leq h_{w^*} \tag{6.20}$$

El operador dual $h_{\hat{w}}$ de uno dado h_w, se define por $\hat{w}_i = w_{n-i+1}$. Con el fin de clasificar los operadores OWA en relación a su localización entre h_{w_*} y h_{w^*}, Yager [667] introduce una medida de disyunción, *orness* : $[0,1]^n \to [0,1]$,

$$orness(w) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i) w_i \tag{6.21}$$

que satisface:

$$orness(w_*) = 0 \tag{6.22}$$
$$orness(w_{\mathrm{m}}) = 1/2 \tag{6.23}$$
$$orness(w^*) = 1 \tag{6.24}$$

El complemento a 1 de la anterior es una medida de conjunción, $andness : [0,1]^n \to [0,1]$, definida por:

$$andness(w) = 1 - orness(w) \tag{6.25}$$

De este modo, podemos clasificar en operadores h_w **tipo disyunción**, si $orness(w) \geq 0.5$, y operadores h_w **tipo conjunción**, si $andness(w) \geq 0.5$. La **compensación** queda representada por el grado de disyunción asociado, $orness(w) = 1$, h_w genera una compensación total, y si $orness(w) = 0$, h_w, no hay compensación. Se satisface:

$$orness(\hat{w}) = andness(w) \tag{6.26}$$

6.4 Disimilitudes de oscilación acotada: subintervalos de $[0, 1]$

Aunque no necesariamente, podemos suponer que las funciones de disimilitud son **funciones de oscilación acotada**[4], y así obviar la posibilidad de una disimilitud de magnitud infinita. No obstante, en ciertos campos sí que se opera con disimilitudes o medidas de comparación no acotadas —*cfr.* Obs. 47.4 y 5—. Otro ejemplo se presenta al trabajar con *redes o grafos de neuronas artificiales*, lo más frecuente es suponer que los valores de los potenciales dendríticos de entrada o salida, son de (de mayor a menor habitualidad): $[0, 1]$, $[-1, 1]$, $(-\infty, +\infty)$, $[0, +\infty)$, aunque también $[-k, k]$, para $k > 1$, o bien $k < 1$, o también $[0, k]$, para $k > 1$, o bien $k < 1$, así como en intervalos genéricos $[k, k']$ —*cfr.* Kaufmann y Gil Aluja [668] (pp. 112-122, *et passim*)—[5]. La Tabla 6.1 muestra ejemplos de transformaciones biyectivas entre estas situaciones.

D_f	R_f	$f(x)$	$f^{-1}(y)$
$[0,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$\ln \frac{x}{1-x}$	$\frac{1}{1+e^{-y}}$
$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$\ln(1+x) - \ln(1-x)$	$\frac{e^y-1}{e^y+1}$
$[0,1]$	$[0,+\infty)$	$-\ln(1-x)$	$1-e^{-y}$
$[i_0,i_1]$	$[j_0,j_1]$	$\frac{j_0-j_1}{i_0-i_1}(x-i_0)+j_0$	$\frac{i_0-i_1}{j_0-j_1}(y-j_0)+i_0$

Tabla 6.1: *Diferentes transformaciones biyectivas $f : D_f \to R_f$ entre intervalos de números reales, frecuentemente usados como dominios de los potenciales dendríticos en redes o grafos de neuronas artificiales.*
—*Fuente:* Elaboración propia, a partir de: Kaufmann y Gil Aluja [668] (pp. 112-122, *et passim*); Anzola y Caruncho [669] (p. 156); Alonso, Borrego, Pérez y Ruiz [267]

Razonemos por qué la suposición de oscilación no acotada no supone coartación ninguna. Consideremos el retículo normado $(\mathbb{R}, \preceq)$ de los números reales. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que trabajamos con subintervalos de $[0, 1]$. Esto es fundamentalmente por lo siguiente. Dado un entorno de trabajo concreto $\mathcal{W}$, existe un número real k, tal que *todos* los posibles intervalos a comparar, son subintervalos de $[-k, k]$. De este modo, podemos normalizar por rango, $1/\sup_{\mathcal{W}}\{\delta(i_r, j_s)\}$, con $r, s \in \{0, 1\}$, o este k puede generalizarse considerándolo como un **número inaccesible**[6], un *infinito actual*[7] en el sentido de Cantor, o un número real

[4] Sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso no vacío. Sea (E, d) un espacio métrico. Sea f una función total de $\mathcal{U}$ en $(V, \preceq)$. Sea $A \subseteq \mathcal{U}$. Se denomina **oscilación** de f sobre A al diámetro de $f(A)$, o sea, al supremo de $\{f(x) : x \in A\}$.

[5] Por mencionar alguno, mostremos un caso en el que, por ejemplo, $[-1, 1]$ resulta de interés. Podemos pensar en un problema en el que deba evaluarse algún parámetro según una escala de influencias crecientes o decrecientes —*cfr.* Kaufmann y Gil Aluja [668] (pp. 120-121): influencia decreciente muy importante (-1); influencia decreciente importante $(-0,8)$; influencia decreciente bastante importante $(-0,6)$; influencia decreciente poco importante $(-0,4)$; influencia decreciente muy poco importante $(-0,2)$; influencia nula (0); influencia creciente muy poco importante $(0,2)$; influencia creciente poco importante $(0,4)$; influencia creciente bastante importante $(0,6)$; influencia creciente importante $(0,8)$; influencia creciente muy importante (1).

[6] La denominación de **número inaccesible** se debe a Emile Félix Edouard Justin Borel (1871-1956), y se refiere a números, que aun pudiendo definirse, no se conoce ni se conocerá nada sobre ellos, sea por nuestra incapacidad de imaginarlos, sea por las dificultades para calcularlos, sea por las dimensiones del universo. Obsérvese que, de hecho, dos números reales inaccesibles con el mismo signo son incomparables, pues es imposible saber qué número real representa cada uno de ellos.

Un caso particular de números inaccesibles son ciertos números reales no computables, por ejemplo, números reales definidos a partir de la cifra n-ésima del desarrollo decimal de π —*cfr.* Bouvier y George [670] (p. 429) y también nuestra Arenga: «¿Dónde se clavó el dardo?» (§1.12).

[7] Es interesante leer, en las propias palabras de George Cantor, su punto de vista sobre el **infinito actual** (reproducido del artículo de Drossos [503], que a su vez los reproduce del libro de Hallet [671]):

> *«Por un Infinito Actual debe entenderse un cuanto que, por un lado, no es variable, sino fijo y determinado en sus partes —una constante genuina— pero que al mismo tiempo sobrepasa en magnitud cualquier otra cantidad finita del mismo tipo.»*

demasiado grande para ser descrito en ningún sistema de coma flotante susceptible de ser implementado en una computadora —*cfr. American National Standards Institute* (ANSI) e *Institute of Electrical and Electronics Engineers* (IEEE) [672, 673]; Fike [674]; Knuth [675]; Miranker y Kulisch [676].

A la vista de lo anterior, y sin pérdida de generalidad, *podemos trabajar sólamente con subintervalos de* $[0, 1]$, pues podemos transformar biyectivamente cualquier intervalo $[-k, k]$ en $[0, 1]$ —*cfr.* Tabla 6.1 y la Observación 86, en la pág. 120.

Si somos remisos a considerar el entorno $\mathcal{W}$ en este razonamiento, podríamos utilizar cualquier biyección l de la recta real $\mathbb{R}$ en el intervalo abierto unidad $(0, 1)$, por ejemplo[8], si $n \geq 1$:

$$l(x) = \begin{cases} 1 - 2^{-(n+1)}(n + 1 - x) & \text{si } x \in [n - 1, n] \\ 2^{-(n+1)}(n + 1 + x) & \text{si } x \in [-n, -n + 1] \end{cases} \tag{6.27}$$

Para todo subconjunto A de $[0, 1]$, A es un boreliano de $[0, 1]$ precisamente si $l^{-1}(A)$ es un boreliano de $\mathbb{R}$. Como para $n \geq 1$ las derivadas de l en $[n - 1, n]$ y en $[-n, -n + 1]$ son la misma e iguales a $2^{-(n+1)}$, tenemos, para todo boreliano C de $[n-1, n]$ o de $[-n, -n+1]$, que $\mu(l(A)) = 2^{-(n+1)}\mu(A)$. Entonces, para todo boreliano A de $\mathbb{R}$, se tiene:

$$\mu(l(A)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+1)} \left(\mu(A \cap [n - 1, n]) + \mu(A \cap [-n, -n + 1])\right) \tag{6.28}$$

(observemos que $\mu(A) = 0 \Longleftrightarrow \mu(l(A)) = 0$).

Como consecuencia, si $A \subseteq [0, 1]$, A es medible Lebesgue[9] precisamente si $l^{-1}(A)$ lo es; además, $\mu(A) = 0$ equivale a $\mu(l^{-1}(A)) = 0$ —*cfr.* Levy [398].

En vez de reducir los intervalos a $[0, 1]$, ***puede «reducirse» la distancia***. Para ello, puede aplicarse el siguiente teorema, recogido de Hinrichsen y Fernández Muñiz [279] (p. 42).

Teorema 71 *Sean $X \neq \varnothing$, $f_1, ..., f_n : X^2 \to [0, +\infty]$ seudométricas sobre X, $g : [0, +\infty]^n \to [0, +\infty]$ una función creciente (respecto del orden producto), subaditiva y tal que $g(0) = 0$. Notemos $f = (f_1, ..., f_n) : X^2 \to [0, +\infty]^n$. Entonces, $h := g \circ f$ es una seudométrica sobre X.*

Por ejemplo, si (X, d) es un espacio métrico, entonces las funciones:

$$d' := \frac{d}{1 + d} \tag{6.31}$$

$$d'' := \inf\{1, d\} \tag{6.32}$$

son métricas sobre X. Estas nuevas métricas se valoran en $[0, 1]$. Obviamente, deberá tenerse cuidado con los efectos secundarios de los cambios de escala —*cfr. v. gr.* Escudero [678].

[8] Otro ejemplo de biyección es —*cfr.* Alonso, Borrego, Pérez y Ruiz [267]; García Nogales [677] (p. 34):

$$f : x \in [-\infty, + - \infty] \longmapsto f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1 + |x|}\right) + \frac{1}{2} \in [0, 1]$$

[9] El teorema de extensión de Constantin Carathéodory asegura que una función de conjunto λ, no negativa, finitamente aditiva, numerablemente subaditiva, y tal que $\lambda(\varnothing) = 0$, definida sobre un semianillo, es extensible a una medida sobre la σ-álgebra de Borel engendrada por el semianillo. Este teorema permite extender la función $\lambda(a, b] = b - a$, definida sobre el semianillo de los intervalos semiabiertos acotados sobre $\mathbb{R}$, a una medida sobre la σ-álgebra de Borel engendrada por el semianillo; la **medida de Lebesgue** sobre $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ es la *complección*$^{(*)}$ de esta medida.

Lo esencial de la medida de Lebesgue es ser la única medida definida sobre $\mathbb{R}$, provisto de la σ-álgebra de Borel $B(\mathbb{R})$ —*cfr.* nota al pie n°16—, tal que la medida de un intervalo de números reales, de extremos $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$, es $b - a$. Los subconjuntos finitos e infinitos numerables de $\mathbb{R}$, son *partes despreciables* de $\mathbb{R}$ para la medida de Lebesgue, o sea, que su medida de Lebesgue es cero.

Por un procedimiento análogo de extensión y complección, se obtiene la **medida de Lebesgue-Stieljes** (Thomas-Jan), definida por una función numérica F continua por la derecha en todo número real. Es la única medida positiva μ sobre $B(\mathbb{R})$ tal que $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$. Si F es la identidad sobre $\mathbb{R}$, entonces μ es la medida de Lebesgue.

$^{(*)}$ Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, se dice que μ es completa respecto de $\mathcal{A}$, precisamente si $(\forall B \subseteq \Omega)\,((\exists A \in \mathcal{A})\,(\mu(A) = 0 \wedge B \subseteq A) \Longrightarrow B \in \mathcal{A})$. Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, puede construirse una complección $\overline{\mu}$ de μ, —*cfr.* Ibarrola, Pardo y Quesada [417] (p. 74):

$$\overline{\mu}(A \cup B) = \mu(A) \tag{6.29}$$

de manera que $\overline{\mu}$ es completa en la σ-álgebra $\overline{\mathcal{A}}$:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup B : A \in \mathcal{A} \wedge B \subseteq \Omega \text{ tal que } (\exists C \in \mathcal{A})\,(\mu(C) = 0 \wedge B \subseteq C)\} \tag{6.30}$$

En todo caso, en nuestra Tesis, la aplicación más significativa será para comparar entre sí las imágenes de cada referente, según distintos conjuntos borrosos de tipo 2, o sea, para comparar valores lingüísticos, palabras, representadas por subconjuntos borrosos de $[0, 1]$.

6.5 Un ejemplo de asignación básica de disimilitud entre intervalos

6.5.1 Una cuentión de notación: el álgebra de intervalos de Allen

Debido a su conveniencia y a su asentamiento en la literatura, recordamos la notación del álgebra de intervalos de Allen [679], ya que más de una vez la usaremos. Sea $\mathbf{B}$ el conjunto de las trece *relaciones básicas entre intervalos*, cada una de ellas descriptora exacta de cada una de las posibles posiciones relativas entre dos intervalos —*cfr.* Tabla 6.2—. Sea $B \in \mathbf{B}$ e I y J dos intervalos. Una *fórmula atómica* es cualquier fórmula de la forma IBJ. Se dice que una fórmula atómica *se satisface* precisamente si los intervalos intervinientes I y J satisfacen las correspondientes relaciones entre sus puntos extremos, en la forma especificada en la Tabla 6.2. Una *fórmula de intervalos* es cualquier fórmula atómica de la forma:

$$I\{B_1, ..., B_n\}J \tag{6.33}$$

con $B_1, ..., B_n \in \mathbf{B}$ e I y J dos intervalos. Se dice que una fórmula de intervalos *se satisface*, precisamente si existe algún $k \in \mathbb{N}_n^+$, tal que se satisface la fórmula atómica IB_kJ.

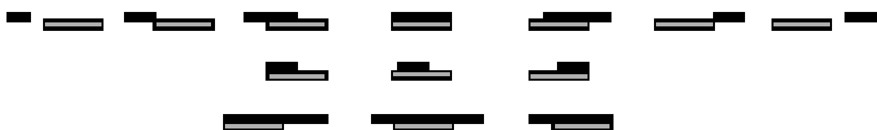
Relación básica	**Símbolo**	**Ejemplo**	**Relaciones**
I antes de J (*before*)	$\prec$	iii	$i_0 < j_0, i_0 < j_1,$
J después de I (*after*)	$\succ$	jjj	$i_1 < j_0, i_1 < j_1$
I encuentra a J (*meets*)	m	iii	$i_0 < j_0, i_0 < j_1,$
J es encontrado por I (*met-by*)	$\mathsf{m}^{\smile}$	jjj	$i_1 = j_0, i_1 < j_1$
I se superpone a J (*overlaps*)	o	iiii	$i_0 < j_0, i_0 < j_1,$
J "es superpuesto" por I (*overlapped-by*)	$\mathsf{o}^{\smile}$	jjjj	$i_1 > j_0, i_1 < j_1$
I durante J (*during*)	d	iii	$i_0 > j_0, i_0 < j_1,$
J incluye a I (*includes*)	$\mathsf{d}^{\smile}$	jjjjjj	$i_1 > j_0, i_1 < j_1$
I comienza J (*starts*)	s	iii	$i_0 = j_0, i_0 < j_1,$
J es comenzado por I (*started by*)	$\mathsf{s}^{\smile}$	jjjjjj	$i_1 > j_0, i_1 < j_1$
I termina J (*finishes*)	f	iii	$i_0 > j_0, i_0 < j_1,$
J es terminado por I (*finished-by*)	$\mathsf{f}^{\smile}$	jjjjjj	$i_1 > j_0, i_1 = j_1$
I es igual a J (*equals*)	$\equiv$	iiiii	$i_0 = j_0, i_0 < j_1,$
		jjjjj	$i_1 > j_0, i_1 = j_1$

Tabla 6.2: *Las trece relaciones básicas del álgebra de intervalos de* Allen *para intervalos propios, esto es, I y J tales que $i_0 < i_1 \wedge j_0 < j_1$.*
—*Fuente:* Nebel y Bürckert [680]

Observe el lector las escalas:

antes, encuentra, se superpone, igual a, superpuesto por, encontrado por, después de
comienza, durante, termina
comenzado por, incluye a, terminado por

Gráficamente:



El álgebra de intervalos de Allen es la cuaternidad $(2^{\mathbf{B}}, ^{\smile}, \cap, \circ)$, donde $2^{\mathbf{B}}$ es el conjunto de todas las relaciones binarias entre intervalos y las operaciones entre relaciones, $^{\smile}$, $\cap$ y $\circ$, se definen, para cualesquiera

intervalos I, J, como:

$$\begin{aligned} \textit{simétrica de } R\ (\smile) &: IR^{\smile}J \Leftrightarrow JRI && (6.34)\\ \textit{intersección } (\cap) &: I(R\cap S)J \Leftrightarrow IRJ \wedge ISJ && (6.35)\\ \textit{composición } (\circ) &: I(R\circ S)J \Leftrightarrow \exists K : IRK \wedge KSJ && (6.36) \end{aligned}$$

6.5.2 El ejemplo

Consideremos el retículo normado de los números reales con el orden habitual. Proponemos como asignación básica de disimilitud entre intervalos de números reales, la función $d^\circ : \mathbb{IR}\times\mathbb{IR} \to \mathbb{R}_0^+$, definida por:

$$d^\circ(J,I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I\ \{\mathsf{d},\ \mathsf{s},\ \mathsf{f},\ \equiv\}\ J \\ d(J,I) & \text{si } I\ \{\prec,\ \succ,\ \mathsf{m},\ \mathsf{m}^{\smile}\}\ J \\ \frac{\epsilon(I-J)}{\epsilon(I)} d(J, I-J) & \text{si } I\ (\mathsf{o},\ \mathsf{o}^{\smile},\ \mathsf{m},\ \mathsf{m}^{\smile}\}\ J \end{cases} \qquad (6.37)$$

siendo d cualquiera de las propuestas anteriores de disimilitud $d(I,J)$ entre intervalos de números reales, y $\epsilon(X)$ la anchura o extensión de un intervalo X (medido con la distancia inducida por la norma, esto es, la del valor absoluto).

Teorema 72 *La función $d^\circ : \mathbb{IR}\times\mathbb{IR} \to \mathbb{R}_0^+$, es una asignación básica de disimilitud, no simétrica y no triangular.*

Demostración. En efecto, tal cual está definida d°, $I \equiv J$, $d^\circ(I,J) = 0$, por lo que satisface (5.3). Que no es simétrica es trivial: si $I = [0,2]$ y $J = [0,1]$, entonces $d^\circ(I,J) = 0$ (permítasenos interpretar este hecho como que «J está en el rango solicitado por I»), mientras que $d^\circ(J,I) = d([0,1],[0,2])$ (I «no está en el rango» solicitado por J); luego d° no satisface (5.9). No satisface (5.12), pues si por ejemplo, I y J son tales que $(J \mathsf{s}\ I) \wedge (I \not\equiv J)$, entonces $d^\circ(I,J) = 0$. Tampoco satisface la desigualdad triangular (5.18), pues por ejemplo, $I = \langle 1,2\rangle$, $J = \langle 1,3\rangle$ y $K = \langle 3,4\rangle$, no satisfacen $d^\circ(I,K) \le d^\circ(I,J) + d^\circ(J,K)$. ■

6.6 La familia $\mathcal{M}^2$ de distancias $[0,1]$-normalizadas de Minkowski

A partir de la relación semántica (6.2), es usual emplear la familia $\mathcal{M}^2$ de distancias $[0,1]$-normalizadas de Minkowski: si $I, J \in \mathbb{IR}$, son tales que $I = \langle i_0, i_1\rangle$ y $J = \langle j_0, j_1\rangle$, entonces se define:

$$d^2_{(p)}(I,J) = \left(\frac{1}{2}\left(|i_0 - j_0|^p + |i_1 - j_1|^p\right)\right)^{1/p} \qquad (6.38)$$

si $0 < p < \infty$, y:

$$d^2_{(\infty)}(I,J) = \max\{|i_0 - j_0|, |i_1 - j_1|\} \qquad (6.39)$$

como extensión al caso $p = +\infty$.

Si $p \in (0,1)$, las funciones $d^2_{(p)}$ son distancias («*écart*») regulares de Fréchet en $\mathbb{IR}\times\mathbb{IR}$ —*cfr.* Teor. 90 (*pág.* 124)—, mientras que si $p \in [1,\infty]$, entonces las funciones $d^2_{(p)}$ son métricas en $\mathbb{IR}\times\mathbb{IR}$ —*cfr.* Teor. 91 (*pág.* 124)—. En estos teoremas la demostración es general para las familias de distancias de Minkowski modificadas que se proponen en el presente trabajo, que incluyen a $d^2_{(p)}$ y $d^{2*}_{(p)}$ (sin los coeficientes $1/2$) como casos particulares.

La $[0,1]$-normalización (el producto por $1/2$, en este caso) permite definir —*cfr.* (6.94):

$$d^2_{(\infty)}(I,J) = \lim_{p\to\infty} d^2_{(p)}(I,J) \qquad (6.40)$$

cosa que no es posible hacer si suprimimos el coeficiente $1/2$, pues no habría convergencia. El significado práctico de la $[0,1]$-normalización aparece si el espacio de intervalos es $\mathbb{I}[0,1]$, pues entonces, $d^2_{(p)}(I,J) \in [0,1]$, para todo $I, J \in \mathbb{I}[0,1]$ y para todo $p \in (0,\infty]$. Observemos que este es el caso de los α-cortes de cualquier etiqueta lingüística —*cfr. infra* §4.7— que se represente mediante un conjunto borroso.

6.7 Algunos intervalos no discriminables mediante $\mathcal{M}^2$

Dados dos intervalos $I, J \in \mathbb{IR}$, si $|i_0 - j_0| = |i_1 - j_1|$, o sea, si la biyección que muestra la última fila de la Tabla 6.1, es una traslación, entonces, para todo $p \in [0, \infty]$, $d^2_{(p)}(I, J)$ es constante, concretamente:

$$d^2_{(p)}(I, J) = |i_0 - j_0| \tag{6.41}$$

entonces, diríamos que I y J no son discriminables mediante $d^2_{(p)}$.

En principio, existen al menos tres situaciones, completamente diferentes, para las cuales la valoración de $d^2_{(p)}(I, J)$ podría ser la misma:

i) si f es una traslación;
ii) si f es una contracción;
iii) si f es una dilatación lateral.

siendo concéntricos I y J en el segundo caso.

Como las distancias $d^2_{(p)}$, sólamente consideran disimilitudes locales entre los puntos extremos de los intervalos, asignan el mismo valor de la función distancia a todos los pares de intervalos que tengan igualdad de diferencias en sus puntos extremos.

Pero que esto corresponda a la realidad dependerá del problema concreto. Por ejemplo, como apuntan Bertoluzza, Corral y Salas [681], imaginemos que los siguientes intervalos son α-cortes de números borrosos. Sea $I = \langle 0, 3\rangle$ un intervalo considerado como prototipo y sean $J_1 = \langle 1, 2\rangle$, $J_2 = \langle 1, 4\rangle$, $J_3 = \langle -1, 2\rangle$ y $J_4 = \langle -1, 4\rangle$ ejemplares de intervalos, cuya disimilitud respecto de I debe ser evaluada. En tal caso, cualquiera de los intervalos $J_1 = \langle 1, 2\rangle$ o $J_4 = \langle -1, 4\rangle$, concéntricos con $I = \langle 0, 3\rangle$, deberían ser más próximo a este último de lo que lo son $J_2 = \langle 1, 4\rangle$ o $J_3 = \langle -1, 2\rangle$, no concéntricos. Sin embargo, como se observa en la parte izquierda de la Tabla 6.3, las distancias consideradas valen 1, para todo $p \in (0, \infty]$.

En la parte derecha de la Tabla 6.3, se proporcionan los valores de las distancias $d^2_{(p)}(\langle 1, 2\rangle, J)$, observándose que ocurre, que para intervalos concéntricos con $I = \langle 1, 2\rangle$, como son $\langle 0, 3\rangle$ y $\langle -1, 4\rangle$, las distancias $d^2_{(p)}(\langle 1, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle)$ y $d^2_{(p)}(\langle 1, 2\rangle, \langle -1, 4\rangle)$, son constantes, independientemente del valor de p, no ocurriendo esto para intervalos no concéntricos con $I = \langle 1, 2\rangle$, como son $\langle 1, 4\rangle$ y $\langle -1, 2\rangle$.

Por otro lado, queda perfectamente identificado lo concéntrico frente a lo no concéntrico, salvo en el caso de $d^2_{(1)}$ —que no distingue el hecho de que $\langle 0, 3\rangle$ es concéntrico con $\langle 1, 2\rangle$, del hecho de que $\langle 1, 4\rangle$ no lo es—, y de $d^2_{(\infty)}$ —que no distingue el hecho de que $\langle -1, 4\rangle$ es concéntrico con $\langle 1, 2\rangle$, del hecho de que $\langle -1, 2\rangle$ no lo es— (situaciones recuadradas en la Tabla 6.3).

$d^2_{(p)}$, $(0 < p \leq \infty)$	$(\langle 0,3\rangle, J)$				$(\langle 1,2\rangle, J)$[10]			
	$\langle 1,2\rangle$	$\langle 1,4\rangle$	$\langle -1,2\rangle$	$\langle -1,4\rangle$	$\langle 0,3\rangle$	$\langle 1,4\rangle$	$\langle -1,2\rangle$	$\langle -1,4\rangle$
$d^2_{(0)}$	1	1	1	1	1	0	0	2
$d^2_{(.01)}$	1	1	1	1	1	10^{-30}	10^{-30}	2
$d^2_{(.2)}$	1	1	1	1	1	.0625	.0625	2
$d^2_{(.7)}$	1	1	1	1	1	.7430	.7430	2
$d^2_{(.9)}$	1	1	1	1	1	.9259	.9259	2
$d^2_{(1)}$	1	1	1	1	1	1	1	2
$d^2_{(2)}$	1	1	1	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
$d^2_{(20)}$	1	1	1	1	1	1.9319	1.9319	2
$d^2_{(500)}$	1	1	1	1	1	1.9972	1.9972	2
$d^2_{(\infty)}$	1	1	1	1	1	2	2	2

Tabla 6.3: *$d^2_{(p)}$ aplicada a los intervalos prototipo $I = \langle 0, 3\rangle$ e $I = \langle 1, 2\rangle$. Se entiende que $d^2_{(0)} = \lim_{p\to 0} d^2_{(p)}$.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

En general, se tiene que:

[10] Los valores mayores que 1 no deben resultarnos extraños. Precisamente la $[0, 1]$-normalización preserva la convergencia del α-percentilado —*cfr.* Def. 79—. Obsérvese, por ejemplo, que —*cfr.* Ec. 6.86: $\Delta_0^{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle} = j_0 - k_0 = 0$ y $\Delta_1^{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle} = j_1 - k_1 = -2$ y que —*cfr.* Ec. 6.93: $\lim_{N\to\infty} d^N_{(2)}(\langle 0, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 4 \left|\frac{i-1}{N-1}\right|^2 = \frac{4}{3} = 1.333$.

- Si I y J son concéntricos, entonces, para todo $p \in (0, \infty]$:

$$d^2_{(p)}(I, J) = |i_0 - j_0| = |i_1 - j_1|$$

- Si I y J son no concéntricos, entonces:
  - $*$ si $0 < p < 1$, entonces:
    - $+$ si $|i_0 - j_0| \neq |i_1 - j_1|$, entonces, $d^2_{(p)}(I, J)$ varía desde $d^2_{(0)}(I, J) = 0$, hasta $d^2_{(1)}(I, J)$;
    - $+$ si $|i_0 - j_0| = |i_1 - j_1|$, entonces $d^2_{(p)}(I, J) = d^2_{(1)}(I, J)$;
  - $*$ si $1 \leq p < \infty$, entonces $d^2_{(p)}(I, J)$ varía desde $d^2_{(1)}(I, J)$, hasta $d^2_{(\infty)}(I, J)$.

Teniendo en cuenta esto, podremos discriminar adecuadamente.

Observación 73 *No obstante, reflexionemos sobre lo siguiente. Sean I y J concéntricos, y sea K no concéntrico con I. Si ocurre, por ejemplo, que $|i_0 - j_0|$ es menor que $d^2_{(1)}(I, K)$, entonces existirá una distancia $d^2_{(q)}$ $(0 < q < 1)$, tal que J y K no serán discriminables respecto a ser concéntricos con I mediante $d^2_{(q)}$. Un ejemplo, si $I = \langle 1, 2\rangle$, $J = \langle -1, 4\rangle$, y $K = \langle -5, 2\rangle$, entonces, $q = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ es tal que para todo $0 < p \leq \infty$:*

$$d^2_{(q)}(\langle 1, 2\rangle, \langle -5, 2\rangle) = 2 = d^2_{(p)}(\langle 1, 2\rangle, \langle -1, 4\rangle) \tag{6.42}$$

Esto plantea un problema general: dada una colección de intervalos, o en definitiva de sus representaciones virtuales como conjuntos binarios de sus puntos extremos, encontrar (y eliminar) todas las distancias $d^2_{(q)}$ $(0 < q \leq \infty)$, para las que exista una terna de intervalos $\{I, J, K\}$, donde dos y únicamente dos de los cuales sean concéntricos, por ejemplo, I y J, y tales que uno de ellos, por ejemplo J, y el tercero no concéntrico K, no sean discriminables respecto a ser concéntricos con el otro, en este caso I, mediante $d^2_{(q)}$. Una vez eliminadas tales $d^2_{(q)}$, los intervalos de la colección son discriminables respecto a la propiedad «ser concéntricos» mediante cualquiera de las distancias restantes.

6.8 La métrica de Hausdorff

El significado de la conocida como *métrica de* HAUSDORFF es, según DE GUZMÁN, MARTÍN, MORÁN y REYES [682], el siguiente: «dos conjuntos están próximos [según esta métrica] cuando tienen parecida forma, tamaño y ubicación». Por ello, parece muy apropiada para medir distancias entre intervalos de números reales.

Definición 74 *Sean A y B dos conjuntos no vacíos y acotados de $\mathbb{R}^n$. La métrica de* HAUSDORFF $d_{\text{HAUS}}(A, B)$ *se define como:*

$$d_{\text{HAUS}}(A, B) = \max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\} \tag{6.43}$$

donde:

$$\delta(X, Y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} d_2(x, y) \tag{6.44}$$

La función δ es una separación no simétrica. Claramente:

$$\delta(X, Y) = 0 \Longleftrightarrow X \subseteq \overline{Y} \tag{6.45}$$

$$d_{\text{HAUS}}(X, Y) = 0 \Longleftrightarrow \overline{X} = \overline{Y} \tag{6.46}$$

donde $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ denotan los cierres de X e Y, respectivamente.

Si $Q(\mathbb{R}^n)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, entonces $(Q(\mathbb{R}^n), d_{\text{HAUS}})$ es un espacio métrico, completo y separable —*cfr.* PURI y RALESCU [683].

Una forma alternativa para definir la métrica de HAUSDORFF se basa en la noción de **cuerpo r-paralelo** —*cfr. v. gr.* DE GUZMÁN, MARTÍN, MORÁN y REYES [682]—. Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo ordenado completo y $r \in \mathbb{K}^+$. Dados un espacio métrico (E, d) y un subconjunto A de E, no vacío y acotado, se define el cuerpo r-paralelo de A como:

$$CP(A, r) = \begin{array}{ll} \{x \in E : d(x, A) < r\} & \text{si } A \text{ no es compacto} \\ \{x \in E : d(x, A) \leq r\} & \text{si } A \text{ es compacto} \end{array} \tag{6.47}$$

Observemos que el cuerpo r-paralelo de un conjunto no vacío y acotado A es la unión de todas las bolas abiertas de radio r y centros puntos de A:

$$CP(A, r) = \bigcup_{a \in A} B(a, r) \tag{6.48}$$

y si A es compacto en (E, d), entonces:

$$CP(A, r) = \bigcup_{a \in A} B[a, r] \tag{6.49}$$

Dados $A, B \subseteq E$, sean:

$$r_{(0)} = \inf\{r \in \mathbb{K}^+ : A \subseteq CP(B, r)\} \tag{6.50}$$

$$r_{(1)} = \inf\{r \in \mathbb{K}^+ : B \subseteq CP(A, r)\} \tag{6.51}$$

entonces:

$$d_{\text{HAUS}}(A, B) = \max\{r_{(0)}, r_{(1)}\} \tag{6.52}$$

Ejemplo 75 *Consideremos de nuevo el ejemplo anterior de los intervalos $\langle 0, 3\rangle$, $\langle 1, 2\rangle$, $\langle 1, 4\rangle$, $\langle -1, 2\rangle$ y $\langle -1, 4\rangle$. Considerando a $\langle 0, 3\rangle$ como prototipo, todos están a una distancia de* HAUSDORFF *igual a uno de él. Si el que se considera como prototipo es $\langle 1, 2\rangle$, entonces, el valor de la distancia para los intervalos $\langle 1, 4\rangle$ y $\langle -1, 2\rangle$, no concéntricos con $\langle 1, 2\rangle$, es el mismo que para el intervalo $\langle -1, 4\rangle$, concéntrico con $\langle 1, 2\rangle$.*

$d_{\text{HAUS}}(\langle 0, 3\rangle, J)$			
$\langle 1, 2\rangle$	$\langle 1, 4\rangle$	$\langle -1, 2\rangle$	$\langle -1, 4\rangle$
1	1	1	1

$d_{\text{HAUS}}(\langle 1, 2\rangle, J)$			
$\langle 0, 3\rangle$	$\langle 1, 4\rangle$	$\langle -1, 2\rangle$	$\langle -1, 4\rangle$
1	2	2	2

Por si aún no nos hemos percatado, lo que ocurre es lo que asevera el siguiente teorema.

Teorema 76 *Para cualesquiera dos intervalos $I, J \in \mathbb{IR}$, se tiene que:*

$$d_{\text{HAUS}}(I, J) = d^2_{(\infty)}(I, J) \tag{6.53}$$

Demostración. Es inmediata a partir de la definición mediante cuerpo paralelo de la distancia de HAUSDORFF —*cfr.* Ec. 6.52. ■

6.9 Acerca de otras asignaciones básicas de comparación

Tres medidas de disimilitud muy frecuentes en ambientes de clasificación y análisis de agrupamientos (*clustering*) son el índice de disimilitud de *Canberra*, el de BRAY-CURTIS y el de CZEKANOWSKI. Pueden consultarse las medidas aquí expuestas, así como otras, en las obras de ANDERBERG [684], SNEATH y SOKAL [242], CORMACK [601], CLIFFORD y STEPHENSON [685], DIDAY y SIMON [686], GOWER [604].

- la *distancia de Canberra* —*cfr.* LANCE y WILLIAMS [687]:

$$\sum \frac{|i_k - j_k|}{i_k + j_k} \tag{6.54}$$

  adecuada para variables que tomen valores no negativos (si $i_k = j_k = 0$ conviene en tomarse la fracción como cero);

- el *índice de disimilitud de* BRAY y CURTIS [688]:

$$\sum |i_k - j_k| \Big/ \sum (i_k + j_k) \tag{6.55}$$

- el *coeficiente de* CZEKANOWSKI [689]:

$$1 - \frac{2 \sum \min\{i_k, j_k\}}{\sum (i_k + j_k)} \tag{6.56}$$

  adecuado sólo para variables no negativas.

THEODORIDIS y KOUTROUMBAS [690] (p. 362) citan además como medidas de disimilitud, amplia y frecuentemente usadas las dos siguientes —*cfr.* SPAT [691]:

$$d_G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\log_{10}\left(1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i - y_i|}{b_i - a_i}\right) \quad (6.57)$$

$$d_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - y_i}{x_i + y_i}\right)^2} \quad (6.58)$$

donde $a_i = \min\{u_i : \mathbf{u} \in \mathcal{U}\}$ y $b_i = \max\{u_i : \mathbf{u} \in \mathcal{U}\}$.

Un índice de similitud muy utilizado es la separación angular:

- el *índice de similitud separación angular* —*cfr.* GOWER [692]:

$$\sum i_k j_k \Big/ \left(\sum i_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum j_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.59)$$

THEODORIDIS y KOUTROUMBAS [690] (p. 363) citan como medidas de similitud amplia y frecuentemente usadas:

- el producto escalar:

$$s_{\text{inner}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad (6.60)$$

- la medida o distancia de TANIMOTO:

$$s_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \mathbf{x}^T\mathbf{y}} = \frac{1}{1 + \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^T(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}} \quad (6.61)$$

- y una última propuesta por FU:

$$s_c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 - \frac{d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|} \quad (6.62)$$

  que toma su máximo valor (1) cuando $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, y su valor mínimo (0) si $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$.

Ejemplo 77 *Consideremos de nuevo el intervalo* $I = \langle 0, 3\rangle$ *como prototipo y sean* $J_1 = \langle 1, 2\rangle$, $J_2 = \langle -1, 2\rangle$, $J_3 = \langle 1, 4\rangle$ *y* $J_4 = \langle -1, 4\rangle$ *ejemplares de intervalos, cuya proximidad a* I *debe ser evaluada. Por tanto,* $\mathcal{U} = \{\langle 0, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle -1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle -1, 4\rangle\}$, $a_1 = \min\{0, 1, -1\} = -1$, $a_2 = \min\{3, 2, 4\} = 2$, $b_1 = \max\{0, 1, -1\} = 1$, $b_2 = \max\{3, 2, 4\} = 4$. *La tabla (6.4) muestra los resultados para los índices de disimilitud citados.*

A tenor de la Tabla 6.4, los únicos índices que parecen discriminar respecto de la propiedad de ser concéntrico, son el de BRAY y CURTIS y el de CZEKANOWSKI. No obstante, éstos son únicamente aplicables a datos, o todos no negativos o todos no positivos (esto se debe a la presencia de la suma $i_k + j_k$ en los denominadores de tales medidas). El índice de *Canberra* adolece del mismo inconveniente: uno de nuestros intereses es medir distancias entre intervalos cualesquiera de números reales, y es difícil admitir resultados tales como $d_{\text{Canberra}}(\langle 0, 3\rangle, \langle -1, 2\rangle) = -.8$ ó $d_{\text{Canberra}}(\langle 0, 3\rangle, \langle -1, 4\rangle) = -.857$.

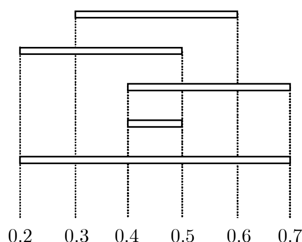
En cuanto al índice de similitud *separación angular* —*cfr.* Def. 6.59—, su valor es el coseno del ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{(0,0),(i_0,i_1)}$ y $\overrightarrow{(0,0),(j_0,j_1)}$ (tomando en consideración, como es el caso, sólo los puntos extremos de los intervalos). Es decir, este índice es aplicable sólo si los objetos, en nuestro caso los intervalos, admiten una representación e interpretación adecuada como vectores y además, lo único que nos interesa es la dirección del vector (el coseno, esto es, el valor del índice, únicamente indica lo similares que sean

$^{d}\|_{s}\,(\langle 0,3\rangle, J)$				
	$\langle 1,2\rangle$	$\langle 1,4\rangle$	$\langle -1,2\rangle$	$\langle -1,4\rangle$
d_{Canberra}	1.200	1.143	−.800	−.857
$d_{\text{Bray-Curtis}}$	.333	.250	.500	.333
$d_{\text{Czekanowski}}$	.333	.250	.500	.333
d_G	.301	.301	.301	.301
d_Q	.721	.714	.721	.714
s_{SepAng}	.894	.970	.894	.970
s_{inner}	6	12	6	12
s_T	.750	.857	.750	.857
s_c	.730	.801	.730	.801

Tabla 6.4: *Valoración de varios indicadores de proximidad (similitud y disimilitud) habituales, considerando únicamente los extremos de los intervalos a comparar.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

las direcciones de ambos vectores). No es nuestro caso, pues observemos, por ejemplo, que todos los intervalos $\langle 0, a\rangle$, con $a \in \mathbb{R}^+$, serían similares según este índice[11].

Ejemplo 78 *Como trabajaremos con conjuntos borrosos de tipo 2, vemos un ejemplo con subintervalos de* $[0, 1]$*. Sean los intervalos* $\langle .3, .6\rangle$*,* $\langle .4, .5\rangle$*,* $\langle .4, .7\rangle$*,* $\langle .2, .5\rangle$ *y* $\langle .2, .7\rangle$*. La Tabla 6.5 muestra la aplicación de las medidas de comparación vistas anteriormente. Observando dicha tabla, parecen ser también de alguna utilidad el índice de* BRAY *y* CURTIS *y el de* CZEKANOWSKI*. No obstante la no igualdad de las distancias entre los intervalos trasladados* $\langle .4, .7\rangle$ *y* $\langle .2, .5\rangle$ *y el intervalo prototipo* $\langle .3, .6\rangle$*, complica el proceso. En su parte derecha (recuadrado), la Tabla muestra cómo aumenta la distancia si el concéntrico está intuitivamente más alejado, como ocurre con* $\langle .2, .7\rangle$*, intuitivamente más lejano de* $\langle .4, .5\rangle$*, que* $\langle .3, .6\rangle$*.*



6.10 Un atisbo de solución para intervalos cualesquiera: la familia $\mathcal{M}^3$ de Minkowski

Una primera idea para intentar corregir este (d)efecto, es considerar también, la distancia entre los puntos medios de los intervalos. Si $I, J \in \mathbb{IR}$, son tales que $I = \langle i_0, i_1\rangle$ y $J = \langle j_0, j_1\rangle$, entonces se define:

$$d^3_{(p)}\,(I,J) = \left(\frac{1}{3}\left(|i_0 - j_0|^p + \left|i_{1/2} - j_{1/2}\right|^p + |i_1 - j_1|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.63}$$

si $p \in (0, +\infty)$, y:

$$d^3_{(\infty)}(I,J) = \max\{|i_0 - j_0|, |i_{1/2} - j_{1/2}|, |i_1 - j_1|\} \tag{6.64}$$

[11]No obstante, mencionemos un par de ejemplos que ilustran la aplicación de este índice. El primero está relacionado con un proyecto de investigación en el que estamos involucrados. Se trata de $K\alpha\Pi\Pi\alpha$ («Contador automático de polen aerovagante», parcialmente subvencionado por la Junta de Extremadura, PRI-98-C006), y cuyo investigador principal es el Dr. José MORENO DEL POZO, donde han de reconocerse ópticamente, de manera automática, los diferentes tipos de pólenes. Concretamente, el índice de similitud separación angular es de utilidad en el estudio de factores de representación de la vegetación polen —*cfr. v. gr.* PARSONS [693]—. Un segundo ejemplo es el Análisis Espacial, por ejemplo en Arqueología —*cfr.* HODDER y ORTON [694]—. En ambos supuestos, los objetos a analizar (nuestros intervalos) son lugares físicos. En el caso de la vegetación polen se registran en cada lugar los valores de los factores de representación, por lo que elegido un origen cada lugar es en realidad un vector.

	$(\langle .3,.6\rangle, J)$				$(\langle .4,.5\rangle, J)$			
	$\langle .4,.5\rangle$	$\langle .4,.7\rangle$	$\langle .2,.5\rangle$	$\langle .2,.7\rangle$	$\langle .3,.6\rangle$	$\langle .4,.7\rangle$	$\langle .2,.5\rangle$	$\langle .2,.7\rangle$
$d^2_{(0)}$	.1	.1	.1	.1	.1	0	0	.2
$d^2_{(.01)}$	.1	.1	.1	.1	.1	10^{-31}	10^{-31}	.2
$d^2_{(.2)}$	.1	.1	.1	.1	.1	.0062	.0062	.2
$d^2_{(.7)}$	.1	.1	.1	.1	.1	.0743	.0743	.2
$d^2_{(.9)}$	.1	.1	.1	.1	.1	.0926	.0926	.2
$d^2_{(1)}$	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.2
$d^2_{(2)}$	.1	.1	.1	.1	.1	.1414	.1414	.2
$d^2_{(20)}$	.1	.1	.1	.1	.1	.1932	.1932	.2
$d^2_{(500)}$	.1	.1	.1	.1	.1	.1997	.1997	.2
$d^2_{(\infty)}(= d_{\text{HAUS}})$	.1	.1	.1	.1	.1	.2	.2	.2
d_{Canberra}	.2338	.2198	.2909	.2769	.2338	.1667	.3333	.5
$d_{\text{Bray-Curtis}}$	.1111	.1	.125	.1111	.1111	.1	.125	.2222
$d_{\text{Czekanowski}}$	.1111	.1	.125	.1111	.1111	.1	.125	.2222
d_G	.3010	.3010	.3010	.3010	.3010	.3010	.3010	$+\infty$
d_Q	.1197	.1147	.1554	.1515	.1197	.1179	.2357	.2635
s_{SepAng}	.9778	.9985	.9965	.9829	.9778	.9879	.9570	.9224
s_{inner}	.4200	.5400	.3600	.4800	.4200	.5100	.3300	.4300
s_T	.9555	.9643	.9474	.9600	.9546	.9273	.8919	.8431
s_c	.8921	.9043	.8831	.8989	.8921	.8617	.8303	.7933

Tabla 6.5: *Valoración de varios indicadores de proximidad (similitud y disimilitud) habituales, considerando únicamente los extremos de los intervalos a comparar, para el caso de intervalos de [0,1].*
—*Fuente:* Elaboración propia.

como extensión al caso $p = +\infty$.

Respecto de esta última es necesario observar que, como:

$$
\begin{aligned}
|i_{1/2} - j_{1/2}| &\leq \frac{|i_0 - j_0| + |i_1 - j_1|}{2} \\
&\leq \max\{|i_0 - j_0|, |i_1 - j_1|\}
\end{aligned} \tag{6.65}
$$

se tiene que:

$$
\begin{aligned}
d^3_{(\infty)}(I, J) &= d^2_{(\infty)}(I, J) \\
&= \max\{|i_0 - j_0|, |i_1 - j_1|\}
\end{aligned} \tag{6.66}
$$

Denominamos $\mathcal{M}^3$ a la familia de distancias $\{d^3_{(p)} : p \in (0, \infty)\}$.

La razón por la que $d^3_{(p)}$ consigue diferenciar respecto de la propiedad de «ser concéntrico» es que, precisamente en ese caso, cuando dos intervalos I y J son concéntricos ($i_{1/2} = j_{1/2}$), se divide entre una cantidad mayor, por lo que $d^3_{(p)}(I, J)$ es menor. La situación particular del ejemplo anterior puede verse en la Tabla 6.6.

6.11 Algunos intervalos no discriminables mediante $\mathcal{M}^2$ ni mediante $\mathcal{M}^3$

Consideremos ahora otros puntos característicos en los intervalos distintos de los extremos y del punto medio. Sea $I = \langle 1, 9\rangle$ un intervalo prototipo. Los intervalos $J^1 = \langle 2, 6\rangle$ y $J^2 = \langle 0, 12\rangle$ son co-cuartílicos-1 con I, esto es, tienen el mismo primer cuartil $i_{1/4} = 3$. Los intervalos $J^3 = \langle 4, 8\rangle$ y $J^4 = \langle -2, 10\rangle$ no son co-cuartílicos-1 con I; sus primeros cuartiles son $j^3_{1/4} = 5$ y $j^4_{1/4} = 1$, respectivamente.

En el cómputo de la disimilitud $d^3_{(p)}$ no participan los primeros cuartiles. Identificando los intervalos con sus representaciones virtuales en el proceso de cómputo, esto es, con los puntos extremos y medio:

$I = \langle 1, 9\rangle \leftrightsquigarrow \{1, 5, 9\}$

$J^1 = \langle 2, 6\rangle \leftrightsquigarrow \{2, 4, 6\}$

$d^3_{(p)},\ (0 < p \leq \infty)$								
	$(\langle 0,3\rangle, J)$				$(\langle 1,2\rangle, J)$			
	$\langle 1,2\rangle$	$\langle 1,4\rangle$	$\langle -1,2\rangle$	$\langle -1,4\rangle$	$\langle 0,3\rangle$	$\langle 1,4\rangle$	$\langle -1,2\rangle$	$\langle -1,4\rangle$
$d^3_{(0)}$	0	1	1	0	0	0	0	0
$d^3_{(.01)}$	10^{-18}	1	1	10^{-18}	2×10^{-18}	3×10^{-18}	3×10^{-18}	4×10^{-18}
$d^3_{(.2)}$	.1317	1	1	.1317	.1317	.1884	.1884	.2634
$d^3_{(.7)}$	.5603	1	1	.5603	.5603	.8261	.8261	1.121
$d^3_{(.9)}$	.6373	1	1	.6373	.6373	.9505	.9505	1.275
$d^3_{(1)}$	.6667	1	1	.6667	.6667	1	1	1.333
$d^3_{(2)}$	.8165	1	1	.8165	.8165	1.291	1.291	1.633
$d^3_{(20)}$	.9799	1	1	.9799	.9799	1.893	1.893	1.959
$d^3_{(500)}$	.9992	1	1	.9992	.9992	1.996	1.996	1.998
$d^3_{(\infty)}$	1	1	1	1	1	2	2	2

Tabla 6.6: $d^3_{(p)}$ *aplicada a los intervalos prototipo* $I = \langle 0,3\rangle$ *e* $I = \langle 1,2\rangle$. *Se entiende que* $d^3_{(0)} = \lim_{p\to 0} d^3_{(p)}$.
—*Fuente:* Elaboración propia.

$J^2 = \langle 0,12\rangle \leftrightsquigarrow \{0,6,12\}$
$J^3 = \langle 4,8\rangle \leftrightsquigarrow \{4,6,8\}$
$J^4 = \langle -2,10\rangle \leftrightsquigarrow \{-2,4,10\}$

En este ejemplo concreto, $d^3_{(p)}$ no discrimina entre los intervalos co-cuartílicos-1 y los no co-cuartílicos-1, pues se tiene que:

$$\left|i_0 - j_0^1\right| = \left|i_0 - j_0^2\right| = \left|i_1 - j_1^3\right| = \left|i_1 - j_1^4\right| = 1$$
$$\left|i_1 - j_1^1\right| = \left|i_1 - j_1^2\right| = \left|i_0 - j_0^3\right| = \left|i_0 - j_0^4\right| = 3$$
$$\left|i_{1/2} - j_{1/2}^r\right| = 1, \quad \text{para } r \in \{1,2,3,4\}$$

por lo que:

$$d^3_{(p)}(I, J^r) = \left(\frac{2}{3} + 3^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

para cualquier $r \in \{1,2,3,4\}$.

Parece obvio pues, que de manera similar a como hemos distinguido entre las situaciones concéntrico y no concéntrico introduciendo en el cómputo de la disimilitud los puntos medios, debamos introducir en el cálculo los primeros cuartiles para distinguir entre co-cuartílico-1 y no co-cuartílico-1. Podríamos proponer:

$$d_{(p)}^{\{0,\frac{1}{4},1\}}(I,J) = \left(\frac{1}{3}\left(|i_0 - j_0|^p + \left|i_{1/4} - j_{1/4}\right|^p + |i_1 - j_1|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.67}$$

que resuelve el ejemplo:

$$\begin{aligned} d_{(p)}^{\{0,\frac{1}{4},1\}}\left(I,J^1\right) &= d_{(p)}^{\{0,\frac{1}{4},1\}}\left(I,J^2\right) \qquad (6.68)\\ &= \left(3^{p-1} + \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{p}} \\ d_{(p)}^{\{0,\frac{1}{4},1\}}\left(I,J^3\right) &= d_{(p)}^{\{0,\frac{1}{4},1\}}\left(I,J^4\right) \qquad (6.69)\\ &= \left(3^{p-1} + \frac{1}{3}\left(2^p + 1\right)\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Lógicamente y con el afán de generalizar, deseamos contemplar ambas situaciones:

$$d_{(p)}^{\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\}}(I,J) = \left(\frac{1}{4}\sum_{k\in\{0,1/4,1/2,1\}} |i_k - j_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.70}$$

que resuelve el ejemplo:

$$\begin{aligned} d_{(p)}^{\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\}}\left(I,J^1\right) &= d_{(p)}^{\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\}}\left(I,J^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\left(2+3^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{6.71}$$

$$\begin{aligned} d_{(p)}^{\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\}}\left(I,J^3\right) &= d_{(p)}^{\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\}}\left(I,J^4\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\left(3^p+2^p+2\right)\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{6.72}$$

Parece intuitivo que si uno quiere distinguir sobre el primer cuartil, debería participar en el cómputo.

Si uno tiene la idea de prever algo similar con el tercer cuartil, por lo que podríamos proponer como disimilitud:

$$d_{(p)}^{5}\left(I,J\right) = \left(\frac{1}{5}\sum_{k\in\{0,1/4,1/2,3/4,1\}} |i_k - j_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.73}$$

Aunque esto no siempre será conveniente. En nuestro ejemplo:

$$d_{(p)}^{5}\left(I,J^r\right) = \left(\frac{1}{5}\left(2+2^p+3^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.74}$$

para cualquier $r \in \{1,2,3,4\}$.

Una ponderación conveniente nos permitirá usar sólo un subconjunto de cuartiles. Sea $\mathfrak{p} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ y un conjunto de pesos $W = \{w(\alpha) : \alpha \in \mathfrak{p}\}$ tales que $\sum_{\alpha\in\mathfrak{p}} w(\alpha) = 1$. Podemos usar:

$$d_{(p)}\left(I,J;\mathfrak{p},W\right) = \left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{p}} w(\alpha)\,|i_\alpha - j_\alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.75}$$

como expresión de una disimilitud genérica definida sobre las representaciones "cuartiladas" $\{i_\alpha : \alpha \in \mathfrak{p}\}$ y $\{j_\alpha : \alpha \in \mathfrak{p}\}$ de los intervalos I y J.

En nuestro ejemplo:

$$d_{(p)}^{\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\}}\left(I,J\right) = d_{(p)}\left(I,J;\mathfrak{p},\left\{\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},0,\tfrac{1}{4}\right\}\right)$$

Obsérvese que para nuestros fines hubiese sido lo mismo escoger un conjunto W, tales que los pesos asignados al primer y al tercer cuartil fuesen distintos, por ejemplo, si $W = \left\{\frac{1}{4},\lambda,\frac{1}{4},\left(\frac{1}{4}-\lambda\right),\frac{1}{4}\right\}$, con $\lambda \in [0,1/4]$, entonces:

$$\begin{aligned} d_{(p)}\left(I,J^1;\mathfrak{p},W\right) &= d_{(p)}\left(I,J^2;\mathfrak{p},W\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}(2+3^p)+\left(\tfrac{1}{4}-\lambda\right)2^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{6.76}$$

$$\begin{aligned} d_{(p)}\left(I,J^3;\mathfrak{p},W\right) &= d_{(p)}\left(I,J^4;\mathfrak{p},W\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}(2+3^p)+\lambda 2^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{6.77}$$

Si lo que estamos destacando es la co-cuartilidad(1), un efecto deseable, es que:

$$d_{(p)}\left(I,J^{3\text{ ó }4};\mathfrak{p},W\right) > d_{(p)}\left(I,J^{1\text{ ó }2};\mathfrak{p},W\right) \tag{6.78}$$

Para ello, basta asignar un peso mayor al primer cuartil que al tercero, o sea $\lambda > \left(\frac{1}{4}-\lambda\right)$.

En las siguientes secciones se generalizan y formalizan estas ideas.

6.12 α-percentilado

En general, dados dos subconjuntos A y B de un retículo $(L\ ,\preceq)$, y con la finalidad de conseguir medir la diferencia o disimilitud existente entre ellos, podríamos trabajar, al menos de tres formas: a) considerando todos los puntos en A y en B, b) destacando sólo algunos puntos en A y en B, y c) destacando algunos subconjuntos relevantes de A y de B.

En las dos primeras situaciones, si los subconjuntos A y B son completos (es decir si podemos considerar ínfimo y supremo de ambos conjuntos), estamos hablando de α-percentilado —*cfr.* Def. 79—, cuya aplicación como técnica de medición de disimilitud se verá en §6.13.1ss. La técnica de (α,β)-percentilado —*cfr.* §6.20.1— es la solución que proponemos para el tercer caso. En una sección posterior, se propondrá la introducción de borrosidad en el α-percentilado (*cfr.* Def. 252) y en el (α,β)-percentilado —*cfr.* Def. 254.

Definición 79 *Sea $(L,\preceq)$ un retículo, $X\in\mathfrak{C}(L)$ y $[X]$ la clausura de X. Denominamos α-percentilado de X, a cualquier función parcial inyectiva $\mathfrak{p}:[0,1]\to[X]$, que sea un homomorfismo de orden de $([0,1],\leq)$ en $(L,\preceq)$, esto es, tal que $\alpha\leq\beta\implies\mathfrak{p}(\alpha)\preceq\mathfrak{p}(\beta)$, para todo $\alpha,\beta\in\operatorname{Dom}\mathfrak{p}$, y tal que $\mathfrak{p}(0)=x_0$ y $\mathfrak{p}(1)=x_1$. Diremos de X que es un conjunto α-percentilado, y denotaremos tal situación mediante el par ordenado $(X,\mathfrak{p})$. Nos tomaremos la libertad de denotar $\operatorname{Dom}\mathfrak{p}$, simplemente por $\mathfrak{p}$. Así, $|\mathfrak{p}|$ quiere decir $|\operatorname{Dom}\mathfrak{p}|$.*

Definición 80 *Sea X y sea $A\subseteq[X]$. Decimos que A es un subconjunto α-percentilado de X, precisamente si existe un α-percentilado tal que $\mathfrak{p}(X)=A$.*

Por ejemplo, todo subconjunto finito es un subconjunto α-percentilado de sí mismo.

Definición 81 *Denominamos α-percentil (y α-percentile o α-percentage point, en inglés) de X, al elemento imagen $\mathfrak{p}(\alpha)$, que denotaremos mediante $x^{\mathfrak{p}}_{\alpha}$, o simplemente mediante x_α, caso de no haber lugar a confusión.*

Definición 82 *Sean $(V,\preceq)$ un retículo vectorial [278], y $X\in\mathfrak{P}(V)$ convexo y completo. De manera estándar, y mientras no sea dicho nada en contra, establecemos como α-percentilado de X, aquél $\mathfrak{p}:[0,1]\to[x_0,x_1]$ tal que:*

$$\mathfrak{p}(\alpha)=(1-\alpha)x_0+\alpha x_1 \tag{6.79}$$

para todo $\alpha\in[0,1]$. En este caso notaremos simplemente $\mathfrak{p}(\alpha)$ como x_α. Puede comprobarse fácilmente que $\mathfrak{p}$ es un homomorfismo de orden de $([0,1],\leq)$ en $(V,\preceq)$.

Definición 83 *Sea $(V,\preceq)$ un retículo normado y $X\in\mathfrak{P}(V)$. Si $\mathfrak{p}$ es un α-percentilado finito de X, y todos sus α-percentiles están equidistanciados según la distancia inducida por la norma, decimos de él que es el* α-percentilado uniforme *de X, lo notaremos $\mathfrak{u}:[0,1]\to X$. En el caso de la norma euclidea, su dominio es:*

$$\mathfrak{u}=\left\{\frac{\beta-1}{|\mathfrak{p}|-1}:\beta=1,...,|\mathfrak{p}|\right\} \tag{6.80}$$

Observación 84 *Los extremos x_0 y x_1 pueden pertenecer o no a X. Del mismo modo, podría proponerse que el α-percentil de un conjunto X no tenga por qué pertenecer a X. De ello, hablaremos más en la sección §6.16, con la distancia de* Hausdorff. *Situaciones particulares de conexión, conexión por arcos, convexidad, etc., del conjunto X, en determinados espacios topológicos, harán que todos los α-percentiles de X sean elementos de X, salvo quizás x_0 y x_1.*

Observación 85 *Si consideramos el cuerpo completo $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ de los números reales, y la clase $\mathbb{IR}$ de todos los intervalos acotados, entonces las definiciones anteriores de α-percentilado y α-percentil son válidas para cualquier $X=\langle x_0,x_1\rangle\in\mathbb{IR}$.*

Observación 86 *En el caso particular de intervalos de números reales, notemos que dados $I,J\in\mathbb{IR}$, tales que $I=\langle i_0,i_1\rangle$ y $J=\langle j_0,j_1\rangle$, la biyección $f:I\to J$, definida por:*

$$f(x)=\frac{j_0-j_1}{i_0-i_1}(x-i_0)+j_0 \tag{6.81}$$

transforma[12] I en J. Observemos que f es composición de una homotecia y una traslación, de razones $(j_0-j_1)\diagup(i_0-i_1)$ y $(i_0j_1-i_1j_0)\diagup(i_0-i_1)$, respectivamente[13]. Nótese que en el caso particular $I=[0,1]$, f está

[12] En efecto, $j_0=\lim_{x\to i_0}f(x)$ y $j_1=\lim_{x\to i_1}f(x)$.

[13] Reescríbase $f(x)=\frac{(j_0-j_1)x+i_0j_1-i_1j_0}{i_0-i_1}$.

definida como $h(x) = (1-x)j_0 + xj_1$ —cfr. Ec. (6.79)—. Igualmente podríamos escoger cualquier otra biyección, para transformar un intervalo en otro, por ejemplo, si $I = [0,1]$, consideremos $g : [0,1] \to J$, tal que $g(x) = j_0^{1-x} j_1^x$. La desigualdad de HÖLDER *afirma que si $j_0 j_1 \geq 0$ y $\alpha \in [0,1]$, entonces: $j_0^{1-x} j_1^x \leq (1-x)j_0 + xj_1$ —cfr. Fig. 6.1.*

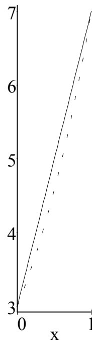


Figura 6.1: *Biyección $g : [0,1] \to J$ definida por $g(x) = j_0^{1-x} j_1^x$. Se aprecia que g no transporta los α-percentiles de I a J.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

El interés de f reside en que si I y J están α-percentilados linealmente por $x_\alpha = (1-\alpha)x_0 + \alpha x_1$ $(x = i, j)$, entonces f transforma cada α-percentil de I en el correspondiente α-percentil de J, esto es, para todo $\alpha \in [0,1]$,

$$f(i_\alpha) = j_\alpha \tag{6.82}$$

Debido a esto, diremos que f «transporta» el α-percentilado de I a J.

Observación 87 *Supongamos que tanto I como J están finita y uniformemente α-percentilados. Entonces, la extensión estándar $\mathfrak{p}(\alpha) = (1-\alpha)x_0 + \alpha x_1$ del α-percentilado uniforme $\mathfrak{u}$ a todo el intervalo $[0,1]$, no es mas que una interpolación lineal. Es obvio que podría hacerse otro tipo de interpolación. Si por ejemplo los intervalos fuesen α-cortes de números borrosos, este esquema podría responder a que en ciertos subintervalos se localice por ejemplo la moda de la función de pertenencia —cfr. Fig. 6.2, en la página 127.*

Ejemplo 88 *La definición (81) puede extenderse al caso de ser X una unión disjunta y fuerte*[14] *de intervalos propios, o sea:*

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} \langle i_{k,0}, i_{k,1} \rangle \tag{6.83}$$

con $i_{k,0} < i_{k,1}$, para todo $k \in \mathbb{N}_n^+$. Observemos que estamos ante un caso particular de conjunto no convexo. La definición del α-percentil de X es:

$$x_\alpha = i_{k,0} + \alpha S_n - S_{k-1} \tag{6.84}$$

donde α recorre $[0,1]$, recorriendo los subintervalos $[S_{k-1}/S_n, S_k/S_n]$, estando S_k definido recursivamente como:

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_k = L_1 + L_2 + ... + L_k \end{cases} \tag{6.85}$$

siendo $L_h = i_{h,1} - i_{h,0}$, para todo $h \in \mathbb{N}_n^+$. En §7.1.5 estudiamos la aplicación de los resultados de este ejemplo al cálculo de la disimilitud basada en α-cortes entre conjuntos borrosos «normocordes», conjuntos borrosos normales tales que todos los puntos donde se alcanza un máximo local pertenecen al núcleo.

[14] Dado un retículo $(L, \preceq)$ y dos subconjuntos completos A y B, decimos que $A \cup B$ es una **unión fuertemente disjunta**, si existen al menos dos elementos $u, v \in \mathcal{U}$, tales que $u, v \in (a_1, b_0)_\preceq$ (intervalo abierto, respecto del orden $\preceq$, de extremo inferior a_1 y extremo superior b_0).

6.13 Métricas α-percentiladas de Minkowski

6.13.1 Disimilitudes α-*percentiladas* de Minkowski

La familia de métricas α-*percentiladas* de MINKOWSKI que proponemos en éste y en los siguientes apartados, incluye como subfamilia a $\mathcal{M}^2$, y permite reducir la clase de intervalos no discriminables.

Generalizamos de la idea anterior de utilización de los cuartiles, con la información extra proveniente de todas las disimilitudes locales entre todos los correspondientes α-percentiles.

Sean $I, J \in \mathbb{IR}$, tales que $I = \langle i_0, i_1 \rangle$ y $J = \langle j_0, j_1 \rangle$. Denotemos, para todo $\alpha \in [0, 1]$:

$$\Delta_\alpha^{I,J} = i_\alpha - j_\alpha \tag{6.86}$$

Obsérvese que:

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha^{I,J} &= (1-\alpha)\Delta_0^{I,J} + \alpha\Delta_1^{I,J} & (6.87) \\ &= \Delta_0^{I,J} + \alpha\left(\Delta_1^{I,J} - \Delta_0^{I,J}\right) & (6.88) \end{aligned}$$

Proponemos extender las familias de MINKOWSKI a la que denominamos *familia de disimilitudes α-percentiladas de* MINKOWSKI:

- en el *caso finito*, para $1 \le p < \infty$, está definida por:

$$d_{(p)}^N(I, J) = \left(\frac{1}{N}\sum_{\alpha\in\mathfrak{p}} \left|\Delta_\alpha^{I,J}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.89}$$

donde $\mathfrak{p}$ es un α-percentilado y $N = |\mathfrak{p}|$. Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{u}$ (α-percentilado uniforme —*cfr.* Ec. 6.80), entonces, $d_{(p)}^N(I, J)$ es computable mediante:

$$d_{(p)}^N(I, J) = \left(\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N} \left|\Delta_0^{I,J} + \frac{\beta-1}{N-1}\left(\Delta_1^{I,J} - \Delta_0^{I,J}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.90}$$

- en el *caso continuo*, para $1 \le p < \infty$, si $\Delta_0^{I,J} = \Delta_1^{I,J}$, esto es, si las disimilitudes entre cada par de extremos son iguales, entonces:

$$d_{(p)}(I, J) = \left|\Delta_0^{I,J}\right| \tag{6.91}$$

y si $\Delta_0^{I,J} \ne \Delta_1^{I,J}$, entonces, la definimos como:

$$d_{(p)}(I, J) = \left(\int_0^1 \left|\Delta_\alpha^{I,J}\right|^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.92}$$

que precisamente es el límite[15]:

$$d_{(p)}(I,J) = \lim_{N\to\infty} d^N_{(p)}(I,J) = \left(\frac{\left|\Delta_0^{I,J}\right|^p \Delta_0^{I,J} - \left|\Delta_1^{I,J}\right|^p \Delta_1^{I,J}}{\left(\Delta_0^{I,J} - \Delta_1^{I,J}\right)(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.93}$$

- si $p = \infty$, en ambos casos, es el límite:

$$d_{(\infty)}(I,J) = \lim_{p\to\infty} d_{(p)}(I,J) = \max\left(\left|\Delta_0^{I,J}\right|, \left|\Delta_1^{I,J}\right|\right) = \lim_{p\to\infty} d^N_{(p)}(I,J) = d^N_{(\infty)}(I,J) \tag{6.94}$$

para cualquier $N \in \mathbb{Z}^+$, $N > 2$.

El caso $p = 2$ ha sido profusamente estudiado —*cfr.* Salas, Bertoluzza y Corral [695]; Bertoluzza, Corral y Salas [681, 696]; Montes, Gil y Bertoluzza [697]—, motivados por problemas de regresión borrosa —*cfr.* Klir y Yuan [46]; y §7.1.1 de la presente Tesis.

Con respecto a las observaciones precedentes, si f es una traslación, las disimilitudes son las mismas, pero en los otros dos casos, las disimilitudes $d_{(p)}(I,J)$ son monótonas crecientes con respecto a p, hacia $d_{(\infty)}(I,J)$.

6.13.2 Propiedades de las disimilitudes α-percentiladas

Si $I, J \in \mathbb{I}[0,1]$, esto es, si son subintervalos de $[0,1]$, entonces $d^N_{(p)}(I,J)$, $d_{(\infty)}(I,J) \in [0,1]$, es decir, están normalizadas, para todo $p \in [1,\infty)$. En el caso general $I, J \in \mathbb{IR}$, no lo están. El motivo fundamental, en este último caso, de la introducción de los coeficientes $1/N$ es la convergencia en N de $d^N_{(p)}(I,J)$. Si sólo operásemos con un número finito N de α-percentiles, podríamos usar alternativamente la familia de distancias:

$$d^{N*}_{(p)}(I,J) = \left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{b}} \left| i_{(\alpha)} - j_{(\alpha)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.95}$$

que carece de sentido en el caso continuo, pues si $N \twoheadrightarrow +\infty$, entonces $d^{N*}_{(p)}(I,J)$ diverge[16].

Los teoremas que siguen nos permiten concluir que las disimilitudes propuestas son métricas.

Teorema 89 *Las disimilitudes* $d^{N*}_{(p)}$ *y* $d^N_{(p)}$ $(\forall p \in (0,\infty], \forall N \in \mathbb{Z}^+)$ *y* $d_{(\infty)}$ *son* distancias de Birkhoff *en* $\mathbb{IR}^2 = \mathbb{IR} \times \mathbb{IR}$.

[15] Obsérvese que:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \left(d^N_{(p)}(I,J)\right)^p &= \frac{1}{N}\sum_{\alpha\in\mathfrak{u}} \left|\Delta_\alpha^{I,J}\right|^p \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{\alpha\in\mathfrak{u}} \left|(1-\alpha)\Delta_0^{I,J} + \alpha\Delta_1^{I,J}\right|^p \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} \left|\Delta_0^{I,J} + \frac{\alpha-1}{N-1}\left(\Delta_1^{I,J} - \Delta_0^{I,J}\right)\right|^p \\
&= \frac{\left|\Delta_0^{I,J}\right|^p \Delta_0^{I,J} - \left|\Delta_1^{I,J}\right|^p \Delta_1^{I,J}}{\left(\Delta_0^{I,J} - \Delta_1^{I,J}\right)(p+1)} \\
&= \int_0^1 \left|\Delta_0^{I,J} + \alpha\left(\Delta_1^{I,J} - \Delta_0^{I,J}\right)\right|^p d\alpha \\
&= \left(d_{(p)}(I,J)\right)^p
\end{aligned}$$

[16] Llegados a este punto, y en referencia a los índices de (di-)similitud comentados en §6.9, puede ser interesante exponer que:

- El α-percentilado de la métrica de *Canberra* no es convergente, hay divergencia a $\mathsf{signum}\,(i_0 + i_1 + j_0 + j_1)\,\infty$, y si supone que los intervalos son no negativos, para que no resulten distancias negativas, diverge a $+\infty$.

Demostración. Sean $I, J, K \in \mathbb{IR}$, tales que $I = \langle i_0, i_1\rangle, J = \langle j_0, j_1\rangle, K = \langle k_0, k_1\rangle$. En efecto, $d^{N*}_{(p)}(I,J)$, $d^{N}_{(p)}(I,J)$, $d^{N}_{(\infty)}(I,J)$, $d_{(\infty)}(I,J) \geq 0$, por tratarse de una raíz positiva de una suma de potencias de valores absolutos, afectados o no por coeficientes positivos, y de simples valores absolutos en el caso de $d^{N}_{(\infty)}(I,J)$ y $d_{(\infty)}$. La simetría —*cfr.* 5.9— es consecuencia de la simetría del valor absoluto. Si $I = J$, entonces $i_{(\alpha)} = j_{(\alpha)}$, para todo $\alpha \in [0,1]$, y por tanto $d^{N*}_{(p)}(I,J) = d^{N}_{(p)}(I,J) = d^{N}_{(\infty)}(I,J) = d_{(\infty)}(I,J) = 0$ —*cfr.* 5.3—. Si $d^{N*}_{(p)}(I,J) = d^{N}_{(p)}(I,J) = 0$, como para todo $\alpha \in [0,1]$ es $\left|i_{(\alpha)} - j_{(\alpha)}\right|^p \geq 0$, se sigue que deben ser $i_{(\alpha)} = j_{(\alpha)}$, y por tanto $I = J$ —*cfr.* 5.12—. Si $d^{N}_{(\infty)}(I,J) = d_{(\infty)}(I,J) = 0$, esto es, si $\max(|\Delta^{I,J}_0|, |\Delta^{I,J}_1|) = 0$, entonces $\Delta^{I,J}_0 = \Delta^{I,J}_1 = 0$, de donde $I = J$. ■

Teorema 90 *Para todo $p \in (0,1]$, y todo $N \in \mathbb{Z}^+$, las disimilitudes $d^{N}_{(p)}$ y $d^{N*}_{(p)}$ son* distancias regulares de Fréchet *en $\mathbb{IR}^2 = \mathbb{IR} \times \mathbb{IR}$.*

Demostración. En efecto, sean $I, J, K \in \mathbb{IR}$, tales que $I = \langle i_0, i_1\rangle, J = \langle j_0, j_1\rangle, K = \langle k_0, k_1\rangle$. Como (a) para todo $\alpha \in [0,1]$ son ciertas $\left|i_{(\alpha)} - k_{(\alpha)}\right| \leq \left|i_{(\alpha)} - j_{(\alpha)}\right| + \left|j_{(\alpha)} - k_{(\alpha)}\right|$, por ser el valor absoluto métrica en $\mathbb{R}$, (b) la función real x^p es creciente en $[0,\infty)$ y (c) al ser $p \in (0,1]$, x^p es superaditiva (o sea, $(x+y)^p \geq x^p + y^p$) para todo $x, y \in [0,\infty)$, se tiene,

$$\begin{aligned}
\left|i_{(\alpha)} - k_{(\alpha)}\right|^p &\leq \left|i_{(\alpha)} - j_{(\alpha)}\right|^p + \left|j_{(\alpha)} - k_{(\alpha)}\right|^p \\
&\Longrightarrow \sum_{\alpha\in\mathfrak{b}} \left|i_{(\alpha)} - k_{(\alpha)}\right|^p \leq \sum_{\alpha\in\mathfrak{b}} \left|i_{(\alpha)} - j_{(\alpha)}\right|^p + \sum_{\alpha\in\mathfrak{b}} \left|j_{(\alpha)} - k_{(\alpha)}\right|^p \\
&\Longrightarrow d^{N*}_{(p)}(I,J) \leq \left(\left(d^{N*}_{(p)}(I,J)\right)^p + \left(d^{N*}_{(p)}(J,K)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\Longrightarrow N^{\frac{-1}{p}} d^{N*}_{(p)}(I,J) \leq N^{\frac{-1}{p}} \left(\left(d^{N*}_{(p)}(I,J)\right)^p + \left(d^{N*}_{(p)}(J,K)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\Longrightarrow d^{N}_{(p)}(I,J) \leq \left(\left(d^{N}_{(p)}(I,J)\right)^p + \left(d^{N}_{(p)}(J,K)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

De aquí que $d^{N*}_{(p)}(I,J)$ y $d^{N}_{(p)}(I,J)$ sean distancias de Fréchet, con $\varrho(x) = 2^{\frac{1}{p}}x$.—*cfr.* Def. 61 (p. 98). ■

Teorema 91 *Para todo $p \in [1,\infty]$, y todo $N \in \mathbb{Z}^+$, las disimilitudes $d^{N}_{(p)}$ y $d^{N*}_{(p)}$ son **métricas** en $\mathbb{IR}^2 = \mathbb{IR}\times\mathbb{IR}$.*

Demostración. Estas disimilitudes son un caso especial de las φ-métricas, cuyo carácter como tales se demuestra en el Teorema 108 (p. 141). ■

6.13.3 Las familias de métricas α-percentiladas de Minkowski

De aquí en adelante, denotaremos:

$$\mathcal{M} = \{d^{N}_{(p)} : N \in \mathbb{Z}^+ \wedge p \in [1,\infty)\} \tag{6.97}$$

$$\mathcal{M}^N = \{d^{N}_{(p)} : p \in [1,\infty)\} \tag{6.98}$$

$$\mathcal{M}_p = \{d^{N}_{(p)} : N \in \mathbb{Z}^+\} \tag{6.99}$$

$$\mathcal{M}^* = \{d^{N*}_{(p)} : N \in \mathbb{Z}^+ \wedge p \in [1,\infty)\} \tag{6.100}$$

$$\mathcal{M}^{N*} = \{d^{N*}_{(p)} : p \in [1,\infty)\} \tag{6.101}$$

$$\mathcal{M}^*_p = \{d^{N*}_{(p)} : N \in \mathbb{Z}^+\} \tag{6.102}$$

Las siguientes propiedades de estas familias de métricas son fácilmente demostrables.

- El α-percentilado de la métrica de Bray y Curtis converge a

$$\begin{aligned}
d^{(\infty)}_{\text{Bray-Curtis}}(I,J) &= \lim_{N\to\infty} d^{N}_{\text{Bray-Curtis}}(I,J) \\
&= \frac{|i_0 + i_1 - j_0 - j_1|}{i_0 + i_1 + j_0 + j_1}
\end{aligned} \tag{6.96}$$

- El α-percentilado del índice de similitud separación angular converge a 1.

- Se verifica:

$$d_{(p)}^{N*} \leq d_{(p)}^{M*}, \text{ si } N \leq M \tag{6.103}$$

$$d_{(\infty)}^{N*} \leq d_{(p)}^{N*} \leq d_{(q)}^{N*} \leq d_{(1)}^{N*}, \text{ si } q \leq p \tag{6.104}$$

donde $N, M \in \mathbb{Z}^+$ y $p, q \in [1, \infty)$.

- La métrica $d_{(1)}^{N*}$ admite la definición recursiva:

$$d_{(1)}^{N*} = \begin{cases} \left|i_{(0)} - j_{(0)}\right| + \left|i_{(1)} - j_{(1)}\right| & \text{si } N = 2 \\ d_{(1)}^{N-1*}(I, J) + \left|i_{(1/2)} - j_{(1/2)}\right| & \text{si } N > 2 \end{cases} \tag{6.105}$$

- Para todo $N > 2$ de $\mathbb{Z}^+$:

$$I \not\subset J \wedge J \not\subset I \Longrightarrow d_{(1)}^{N}(I, J) = d_{(1)}^{N-1}(I, J) \tag{6.106}$$

6.13.4 Ejemplo ilustrativo: Índices de borrosidad

En 1975, Arnold Kaufmann [698] introdujo el índice de borrosidad γ —también conocido como **índice de borrosidad «K^2»**—, dado $A \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$:

$$\gamma(A) = \frac{2}{n^k} d(A, \breve{A}) \tag{6.107}$$

donde d es una métrica en $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$, $k \in \mathbb{R}^+$, $n = |\operatorname{supp} A|$ y $\breve{A} \in \mathfrak{P}(\mathcal{U})$ es el **subconjunto nítido más próximo** al subconjunto borroso A, o sea, aquél cuya función característica es:

$$\breve{A}(u) = \begin{cases} 0 & si\ A(u) \leq \frac{1}{2} \\ 1 & si\ A(u) > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{6.108}$$

Autores como Klir y Folger [699], o Kaufmann y Gil Aluja [412], recogen las medidas de borrosidad[17] basadas en la familia clásica de métricas de Minkowski y en la suposición ideal de falta de distinción entre un conjunto borroso y el conjunto nítido más próximo a él.

---

[17] Intuitivamente —*cfr.* Klir y Yuan [46] (p. 254)— se asigna la **borrosidad maximal** al subconjunto $\epsilon \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$, tal que $\forall u \in \mathcal{U}$, $\epsilon(u) = 1/2$. También intuitivamente, según estos autores, se considera como definición de **«menos borroso»** la siguiente: Sean $A, B \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$. Diremos que A es menos borroso que B, y denotaremos $A \preccurlyeq B$, precisamente si, $\forall u \in \mathcal{U}$: *(i)* $B(u) \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow A(u) \leq B(u)$, y *(ii)* $B(u) > \frac{1}{2} \Longrightarrow A(u) \geq B(u)$.

Didier Dubois y Henri Prade [437] proporcionan la siguiente definición de medida de borrosidad: Una función $\mathfrak{h} : \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \to [0, +\infty)$, es una **medida de borrosidad** (o **entropía borrosa**), precisamente si: *(i)* $\mathfrak{h}(A) = 0$ si y sólo si A es nítido, *(ii)* $\mathfrak{h}(A)$ (alcanza su máximo, precisamente si $A = \epsilon$ –conjunto «equilibrio», cuya borrosidad es maximal), y *(iii)* $A \preccurlyeq B \Longrightarrow \mathfrak{h}(A) \leq \mathfrak{h}(B)$ (si A es «menos borroso» que B, entonces el valor de borrosidad de A es menor que el valor de borrosidad de B).

También es usual valorar la borrosidad en el intervalo $[0, 1]$, por lo que una definición frecuente de medida de borrosidad es —*cfr.* De Luca y Termini [700]; Trillas, Alsina y Terricabras [316]: Una función $\mathcal{H} : \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \to [0, 1]$, es una **medida de borrosidad** (o **entropía borrosa**), precisamente si: *(i)* $\mathcal{H}(A) = 0$ si y sólo si A es nítido, *(ii)* $\mathcal{H}(A) = 1 \Longleftrightarrow (\forall u \in \mathcal{U}, A(u) = 1/2)$, y *(iii)* $A \preccurlyeq B \Longrightarrow \mathcal{H}(A) \leq \mathcal{H}(B)$.

Intuitivamente, la borrosidad de un arquetipo ha de ser mayor que la borrosidad de un ejemplar (este viene dado, mientras que el arquetipo seguramente habrá que construirlo). Ello será porque la borrosidad de un arquetipo se obtendrá como agregación de los grados individuales de borrosidad de los ejemplares que contribuyen a la definición del arquetipo. Optamos por realizar esta agregación con una conorma triangular (por ser la t-conorma *máximo* la menor de todas).

De igual manera que entendemos la entropía clásica —a partir de Shannon [701]— como medida de la incertidumbre probabilística presente en un experimento aleatorio (variable aleatoria, distribución de probabilidad), entendemos la entropía borrosa como medida de la incertidumbre borrosa presente en un conjunto borroso (en una función de pertenencia). En general, existirá una noción de entropía para cada concepto descriptor de diferentes situaciones de incertidumbre.

Basados en conceptos provenientes de la teoría de la información —*cfr.* Cover y Thomas [702]; Pardo [703]; Khinchin [704]—, De Luca y Termini [705], introdujeron en 1972, las medidas de borrosidad entropía y energía. Por medida de **entropía de un subconjunto borroso** A de $\mathcal{U}$, entendemos un número $\mathcal{H}(A)$:

$$\mathcal{H}(A) = \int_{\mathcal{U}} f(A(u))dv \tag{6.109}$$

donde v es una medida definida en $\mathcal{U}$ y $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función monótona creciente en $[0, 1/2]$ y monótona decreciente en $[1/2, 1]$.

Obsérvese que la entropía de $\varnothing$ y de $\mathcal{U}$ es cero. El conjunto borroso $\widetilde{1/2}$ tiene entropía maximal. Considérense como ejemplos:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 1 - x & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases} \tag{6.110}$$

Considerando las disimilitudes α-percentiladas de MINKOWSKI, definimos la **entropía no probabilística γ_p^N de Kaufmann**, $\forall A \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$:

$$\gamma_p^N(A) = 2d_p^N(A, \breve{A}) \tag{6.113}$$

Obsérvese que $n = N$ y $k = 1/p$. Así, tenemos las siguientes familias:

$$\mathcal{K} = \{\gamma_{(p)}^N : N \in \mathbb{Z}^+ \wedge p \in [1, \infty)\} \tag{6.114}$$

$$\mathcal{K}^N = \{\gamma_{(p)}^N : p \in [1, \infty)\} \tag{6.115}$$

$$\mathcal{K}_p = \{\gamma_{(p)}^N : N \in \mathbb{Z}^+\} \tag{6.116}$$

$$\mathcal{K}^* = \{\gamma_{(p)}^{N*} : N \in \mathbb{Z}^+ \wedge p \in [1, \infty)\} \tag{6.117}$$

$$\mathcal{K}^{N*} = \{\gamma_{(p)}^{N*} : p \in [1, \infty)\} \tag{6.118}$$

$$\mathcal{K}_p^* = \{\gamma_{(p)}^{N*} : N \in \mathbb{Z}^+\} \tag{6.119}$$

Otra manera de medir la borrosidad es midiendo la **disimilitud con el complementario**. Es una propuesta de YAGER [706], y, en concreto, se trata de medir la borrosidad de un conjunto borroso mediante la falta de distinción local entre él y su complementario. Así, siendo $\mathcal{U}$ acotado:

$$\gamma_{\mathrm{Y}}(A) = \int_{\mathcal{U}} (1 - |A(u) - A^c(u)|) du \tag{6.120}$$

En (6.120) se emplea la métrica d_1. En vez de ello, bien pudiera emplearse cualquier otra disimilitud para medir la falta de distinción entre un conjunto borroso y su complementario. De esta forma, y de una manera similar a (6.114-6.119) tendríamos diversas colecciones de familias de índices de borrosidad, según la disimilitud empleada.

Observemos cómo depende el grado de borrosidad de la aproximación empleada:

i) mientras menos distinto de su conjunto nítido más próximo, sea un conjunto borroso, menos borroso éste será; sin embargo,

ii) mientras menos distinto de su complementario sea un conjunto borroso, más borroso será.

Observemos que , el **conjunto borroso más borroso** (menos nítido) es:

$$(\forall u \in \mathcal{U})(A(u) = 1/2) \tag{6.121}$$

Recordemos que la distribución de probabilidad con la mayor entropía —*cfr.* pág. B.3— (es decir, con la menor certeza en que ocurra cualquier resultado en particular) es la uniforme.

6.14 α-percentilado poligonal

Siendo $(V, \preceq)$ un retículo vectorial y X un subconjunto denso, convexo y completo suyo, establecimos como α-percentilado estándar de X —*cfr.* Ec. 6.79— aquel α-percentilado $\mathfrak{p} : [0, 1] \to [x_0, x_1]$, tal que:

$$\mathfrak{p}(\alpha) = x_\alpha = (1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. O sea, como el segmento de extremos $(0, x_0)$ y $(1, x_1)$.

Pero, puede que $\mathfrak{p}(\alpha)$ no sea un segmento. Podemos asignar, biyectiva y ordenadamente, N puntos :

$$\{\alpha_{\frac{i}{N-1}} : i = 0, 1, ..., N - 1\}$$

---

y la bien conocida «función de Shannon»:

$$f(x) = -x \ln x - (1 - x) \ln(1 - x) \tag{6.111}$$

Por medida de **energía de un subconjunto borroso** A de $\mathcal{U}$, entendemos un número $\mathcal{E}(A)$:

$$\mathcal{E}(A) = \int_{\mathcal{U}} g(A(u)) dv \tag{6.112}$$

donde v es una medida definida en $\mathcal{U}$ y g es una función monótona creciente en $[0, 1]$. Obsérvese que si $g(v) = v$, entonces, $\mathcal{E}(A)$ puede interpretarse como el cardinal de A.

de $[0,1]$ a N puntos:

$$\{x_{[i/(N-1)]} : i = 0, 1, ..., N-1\}$$

de $[x_0, x_1]$, siendo $\alpha_0 = 0$, $x_0 = x_{[0]}$, $\alpha_1 = 1$ y $x_1 = x_{[1]}$. Así, para todo , $\alpha \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} x_\alpha &= \mathfrak{p}(\alpha; X, N) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{[\alpha_{(i-1)/(N-1)}, \alpha_{i/(N-1)}]} Z(\alpha; \alpha_{(i-1)/(N-1)}, x_{[(i-1)/(N-1)]}, \alpha_{i/(N-1)}, x_{[i/(N-1)]}) \end{aligned} \tag{6.122}$$

con Z una interpolación lineal:

$$Z(x; a, b, c, d) = (x-a)\frac{d-c}{b-a} + c$$

y χ_A la función indicadora de A.

Lógicamente, por ser inyectiva, $\mathfrak{p}$ está obligada a ser estricta creciente o estricta decreciente. Diremos que $\mathfrak{p}$ es un **α-percentilado poligonal** de X. Como ejemplo, véase la Fig. 6.2.

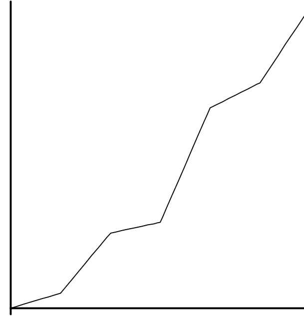


Figura 6.2: *Gráfica de $p(\alpha)$ en un caso de asignación de cinco puntos destacados (además de los extremos) del intervalo $[x_0, x_1]$ a los sextiles del intervalo* $[0,1]$.
—*Fuente:* Elaboración propia.

Ejemplo 92 *Sean A y B dos conjuntos borrosos normales y bimodales, con ambas modas pertenecientes a sus respectivos núcleos (se define cada moda como el valor medio de cada intervalo modal), $\breve{a}_1, \breve{a}_2 \in \operatorname{core} A$, $\breve{b}_1, \breve{b}_2 \in \operatorname{core} B$. Dado $\alpha \in (0,1]$, consideremos sus α-cortes ${}^\alpha A = \langle {}^\alpha a_0, {}^\alpha a_1 \rangle$ y ${}^\alpha B = \langle {}^\alpha b_0, {}^\alpha b_1 \rangle$. De alguna manera, puede decirse que tenemos un **metaconocimiento** sobre estos intervalos: sabemos que son α-cortes de conjuntos borrosos. En base a ello consideramos las representaciones ${}^\alpha A \leftrightsquigarrow \{{}^\alpha a_0, \breve{a}_1, \breve{a}_2, {}^\alpha a_1\}$ y ${}^\alpha B \leftrightsquigarrow \{{}^\alpha b_0, \breve{b}_1, \breve{b}_2, {}^\alpha b_1\}$. En cuanto a $[0,1]$, lo consideramos representado por $\{0, 1/3, 2/3, 1\}$. Asociaremos $\breve{a}_1$ y $\breve{b}_1$ con $1/3$, y $\breve{a}_2$ y $\breve{b}_2$ con $2/3$, utilizando la función $\mathfrak{p}$ —cfr. Ec. 6.122— para calcular una disimilitud entre ellos, modificando de una manera natural la expresión (6.89):*

$$d^4_{(p)}({}^\alpha A, {}^\alpha B; \mathfrak{p}) = \left(\frac{1}{4} \sum_{\alpha \in \operatorname{Dom} \mathfrak{p}} |\mathfrak{p}(\alpha; {}^\alpha A) - \mathfrak{p}(\alpha; {}^\alpha B)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.123}$$

6.15 Intervalos y líneas de confusión para las métricas α-percentiladas de Minkowski

«Por supuesto que no. Después de todo, puedo estar equivocado.»
—Bertrand Arthur William RUSSELL <*Le preguntaron si estaba dispuesto a morir por sus creencias*>

6.15.1 Intervalos y líneas de confusión asociados a $\mathcal{M}^2$

Consideremos la familia $\mathcal{M}^2 = \{d_p^2 : p \in [1,\infty]\}$ de métricas $[0,1]$-normalizadas de MINKOWSKI. Dados $\langle a,b\rangle \in \mathbb{IR}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, todas las esferas[18] $S_p^2(\langle a,b\rangle, r)$, para $p \in [1,\infty]$, se cortan en cuatro intervalos. Concretamente, para todo $p, p' \in [1,\infty]$:

$$S^2_{(p)}(\langle a,b\rangle, r) \cap S^2_{(p')}(\langle a,b\rangle, r) = \{\langle a \pm r, b \pm r\rangle\} \tag{6.124}$$

Los llamamos r**-intervalos de confusión** asociados a $\mathcal{M}^2$.

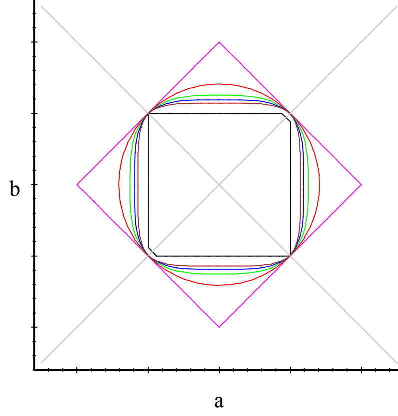


Figura 6.3: *Diferentes esferas de la familia $\mathcal{M}^2$ de métricas $d^2_{(p)}$ $[0,1]$-normalizadas de* MINKOWSKI*, dados un centro, o sea, un intervalo $\langle a,b\rangle \in \mathbb{IR}$, y un radio $r \in \mathbb{R}^+$. Están representadas S_1^2 (rombo), $S^2_{(2)}$ (circunferencia), $S^2_{(3)}$, $S^2_{(4)}$, $S^2_{(5)}$ y $S^2_{(\infty)}$ (cuadrado). Se aprecian las dos únicas r-líneas de confusión $l^2(a,b) \equiv x + y = a + b$ y $ll^2(a,b) \equiv x - y = a - b$.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

Diferentes esferas de la familia $\mathcal{M}^2$ de métricas $d^2_{(p)}$ $[0,1]$-normalizadas de MINKOWSKI, dados un centro, o sea, un intervalo $\langle a,b\rangle \in \mathbb{IR}$, y un radio $r \in \mathbb{R}^+$. Están representadas S_1^2 (rombo), $S^2_{(2)}$ (circunferencia), $S^2_{(3)}$, $S^2_{(4)}$, $S^2_{(5)}$ y $S^2_{(\infty)}$ (cuadrado). Se aprecian las dos únicas r-líneas de confusión $l^2(a,b) \equiv x + y = a + b$ y $ll^2(a,b) \equiv x - y = a - b$.

El conjunto de todos los r-intervalos de confusión, para todo $r \in \mathbb{R}^+$, se obtiene como unión de dos líneas rectas, como podemos apreciar en la Figura 6.3, es decir:

$$\{\langle a \pm r, b \pm r\rangle : r \in \mathbb{R}^+\} = l^2(a,b) \cup ll^2(a,b) \tag{6.125}$$

siendo:

$$l^2(a,b) \equiv x + y = a + b \tag{6.126}$$
$$ll^2(a,b) \equiv x - y = a - b \tag{6.127}$$

Las denominamos r**-líneas de confusión** asociadas a $\mathcal{M}^2$.

Obsérvese que las esferas S_p^2, para $p \in [1,\infty]$, satisfacen una relación dual de encaje creciente, desde S^2_∞ hacia S^2_1. Traducido en magnitudes de medida, esto significa que para todo $1 \le p \le p' \le \infty$:

$$d_1^2 \le d_p^2 \le d_{p'}^2 \le d_\infty^2 \tag{6.128}$$

Pero, ¿qué ocurre con el resto de familias?

[18] Sean (E,d) un espacio métrico, $x_0 \in E$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Una **bola abierta** (o simplemente bola) de centro x_0 y radio r es el conjunto $B(x_0,r) = \{x \in E : d(x,x_0) < r\}$. Una **bola cerrada** de centro x_0 y radio r es el conjunto $B[x_0,r] = \{x \in E : d(x,x_0) \le r\}$. Llamamos **esfera** de centro x_0 y radio r al conjunto $S(x_0,r) = \{x \in E : d(x,x_0) = r\}$. Resulta trivial la relación $S(x_0,r) = B[x_0,r] - B(x_0,r)$.

Si bien la familia $\mathcal{M}^{2*}$, al igual que $\mathcal{M}^2$, tiene asociadas dos r-líneas de confusión, encontraremos que las familias $\mathcal{M}^3$ y $\mathcal{M}_p^*$, así como la superfamilia $\mathcal{M}^*$, tienen asociadas una única r-línea de confusión. Estos resultados no son extensibles al resto de familias $\mathcal{M}^N$, para $N > 3$, $\mathcal{M}^{N*}$, para $N > 2$, y $\mathcal{M}_p$, para las cuales el número de r-líneas de confusión parece ser infinito.

6.15.2 Familia $\mathcal{M}^{2*}$ de métricas no $[0,1]$-normalizadas de Minkowski

Dados $\langle a,b\rangle \in \mathbb{IR}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, la familia $\mathcal{M}^{2*} = \{d_p^{2*} : p \in [1,\infty]\}$ de métricas no $[0,1]$-normalizadas de Minkowski tiene asociados cuatro r-intervalos de confusión. En concreto, para todo $p, p' \in [1,\infty]$:

$$S_{(p)}^{2*}(\langle a,b\rangle, r) \cap S_{(p')}^{2*}(\langle a,b\rangle, r) = \{\langle a \pm r, b\rangle, \langle a, b \pm r\rangle\} \tag{6.129}$$

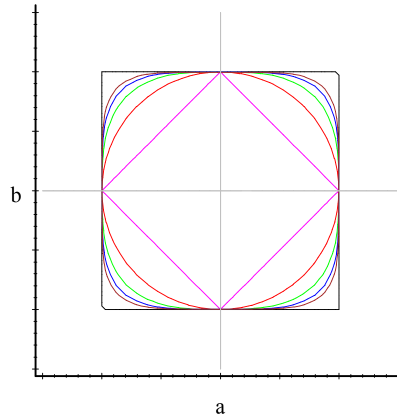


Figura 6.4: *Diferentes esferas de la familia $\mathcal{M}^{2*}$ de métricas $d_{(p)}^{2*}$ no $[0,1]$-normalizadas de Minkowski, dados un centro, o sea, un intervalo $\langle a,b\rangle \in \mathbb{IR}$, y un radio $r \in \mathbb{R}^+$. Están representadas S_1^{2*} (rombo), $S_{(2)}^{2*}$ (circunferencia), $S_{(3)}^{2*}$, $S_{(4)}^{2*}$, $S_{(5)}^{2*}$ y $S_{(\infty)}^{2*}$ (cuadrado). Se aprecian las dos únicas r-líneas de confusión $l^{2*}(a,b) \equiv x = a$ y $ll^{2*}(a,b) \equiv y = b$.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

Las r-líneas de confusión asociadas a $\mathcal{M}^{2*}$ son:

$$l^{2*}(a,b) \equiv x = a \tag{6.130}$$
$$ll^{2*}(a,b) \equiv y = b \tag{6.131}$$

Como se aprecia en la Figura 6.4, las esferas S_p^{2*} $(1 \leq p \leq \infty)$, están encajadas crecientemente, desde S_1^{2*} hacia S_∞^{2*}. Traducido en magnitudes de medida, esto significa que para todo $1 \leq p \leq p' \leq \infty$:

$$d_\infty^{2*} \leq d_{p'}^{2*} \leq d_p^{2*} \leq d_1^{2*} \tag{6.132}$$

6.15.3 Familia $\mathcal{M}^3$ de métricas α-percentiladas $[0,1]$-normalizadas de Minkowski

Dados $\langle a,b\rangle \in \mathbb{IR}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, la familia $\mathcal{M}^3 = \{d_{(p)}^3 : p \in [1,\infty]\}$ tiene asociados dos r-intervalos de confusión; concretamente, para todo $p, p' \in [1,\infty)$:

$$S_{(p)}^3(\langle a,b\rangle, r) \cap S_{(p')}^3(\langle a,b\rangle, r) = \{\langle a+r, b+r\rangle, \langle a-r, b-r\rangle\} \tag{6.133}$$

por lo que $\mathcal{M}^3$ tiene asociada la única r-línea de confusión:

$$l^3(a,b) \equiv x - y = a - b \tag{6.134}$$

como puede apreciarse en la Figura 6.5.

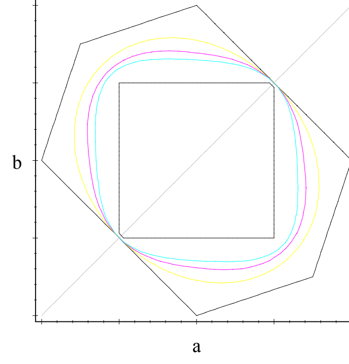


Figura 6.5: *Diferentes esferas de la familia* $\mathcal{M}^3$ *de métricas* $d^3_{(p)}$ $[0,1]$*-normalizadas de* MINKOWSKI*, dados un centro, o sea, un intervalo* $\langle a,b\rangle \in \mathbb{IR}$*, y un radio* $r \in \mathbb{R}^+$*. Están representadas* S^3_1 *(rombo),* $S^3_{(2)}$ *(circunferencia),* $S^3_{(3)}$*,* $S^3_{(4)}$*,* $S^3_{(5)}$ *y* $S^3_{(\infty)}$ *(cuadrado). Se aprecia la única* r*-línea de confusión* $ll^3(a,b) \equiv x - y = a - b$*.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

6.15.4 Familias $\mathcal{M}^*_p$ de métricas α-percentiladas no $[0,1]$-normalizadas de Minkowski

Consideremos, para cualquier $p \in [1,\infty)$, la familia $\mathcal{M}^*_p = \{d^{N*}_{(p)} : N \in \mathbb{Z}^+\}$ de métricas α-percentiladas no $[0,1]$-normalizadas de MINKOWSKI. Dados un intervalo $\langle a,b\rangle \in \mathbb{IR}$ y un radio $r \in \mathbb{R}^+$, la línea de confusión asociada a todas las esferas $S^*(\langle a,b\rangle, r)$, sea cual sea el radio $r \in \mathbb{R}^+$, e independientemente de p, es:

$$l^*(a,b) \equiv x + y = a + b \tag{6.135}$$

De esta forma, dados $p \in [1,\infty)$, $\langle a,b\rangle \in \mathbb{IR}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, la familia $\mathcal{M}^*_p$ tiene asociados, respecto de un centro $\langle a,b\rangle$ y un radio r concretos, dos únicos intervalos de confusión situados sobre la línea $l^*(a,b)$:

$$\left\langle a - \frac{r}{2^{\frac{1}{p}}}, b + \frac{r}{2^{\frac{1}{p}}} \right\rangle \text{ y } \left\langle a + \frac{r}{2^{\frac{1}{p}}}, b - \frac{r}{2^{\frac{1}{p}}} \right\rangle \tag{6.136}$$

esto es, todas las esferas $S^{N*}_{(p)}(\langle a,b\rangle, r)$, para $N \in \mathbb{Z}^+$, se cortan únicamente en esos intervalos —*cfr.* Fig. 6.6.

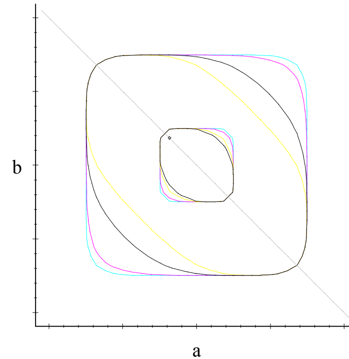


Figura 6.6: *Diferentes esferas* $S^{N*}_{(p)}(\langle a,b\rangle, r)$ *con* $\langle a,b\rangle \in \mathbb{IR}$*, dos radios* $r = 1,7 \in \mathbb{R}^+$*, y* $p = 7$*. Para ambos radios, están representadas* $S^{2*}_{(7)}$*,* $S^{3*}_{(7)}$*,* $S^{4*}_{(7)}$*, y* $S^{5*}_{(7)}$*. Se aprecia la única* r*-línea de confusión* $l^*(a,b) \equiv x + y = a + b$*.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

Diferentes esferas $S^{N*}_{(p)}(\langle a,b\rangle, r)$ con $\langle a,b\rangle \in \mathbb{IR}$, dos radios $r = 1,7 \in \mathbb{R}^+$, y $p = 7$. Para ambos radios, están representadas $S^{2*}_{(7)}$, $S^{3*}_{(7)}$, $S^{4*}_{(7)}$, y $S^{5*}_{(7)}$. Se aprecia la única r-línea de confusión $l^*(a,b) \equiv x + y = a + b$.

6.15.5 Conclusión

Clásicamente se ha utilizado la familia $\mathcal{M}^2$. Pero hemos visto que tiene asociadas dos líneas de confusión. Si bien la familia $\mathcal{M}^{2*}$, al igual que $\mathcal{M}^2$, tiene asociadas dos r-líneas de confusión, hemos visto que las familias $\mathcal{M}^3$ y $\mathcal{M}^*_p$, así como la superfamilia $\mathcal{M}^*$, tienen asociadas una única r-línea de confusión. Estos resultados no son extensibles al resto de familias $\mathcal{M}^N$, para $N > 3$, $\mathcal{M}^{N*}$, para $N > 2$, y $\mathcal{M}_p$, para las cuales el número de r-líneas de confusión parece ser infinito.

Por ello, si deseamos trabajar normalizando en $[0,1]$, podemos usar $\mathcal{M}^3$ (una única línea de confusión asociada). En el caso finito podrá usarse alternativamente cualquier familia $\mathcal{M}^*_p$ (una única línea de confusión asociada). Aunque la superfamilia $\mathcal{M}^* = \{d^{N*}_{(p)} : p \in [1,\infty] \wedge N \in \mathbb{Z}^+\}$ posee una única línea de confusión asociada —*cfr.* §6.15.4—, debemos remarcar que hay subfamilias como $\mathcal{M}^{2*}$ con dos, y en general $\mathcal{M}^{N*}$ $(N > 2)$ con infinitas.

6.15.6 Un último ejemplo que pretende seguir ilustrando

Imaginemos que un cierto atributo cuantitativo de un prototipo está representado por el intervalo $A = \langle .30, .50\rangle$. Sean los intervalos $J_1 = \langle .25, .35\rangle$, $J_2 = \langle .21, .37\rangle$ y $J_3 = \langle .21, .63\rangle$, las representaciones del mismo atributo para tres patrones de entrada diferentes. ¿Qué patrón preferiremos, según el criterio de la mínima disimilitud con respecto al prototipo? Si la disimilitud es la métrica $d^2_{(2)}$, resulta que todos ellos distan lo mismo de $I = \langle .3, .5\rangle$.

$d^2_{(2)}(A,\cdot)$		
J_1	J_2	J_3
$80^{-1/2}$	$80^{-1/2}$	$80^{-1/2}$

Tabla 6.7: *Confusión de* $J_1 = \langle .25, .35\rangle$, $J_2 = \langle .21, .37\rangle$ *y* $J_3 = \langle .21, .63\rangle$ *respecto de la métrica* $d^2_{(2)}$.
—*Fuente:* Elaboración propia.

Consideremos la gráfica de la curva correspondiente a $d^2_{(2)}(I, \langle x(y), y\rangle)$, siendo $\langle x(y), y\rangle$ un intervalo genérico en alguna esfera $S^2_{(2)}(I, r)$ —*cfr.* Fig. 6.7—. Concretamente en esta gráfica, $r^2 = 1/80$, $x(y) = 3/10 \pm \sqrt{y - y^2 - 9/40}$, con $y \in (.5 - 1/\sqrt{80}, .5 + 1/\sqrt{80})$, esto es, el recorrido euclideo en ordenadas de la esfera $S^{2*}_{(2)}(\langle .3, .5\rangle, 1/\sqrt{40}))$.

Las abcisas de la gráfica son los puntos extremos derechos de los intervalos $\langle x(y), y\rangle$. Como estamos representando las distancias $d^2_{(2)}$ de todos los puntos de una esfera $S^2_{(2)}$ a su centro, es evidente que la función es constante e igual al radio de la esfera, $1/\sqrt{80} = .111\,8034$ —*cfr.* Fig. 6.7.

Si la familia de métricas se restringe a las de MINKOWSKI, $\mathcal{M}^2 = \{d^2_{(p)} : p \in [1,\infty)\}$ o $\mathcal{M}^{2*} = \{d^{2*}_{(p)} : p \in [1,\infty)\}$, entonces no podremos discriminar entre los intervalos $J_2 = \langle .21, .37\rangle$ y $J_3 = \langle .21, .63\rangle$, al tratarse de un caso de dilatación lateral —*cfr.* Tabla 6.8.

	$d^{2*}_{(p)}(A,\cdot)$ y $d^2_{(p)}(A,\cdot)$		
	J_1	J_2	J_3
$d^{2*}_{(p)}$	$(.0\,5^p + .\,15^p)^{\frac{1}{p}}$	$(.0\,9^p + .\,13^p)^{\frac{1}{p}}$	$(.0\,9^p + .\,13^p)^{\frac{1}{p}}$
$d^2_{(p)}$	$\left(\frac{.0\,5^p + .\,15^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$	$\left(\frac{.0\,9^p + .\,13^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$	$\left(\frac{.0\,9^p + .\,13^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$

Tabla 6.8: *Indiscriminabilidad de* J_2 *y* J_3 *usando métricas de* $\mathcal{M}^2$ *o* $\mathcal{M}^{2*}$.
—*Fuente:* Elaboración propia.

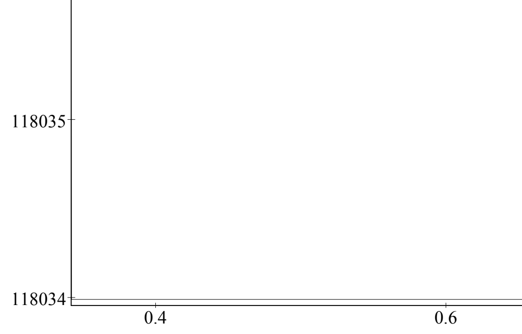


Figura 6.7: *Función distancia* $d^2_{(2)}$ *de los puntos de la esfera* $S^{2*}_{(2)}(\langle .3, .5\rangle, 1/\sqrt{40})$ *a su centro, esto es, desde los puntos* $(\langle x(y), y\rangle)$ *a* $\langle .3, .5\rangle$*, siendo* $x(y) = 3/10 \pm \sqrt{y - y^2 - 9/40}$*, con* $y \in (.5 - 1/\sqrt{80}, .5 + 1/\sqrt{80})$*.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

Puede apreciarse esto también, observando la gráfica —*cfr.* Fig. 6.8— de la curva correspondiente a $d^2_{(3)}(I, \langle x(y), y\rangle)$, siendo $\langle x(y), y\rangle$ un intervalo genérico en alguna esfera $S^2_{(2)}(I, r)$ (concretamente, las mismas hipótesis que en la Figura 6.7). Aparece destacado el caso de ambigüedad comentado entre los intervalos $J_2 = \langle .21, .37\rangle$ y $J_3 = \langle .21, .63\rangle$.

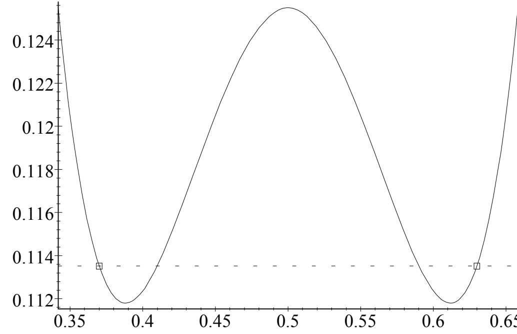


Figura 6.8: *Gráfica de* $d^2_{(3)}(I, \langle x(y), y\rangle)$ *con* $\langle x(y), y\rangle \in \mathbb{IR}$*, un intervalo genérico en alguna esfera* $S^2_{(2)}(I, r)$*, siendo* $I = \langle .3, .5\rangle$ *(mismas hipótesis que en la Fig. anterior). Los puntos destacados son los intervalos* $J_2 = \langle .21, .37\rangle$ *y* $J_3 = \langle .21, .63\rangle$*.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

Este resultado genera un orden confuso de preferencias, a saber:

$$J_2 \asymp J_3 \succ J_1 \tag{6.137}$$

Consecuentemente, pudiera proponerse cambiar de familia de métricas, concretamente, según comentábamos al finalizar la sección anterior, a $\mathcal{M}^3$. Eligiendo entre sus miembros, la métrica siguiente en coste computacional, $d^3_{(2)}$, se consigue romper la ambigüedad (confusión) anterior entre los intervalos $J_2 = \langle .21, .37\rangle$ y $J_3 = \langle .21, .63\rangle$ —*cfr.* Tabla 6.9, situación representada en la Fig. 6.9 por los puntos marcados con un pequeño cuadrado.

El orden de preferencia generado ya no es confuso:

$$J_3 \succ J_1 \succ J_2 \tag{6.138}$$

$d^3_{(2)}(A,\cdot)$		
J_1	J_2	J_3
$\frac{1}{300}\sqrt{1050}$	$\frac{1}{300}\sqrt{1113}$	$\frac{1}{300}\sqrt{762}$

Tabla 6.9: *Rompimiento de la confusión entre* $J_1 = \langle .25, .35\rangle$, $J_2 = \langle .21, .37\rangle$ *y* $J_3 = \langle .21, .63\rangle$ *respecto de la métrica* $d^2_{(2)}$, *con la métrica* $d^3_{(2)}$.
—*Fuente:* Elaboración propia.

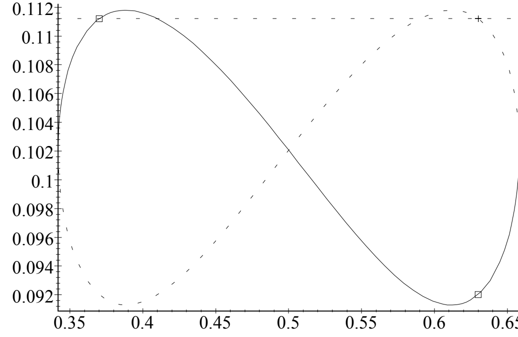


Figura 6.9: *Gráfica de* $d^3_{(2)}(I, \langle x(y), y\rangle)$ *con* $\langle x(y), y\rangle \in \mathbb{IR}$, *un intervalo genérico en alguna esfera* $S^2_{(2)}(I, r)$, *siendo* $I = \langle .3, .5\rangle$ *(mismas hipótesis que en las gráficas precedentes). Los puntos destacados son los intervalos* $J_2 = \langle .21, .37\rangle$ *y* $J_3 = \langle .21, .63\rangle$. *La gráfica punteada corresponde a* $d^3_{(2)}(I, \langle x(y), y\rangle)$ *con* $x(y) = 3/10 + \sqrt{y - y^2 - 9/40}$.
—*Fuente:* Elaboración propia.

Obsérvese que según (6.133), para $\langle .21, .37\rangle$ respecto de $\langle .3, .5\rangle$ y de un radio r, el intervalo no discriminable es $\langle .39, .63\rangle$, mientras que para $\langle .25, .35\rangle$ es $\langle .35, .65\rangle$. Por tanto, cualquiera de las demás métricas de $\mathcal{M}^3$ asignaría este mismo orden de preferencia.

Cambiar de las familias clásicas de Minkowski $\mathcal{M}^2$ y $\mathcal{M}^{2*}$ a $\mathcal{M}^3$, implica:

- Una reducción de la clase de intervalos no discriminables[19] según la familia utilizada.
- Una pérdida de confusión (una ganancia de información): de dos líneas se pasa a una única.

6.16 Métrica de Hausdorff α-percentilada

Sean $A = [0, 2]$, $B = [3, 4]$ y $C = [3, 5]$, entonces $d_{(1)}(A, B) = 2.5$ y $d_{(1)}(A, C) = 3$, pero $H(A, B) = H(A, C) = 3$. Nuestra intuición parece estar más de acuerdo con el valor que poporciona $d_{(1)}$. Nuestro objetivo es modificar convenientemente la métrica de Hausdorff, para evitar ese inconveniente.

Para hacerlo posible, usaremos los α-percentiles. Sea X un conjunto de números reales, $x_1 = \inf X$, y $x_2 = \sup X$. Consideremos su intervalo cerrado asociado $\hat{X} = [x_1, x_2]$, y *«percentilémoslo»*. Definimos el α-*supremo* de X, y denotemos por $\mathrm{Sup}^{(\alpha)}X$ o simplemente $X^{(\alpha)}$, como el α-percentil en $\hat{X}$. De manera similar, definimos el α-ínfimo de X, denotándolo mediante ${}^{(\alpha)}X$ o simplemente $X_{(\alpha)}$, como el $(1-\alpha)$-percentil en $\hat{X}$.

[19] Existen intervalos no discriminables por ninguna de las métricas propuestas. Como vemos en la Fig. 6.9 (observando la recta horizontal), hay un intervalo $\langle \cdot, .63\rangle$ cuya distancia a $\langle .3, .5\rangle$ es la misma que la correspondiente a $\langle .21, .37\rangle$. Tal intervalo es $\langle .39, .63\rangle$. Para estos pares de intervalos $(\langle .3, .5\rangle, \langle .21, .37\rangle)$ y $(\langle .3, .5\rangle, \langle .39, .63\rangle)$, sucede que cualquiera de las métricas relatadas en este trabajo asigna el mismo valor:

$$\begin{aligned} d^{N*}_{(p)}(\langle .3, .5\rangle, \cdot) &= \left(.0\,9^p + \sum_{j=1}^{N-2}\left(.\,22\left|\frac{j}{N-1}\right|\right)^p + .\,13^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= N^{\frac{1}{p}} d^N_{(p)}(\langle .3, .5\rangle, \cdot) \end{aligned}$$

Así, $X^{(0)} = X_{(1)} = \inf X$,y $X^{(1)} = X_{(0)} = \sup X$. Cuando trabajamos conjuntamente con un α-sup y un β-inf,quizás debieran satisfacer $X_{(\beta)} \leq X^{(\alpha)}$.

Definición 93 *Definimos la* ***distancia*** α***-percentilada de*** **Hausdorff**, *mediante:*

$$H^{(\alpha)}_{(\beta)}(A,B) = \max\{\delta^{(\alpha)}_{(\beta)}(A,B), \delta^{(\alpha)}_{(\beta)}(B,A)\} \tag{6.139}$$

donde:

$$\delta^{(\beta)}_{Y}(x) = \inf^{(\beta)}_{y\in Y} d(x,y) \tag{6.140}$$

siendo $d(x,y)$ *una distancia y estando la* distancia dirigida *definida por:*

$$\delta^{(\alpha)}_{(\beta)}(X,Y) = \sup^{(\alpha)}_{x\in X} \delta^{(\beta)}_{Y}(x) \tag{6.141}$$

Si A, B y C, son los intervalos del ejemplo anterior, $H^{(1)}_{(.5)}(A,B) = 3.5$, y $H^{(1)}_{(.5)}(A,C) = 4$.

Propuestas anteriores de distancias de Hausdorff modificadas, la *Partial HD* —*cfr.* Huttenlocher, Klanderman y Rucklidge [707]; Rucklidge [708]—, la *MHD* —*cfr.* Dubuisson y Jain [709]—, y la *CHD* —*cfr.* Azencott, Durbin y Paumard [710]—, pueden verse como casos particulares de la nuestra. Estos autores consideran sólamente conjuntos finitos y valores ordenados de $d\,(x,y)$ y $\delta_Y(x)$, y no percentiles ni extremos, o sea, que los únicos α-percentiles en su propuesta, son elementos de los conjuntos. La motivación de tales definiciones es la alta sensibilidad de la distancia de Hausdorff con respecto a los más atípicos (*outliers*), incluso para uno sólo de estos.

Pero tales propuestas son demasiado «rotundas». Por ejemplo, si $A = \{1,2,3\}$ y $B = A \cup \{5\}$, entonces el conjunto de los ínfimos de las distancias entre A y B se reduce a $\{0,2\}$, de donde $H(A,B) = 2$, y si ordenamos, cualquiera de las propuestas de estos autores caerá bruscamente a cero. En cambio, si percentilamos, $H^{(\alpha)}_{(\beta)}(A,B)$ irá suavemente hacia cero.

Sin embargo, en el ejemplo con el que comenzamos esta sección, el percentilado no distingue necesariamente respecto a la propiedad de ser concéntrico:

$H^{(1)}_{(.5)}(\langle 0,3\rangle, J)$			
$\langle 1,2\rangle$	$\langle 1,4\rangle$	$\langle -1,2\rangle$	$\langle -1,4\rangle$
1.5	2.5	2.5	2.5

Esto se debe a la distancia d que interviene en la definición de $\delta(X,Y)$ —*cfr.* Ec. 6.44—. El motivo es que en la pareja $(\langle 0,3\rangle, \langle 1,4\rangle)$ el cero genera el intervalo de distancias $[1,4]$, en la pareja $(\langle 0,3\rangle, \langle -1,2\rangle)$ el 3 genera el mismo intervalo $[1,4]$, y en la pareja $(\langle 0,3\rangle, \langle -1,4\rangle)$ tanto el 0 como el 3 generan de nuevo el intervalo de distancias $[1,4]$. Esto es independiente de los operadores $\sup^{(\alpha)}_{x\in X}$ e $\inf^{(\alpha)}_{y\in Y}$, cuya actuación es posterior, sobre dicho intervalo $[1,4]$. Es obvio que se hace necesaria una investigación futura sobre este punto.

6.17 α-percentilado de otras medidas de comparación

En la sección §6.9 se examinaron otras nueve medidas de comparación. Todas ellas son susceptibles de ser α-percentiladas. Por ejemplo, las correspondientes α-percentiladas por $\{0,1/2,1\}$ para la disimilitud de *Canberra*, la de Bray y Curtis y la de Czekanowski y el índice de similitud *separación angular*, son:

$$d^3_{\text{Canberra}}(I,J) = \frac{|i_0 - j_0|}{i_0 + j_0} + \frac{|i_{1/2} - j_{1/2}|}{i_{1/2} + j_{1/2}} + \frac{|i_1 - j_1|}{i_1 + j_1} \tag{6.142}$$

$$d^3_{\text{Bray-Curtis}}(I,J) = \frac{|i_0 - j_0| + |i_{1/2} - j_{1/2}| + |i_1 - j_1|}{i_0 + j_0 + i_{1/2} + j_{1/2} + i_1 + j_1} \tag{6.143}$$

$$d^3_{\text{Czekanowski}}(I,J) = 1 - \frac{2\left(\min(i_0,j_0) + \min\left(i_{1/2},j_{1/2}\right) + \min(i_1,j_1)\right)}{i_0 + j_0 + i_{1/2} + j_{1/2} + i_1 + j_1} \tag{6.144}$$

$$s^3_{\text{SepAng}}(I,J) = \frac{i_0 j_0 + i_{1/2} j_{1/2} + i_1 j_1}{\left(i_0^2 + i_{1/2}^2 + i_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(j_0^2 + j_{1/2}^2 + j_1^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{6.145}$$

Pero en las experiencias llevadas a cabo no se aprecian ventajas en el uso de los percentilados para ninguna de las nueve medidas revisadas en §6.9.

6.18 Disimilitudes α-percentiladas y ponderadas de Minkowski

6.18.1 Medias cuasi-aritméticas ponderadas

Quizás la manera más sencilla de agregar información, sin ninguna información a priori, sea mediante una **media aritmética** $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Y tampoco parece muy difícil imaginar trabajar con una **media aritmética ponderada**, esto es, $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i$, con $w_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Existen otras medias, como la geométrica, armónica y cuadrática, pero tods ellas son casos especiales de las conocidas como **medias cuasi-aritméticas** —*cfr.* Kolmogorov [711]; Aczél [712]; Fodor y Roubens [713].

Definición 94 *Sean $n \in \mathbb{N}$, y n valores reales $x_1, \ldots, x_n$. Sea φ una función continua y estrictamente monótona en el compacto $[\inf\{x_1, \ldots, x_n\}, \sup\{x_1, \ldots, x_n\}]$. Se define la **media cuasi-aritmética** de $x_1, \ldots, x_n$ como:*

$$\mathfrak{M}_{\varphi}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\right) \tag{6.146}$$

Esta familia fue caracterizada por Kolmogoroff [711] como la clase de todos los operadores de media (*averaging operators*) conmutativos y descomponibles[20]. Obsérvese también que las medias cuasi-aritméticas son idempotentes.

La Definición 94 puede extenderse fácilmente a ponderaciones no uniformes (familias de índices ponderales distintos). Veámoslo:

Definición 95 *Sean $n \in \mathbb{N}$, y n valores reales $x_1, \ldots, x_n$. Sea φ una función continua y estrictamente monótona en el compacto $[\inf\{x_1, \ldots, x_n\}, \sup\{x_1, \ldots, x_n\}]$. Se define la φ-media ponderada de $x_1, \ldots, x_n$ como:*

$$\mathfrak{M}_{\varphi,w}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\varphi(x_i)\right) \tag{6.149}$$

donde $w = \{w_i : i \in \mathbb{N}_n\}$, siendo $w_i > 0$ y $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. También se dice que $\mathfrak{M}_{\varphi,w}(x_1, \ldots, x_n)$ es la media con índice ponderal w de los valores $x_1, \ldots, x_n$.

La *media de orden r* (o **media generalizada**) es la φ-media correspondiente a $\varphi(x) = x^r$:

$$\mathfrak{M}_r(X, w) = \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} w_i x_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \tag{6.150}$$

si para todo $i \in \mathbb{N}_n$, $r = 1$ y $w_i = 1/n$, se tiene la *media aritmética*, $\mathfrak{A}(X) = \mathfrak{M}_1(X, 1/n)$. Si para todo $i \in \mathbb{N}_n$, $r = -1$ y $w_i = 1/n$, se tiene la *media armónica*, $\mathfrak{H}(X) = \mathfrak{M}_{-1}(X, 1/n)$. Suele llamarse *media cuadrática* (resp., media cuadrática ponderada) a $\mathfrak{Q}(X) = \mathfrak{M}_2(X, 1/n)$ (resp., $\mathfrak{Q}(X, w) = \mathfrak{M}_2(X, w)$)).

La *media geométrica* (resp., media geométrica ponderada) es $\mathfrak{G}(X) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$ (resp., $\mathfrak{G}(X, w) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i}\right)^{1/\sum_{i=1}^{n} w_i}$). Las medias geométricas, bien pueden definirse por separado —*cfr.* Hardy, Littlewood y Pólya [714]—, bien pueden verse como φ-medias ($\varphi(x) = \ln x$), suponiendo que los valores son positivos,

[20] Una **operación de media** (*«averaging operation»*) es cualquier operación de agregación de los elementos de $X = \{x_1, ..., x_n\}$, tal que el resultado está comprendido entre el $\inf X$ y el $\sup X$.

Conmutatividad (simetría, neutralidad, anonimato):

$$h(x_1, ..., x_n) = h(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) \tag{6.147}$$

para cualquier permutación $\sigma : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$.

Descomponibilidad (Kolmogoroff [711]):

$$h^{(n)}(x_1, ..., x_n) = h^{(n)}(x, \overbrace{\ldots}^{k \text{ veces}}, x, x_{k+1}, ..., x_n) \tag{6.148}$$

donde $x = h^{(n)}(x_1, ..., x_k)$.

Idempotencia: $h(x, ..., x) = x$.

y también puede demostrarse —*cfr.* Calot [715]— que son $\mathfrak{G}(X) = \mathfrak{M}_0(X, 1/n)$ y $\mathfrak{G}(X, w) = \mathfrak{M}_0(X, w)$, suponiendo la continuidad en r del funcional $\mathfrak{M}_r$.

Obsérvese que el centro de gravedad de φ es $(\mathfrak{M}_1(X, w), \varphi(\mathfrak{M}_\varphi(X, w)))$. Si φ es tal que sus dos primeras derivadas φ' y φ'' son de signo constante, entonces el centro de gravedad está situado necesariamente en la concavidad de la curva, y por ello, $\mathfrak{M}_\varphi(X, w) \gtreqless \mathfrak{M}_1(X, w)$, precisamente si $\varphi'(x)\varphi''(x) \gtreqless 0$ (si $\forall i, j \in \mathbb{N}_n, x_i = x_j$, entonces $\mathfrak{M}_\varphi(X, w) = \mathfrak{M}_1(X, w) = x$).

Sean φ y ψ funciones continuas y estrictamente monótonas en $\mathbb{R}$, entonces —*cfr.* Hardy, Littlewood y Pólya [714]:

1. $\forall k \in \mathbb{R}^+, \mathfrak{M}_\varphi(kX, w) = k\mathfrak{M}_\varphi(X, w)$, siendo $kX = \{kx_i : i \in \mathbb{N}_n\}$;
2. $\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall b \in \mathbb{R}, (\mathfrak{M}_\psi(X, w) = \mathfrak{M}_\varphi(X, w) \iff \psi = a\varphi + b)$;
3. $\mathfrak{M}_\psi(X, w) \leq \mathfrak{M}_\varphi(X, w) \iff \varphi \circ \psi^{-1}$ es convexa, en particular, $\mathfrak{M}_r(X, w) \leq \mathfrak{M}_s(X, w)$, si $r < s$ (es decir, $\mathfrak{M}_r$ es una función creciente en r).
4. Si r varía desde $-\infty$ a $+\infty$, $\mathfrak{M}_r$ varía de manera continua desde el $\inf X$ al $\sup X$ (o sea, que todo valor comprendido entre los extremos $\inf X$ y $\sup X$, es una media de orden r particular).

Puede extenderse la noción de φ-media tanto a conjuntos numerables de valores y pesos, suponiendo que convergen los respectivos productos y series, como a valoraciones de funciones —*cfr.* Hardy, Littlewood y Pólya [714]—. Por ejemplo, si para todo $x \in [a, b]$, $w(x) > 0$ y además, $f(x) \geq 0$ casi en todas partes, entonces:

$$\mathfrak{M}_\varphi(f, w) = \frac{\varphi^{-1}\left(\int_a^b w(x)\varphi(f(x))\,dx\right)}{\int_a^b w(x)dx} \tag{6.151}$$

También se satisface:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \leq \mathfrak{M}_\varphi(f, w)\int_a^b w(x)dx \tag{6.152}$$

o sea, que:

$$\varphi\left(\int_a^b w(x)f(x)dx\right) \leq \int_a^b w(x)\varphi(f(x))\,dx \tag{6.153}$$

6.18.2 Disimilitudes α-percentiladas y ponderadas de Minkowski

Definición 96 *Sean $I, J \in \mathbb{IR}$, tales que $I = \langle i_0, i_1\rangle$ y $J = \langle j_0, j_1\rangle$, ambos α-percentilados por $\mathfrak{p}$. Definimos la disimilitud $d_w^\varphi(I, J)$ como la φ-media del conjunto $\{|\Delta_\alpha^{I,J}| : \alpha \in \mathfrak{p}\}$, esto es como la solución de:*

$$\varphi(d_w^\varphi(I, J)) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{p}} w(\alpha)\varphi\left(\left|\Delta_\alpha^{I,J}\right|\right) \tag{6.154}$$

donde $\sum_{\alpha\in\mathfrak{p}} w(\alpha) = 1$, $\Delta_\alpha^{I,J}$ está definido por (6.86) y $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ es una función continua y monótona en $\mathbb{R}_0^+$. En el caso numerable, exigimos la convergencia de la serie.

Ejemplo 97 *Si $\varphi(x) = x^p$ y $\mathfrak{p} = \mathfrak{u}$, podemos definir la familia $\mathcal{M}^w$ de disimilitudes α-percentiladas y ponderadas de* Minkowski*, las cuales son:*

$$d_{(p)}^w(I, J) = \left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{u}} w(\alpha)\left|\Delta_\alpha^{I,J}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.155}$$

para $1 \leq p < \infty$, y $d_{(\infty)}^w(I, J) = \lim_{p\to\infty} d_{(p)}^w(I, J)$.

La familia $\mathcal{M}_w^1$ de métricas ponderadas de Minkowski es:

$$d_{p,w}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n w_i|x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \tag{6.156}$$

donde x e y representan las descripciones –por n variables numéricas– de dos objetos del universo y $1 \leq p < \infty$. En los casos $p = 1$ y $p = 2$ reconocemos las distancias del valor absoluto (Manhattan, *box-car*, taxista, *city-block*, HAMMING) y euclidea, respectivamente. Se verifica que si $2 < q < p < \infty$, entonces $d_\infty \leq d_p \leq d_q \leq d_2 \leq d_1$, siendo $d_\infty = \lim_{p\to\infty} d_p$.

Obsérvese que $\mathcal{M}^w$ es una generalización de $\mathcal{M}$. Esta última es el caso particular en que la distribución de pesos w es uniforme en $[0, 1]$, esto es, cuando para todo $\alpha \in \mathfrak{u}$, $w(\alpha) = |\mathfrak{u}|^{-1}$ (pero $\mathcal{M}^w$ no generaliza $\mathcal{M}^*$).

Podemos extender la Definición 96 al caso continuo.

Definición 98 *Sean $I, J \in \mathbb{IR}$, tales que $I = \langle i_0, i_1\rangle$ y $J = \langle j_0, j_1\rangle$, si w es una medida ponderada normalizada de* LEBESGUE *en* $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$*, y si $\varphi\left(\left|\Delta_\alpha^{I,J}\right|\right)$ es w-integrable, definimos una disimilitud entre I y J como la solución $d_w^\varphi(I,J)$ de la ecuación integral:*

$$\varphi\left(d_w^\varphi(I,J)\right) = \int_0^1 \varphi\left(\left|\Delta_\alpha^{I,J}\right|\right) dw(\alpha) \tag{6.157}$$

dado que la integral exista y que $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ sea continua y monótona en $\mathbb{R}_0^+$.

La expresión (6.157) depende de la definición de w, no existiendo una solución general a la integral propuesta. Si $\xi(\alpha)$ es la derivada de RADON (Johann) - NIKODYM (Otton Marcin) de la medida w, o sea, si $\xi(\alpha) = dw(\alpha)/d\alpha$, entonces:

$$\varphi\left(d_w^\varphi(I,J)\right) = \int_0^1 \xi(\alpha)\varphi\left(\left|\Delta_\alpha^{I,J}\right|\right) d\alpha \tag{6.158}$$

Si $\xi(\alpha)$ no es suficientemente conocida como para poder especificar un modelo particular para ella, sin ninguna ambigüedad, parece que estemos obligados a postular alguna clase de descripción «en forma libre» de ξ. Una forma apropiada de hacerlo es describirla como combinación de M funciones básicas $\{\eta_k(\alpha)\}$ —*cfr.* SIVIA [716]:

$$\xi(\alpha) \simeq \sum_{k=1}^{M} c_k \eta_k(\alpha) \tag{6.159}$$

(por ejemplo, si $\eta_k(\alpha) = (\alpha - \alpha_0)^{k-1}$, la «forma libre» es una serie de TAYLOR).

Una elección adecuada de la familia $\{\eta_k(\alpha)\}$ dependerá de la naturaleza del problema, sin embargo, un objetivo fundamental es conseguir que la aproximación se realice con pocas funciones básicas auxiliares, esto es, con un M pequeño.

Una manera ingenua de aproximarnos a la globalidad de la información aportada por la totalidad de los α-percentiles, con $\alpha \in [0, 1]$, en ausencia de información a priori, es recurrir al principio de razón insuficiente de LAPLACE [717], y considerar un α-percentilado $\mathfrak{p}$, distribuyendo así uniformemente (equidistanciados según la distancia euclidea) un número pequeño $M \geq 2$, de α-percentiles, en los intervalos:

$$\xi(\alpha) \simeq \sum_{k=1}^{M} c_k \delta(\alpha - \alpha_k) \tag{6.160}$$

donde $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_M = 1$ (condición de α-percentilado).

Ejemplo 99 *La familia de disimilitudes α-percentiladas y ponderadas de* MINKOWSKI*, se obtiene para $\varphi(x) = x^p$ y la aproximación (6.160) de $\xi(\alpha)$ en (6.158):*

$$d_{(p)}^w(I,J) = \left[\int_0^1 \left|\Delta_\alpha^{I,J}\right|^p \left(\sum_{k=1}^{M} c_k \delta(\alpha - \alpha_k)\right) d\alpha\right]^{\frac{1}{p}} \tag{6.161}$$

Obsérvese que exigiendo la normalización $\sum_{k=1}^{M} c_k = 1$, entonces $\mathcal{M}^w$ generaliza $\mathcal{M}$ también en el caso continuo —*cfr.* Ec. 6.92.

El valor de cada uno de los c_k depende del problema. Por ejemplo, si la medición proviene de un sensor, la distribución estimada de la toma de datos es aproximadamente normal, y sólo se consideran tres puntos, los dos extremos y el punto medio, parece razonable asignar mayor peso al punto medio que a los extremos. En todo caso, puede parecer razonable asignar mayor peso a las modas.

6.18.3 Cómputo de las disimilitudes α-percentiladas y ponderadas de Minkowski

Sean $\Delta_*^{I,J} = \Delta_1^{I,J} - \Delta_0^{I,J}$, $\alpha_* = -\Delta_0^{I,J} \big/ \Delta_*^{I,J}$, $\gamma(x) = -\operatorname{signum}(x)$, entonces la Ec. 6.92 puede reescribirse:

$$d_{(p)}(I,J) = \left[\gamma\left(\Delta_0^{I,J}\Delta_*^{I,J}\right)\left\{\int_0^{\alpha_*}\left(\Delta_0^{I,J} + \alpha\Delta_*^{I,J}\right)^p d\alpha + \int_{\alpha_*}^1 \left(-\Delta_0^{I,J} - \alpha\Delta_*^{I,J}\right)^p d\alpha\right\}\right]^{\frac{1}{p}} \tag{6.162}$$

de donde, si $\Delta_*^{I,J} \neq 0$, o sea, si $\Delta_0^{I,J} \neq \Delta_1^{I,J}$:

$$d_{(p)}(I,J) = -\frac{\gamma\left(\Delta_0^{I,J}\Delta_*^{I,J}\right)}{(p+1)\,\Delta_*^{I,J}}\left(\left(\Delta_0^{I,J}\right)^{p+1} + (-1)^{p+1}\left(\Delta_1^{I,J}\right)^{p+1}\right) \tag{6.163}$$

De aquí que la Ec. (6.161) se reduzca a[21]:

$$d_{(p)}^{w}(I,J) = \left[\gamma(\Delta_0^{I,J}\Delta_*^{I,J})\left\{\sum_{k\in K_*^-} c_k\left(\Delta_0^{I,J} + \alpha_k\Delta_*^{I,J}\right)^p + \sum_{k\in K_*^+} c_k\left(-\Delta_0^{I,J} - \alpha_k\Delta_*^{I,J}\right)^p\right\}\right]^{\frac{1}{p}} \tag{6.165}$$

donde $K_*^- = \{k : \alpha_k < \alpha_*\}$ y $K_*^+ = \{k : \alpha_k > \alpha_*\}$, con $k \in \{1, \ldots, M\}$.

6.19 Las φ-distancias

El objetivo de esta sección es encontrar condiciones suficientes en el caso finito, para que la disimilitud α-percentilada y ponderada propuesta $d_w^{\varphi}(I,J)$, la solución de la Ec. 6.154 sea:

1. una pseudodistancia (Teorema 100.*i*),
2. una distancia (Teorema 100.*ii*), y
3. una métrica (Teorema 108),

en el espacio de intervalos considerado.

Teorema 100 *Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva y consideremos la disimilitud α-percentilada y ponderada $d_w^{\varphi}(I,J)$, solución de:*

$$\varphi\left(d_w^{\varphi}(I,J)\right) = \sum_{\alpha=1}^{N} w(\alpha)\varphi\left(\left|i_{(\alpha)} - j_{(\alpha)}\right|\right)$$

i) Si $\varphi(0) = 0$, entonces $d_w^{\varphi}(I,J)$ es una pseudodistancia.

ii) Si $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$, y φ es no negativa en $[0,+\infty)$, $d_w^{\varphi}(I,J)$ es una distancia *(que llamaremos φ-distancia).*

[21] Fue a principios de los años 30 cuando P. A. M. Dirac [718] desarrolló un método para tratar con funciones impulsivas (funciones que son idénticamente nulas excepto para un intervalo muy corto de tiempo, siendo su integral no nula en tal intervalo). El argumento de Dirac permite definir la función $\delta(x)$ por la propiedad

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0) = \begin{cases} f(x_0) & si\ x_0 \in (a,b) \\ 0 & si\ x_0 \notin (a,b) \end{cases} \tag{6.164}$$

para cualquier función $f(x)$ continua en $x = x_0$. Esta definición, utilizada y justificada intuitivamente por Dirac [718], evita hacer referencia a la **teoría de distribuciones** (o *funciones generalizadas*) —*cfr.* Cohen-Tannoudji, Diu y Laloë [719] o el de Messiah [720]— y a la notación más correcta $\delta_{x_0}[f]$, en vez de $\delta(x-x_0)$.

En 1936, Sóbolev [721] fundamenta matemáticamente las distribuciones (al resolver el *problema de* Cauchy para ecuaciones hiperbólicas). A finales de los 40, el matemático francés Laurent Schwartz expone sistemáticamente la teoría de distribuciones [722, 723], indicando un buen número de aplicaciones.

El eje principal de la teoría de distribuciones es el *reconocimiento de una función a partir de su efecto en otras funciones*, y no a partir de los valores en diferentes puntos, como es lo clásico. Esto es fiel reflejo de un hecho físico: la imposibilidad de medir el valor de una magnitud física en un punto; lo posible es medir valores medios en entornos pequeños del punto. Pueden consultarse también ciertos tratados de Mecánica Cuántica como el de Cohen-Tannoudji, Diu y Laloë [719] o el de Messiah [720].

Obsérvese que el paso de (6.161) a (6.165) se basa en la propiedad (6.164).

Demostración. La φ-disimilitud es simétrica, debido al valor absoluto presente en su definición. Además, φ debería ser invertible, o al menos pseudo-invertible.

i) Si $I = J$ entonces, por ser $\varphi(0) = 0$ y φ biyectiva:

$$\begin{aligned} d_w^{\varphi}(I,J) &= \varphi^{-1}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} w(\alpha)\varphi(0)\right) \\ &= \varphi^{-1}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ii) Si $d_w^{\varphi}(I,J) = \varphi^{-1}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} w(\alpha)\varphi\left(\left|i_{(\alpha)} - j_{(\alpha)}\right|\right)\right) = 0$, entonces como para todo $x \geq 0$, $\varphi(x) \geq 0$, y los índices ponderales $w(\alpha) \geq 0$ son arbitrarios, para todo α, se tiene $\varphi\left(\left|i_{(\alpha)} - j_{(\alpha)}\right|\right) = 0$
$I = J$.

Debido a *ii)*, d_w^{φ} es una distancia de Birkhoff. ■

6.19.1 Una subclase de φ-métricas basada en subaditividad

En este apartado y en el siguiente aportamos condiciones suficientes para que $d_w^{\varphi}(I,J)$ sea una métrica. Previamente necesitamos los conceptos de función subaditiva y superaditiva y de cuasi-inversa de una función.

Definición 101 *Una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es* ***subaditiva***[22] *si $\forall x, y \in \operatorname{Dom} f$:*

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \tag{6.166}$$

y ***superaditiva*** *si $\forall x, y \in \operatorname{Dom} f$:*

$$f(x) + f(y) \leq f(x+y) \tag{6.167}$$

Ejemplo 102 *Funciones subaditivas son por ejemplo $|x|$, x^p $(0 < p \leq 1)$, $\frac{x}{x+1}$, $|\sin x|$, $\min\{1, |x|\}$, $\max\{1, |x|\}$, $\arctan |x|$, así como cualquier función constante.*

Definición 103 *Una función g es una* ***cuasi-inversa*** *de otra función f, si la restricción de f a $\operatorname{Ran} f$ es una inversa por la derecha de f, siendo su rango igual al de g, o sea, si*[23]*:*

$$f \circ g \circ id_{\operatorname{Ran} f} = id_{\operatorname{Ran} f} \qquad y \qquad \operatorname{Ran}(g \circ id_{\operatorname{Ran} f}) = \operatorname{Ran} g \tag{6.168}$$

Dos propiedades básicas de las cuasi-inversas —*cfr.* Schweizer y Sklar [477] (pp. 21ss)—, son las siguientes:

CI1) si $g = f^{[-1]}$, entonces $f = g^{[-1]}$, $\operatorname{Ran} f \subseteq \operatorname{Dom} g$ y $\operatorname{Ran} g \subseteq \operatorname{Dom} f$.

CI2) si $g_1 = f_1^{[-1]}$, $g_2 = f_2^{[-1]}$ y $\operatorname{Dom} f_1 \subseteq \operatorname{Ran} f_2$, entonces $(g_2 \circ g_1) = (f_1 \circ f_2)^{[-1]}$.

Ejemplo 104 *Por ejemplo, las cuatro funciones siguientes son cuasi-inversas de x^2: $\sqrt{x}$, $-\sqrt{x}$, $\{\sqrt{x}$, si $x \geq 0$; x^4, si $x < 0\}$, $\{-\sqrt{x}$, si $x \geq 0$; x^3, si $x < 0\}$. Obviamente, las definiciones para el subdominio $\mathbb{R}^-$, pueden variar: y en vez de x^4 (resp., x^3) podemos usar cualquier función no negativa (resp., no positiva) y definida en cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^-$.*

[22] El capítulo 7 de la monografía de Hille y Philips [724] trata detalladamente las funciones subaditivas.
Una función $g : \mathbb{R}^2 \backslash \Upsilon \to [0, +\infty)$, donde $\Upsilon = \{(a,a) : a \in \mathbb{R}\}$, se dice **subaditiva** en $\mathbb{R}^2 \backslash \Upsilon$, precisamente si:

$$g(a,b) \leq g(a,c) + g(c,b) \tag{$*$}$$

para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$ distintos. Se demuestra que ser una función $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ subaditiva equivale a que la función $g : \mathbb{R}^2 \backslash \Upsilon \to [0, +\infty)$ definida como $g(x,y) = f(y-x)$ sea subaditiva (notemos que $g(x,y) = f(|x-y|)$).
Observemos que la expresión $(*)$ es formalmente equivalente a la desigualdad triangular —*cfr.* Ec. 5.18—. De aquí que toda *pseudométrica* (separación de Hausdorff), *métrica* y *ultramétrica*, sean subaditivas en el sentido de la expresión $(*)$.

[23] id_A es la función **identidad** en A, o sea, $\operatorname{Dom} id_A = A$ y $id_A(x) = x$, para todo $x \in A$.

Ejemplo 105 *Las funciones* x^p $(1 \leq p < +\infty)$*, cuasi-inversas de las funciones* x^p $(0 < p \leq 1)$*, son superaditivas.*

El siguiente resultado —basado en un teorema de LEVY [398] (Proposición VI.2.38)— nos permite definir un espacio métrico producto a partir de un número finito de espacios métricos.

Teorema 106 *Sea* $f : [0,+\infty)^n \to [0,+\infty)$ *cualquier función tal que* $\forall x, y \in [0,+\infty)^n$*:*

$$\begin{array}{rl} i) & f(\mathbf{x}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ ii) & (\forall i \in \{1,\ldots,n\})(f(\mathbf{x}(i)) = x_i) \\ iii) & \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Longrightarrow f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}) \\ iv) & f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \end{array} \tag{6.169}$$

donde $\mathbf{x}(i) = (0,\ldots,0,x_i \neq 0,0,\ldots,0)$*,* $\leq$ *es el orden producto en* $[0,+\infty)^n$*, o sea,* $x \leq y \Longleftrightarrow (\forall i \in \{1,\ldots,n\})(x_i \leq y_i)$ *y* $x+y = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$*. Bajo estas hipótesis, si* $\langle X_i, d_i\rangle$ *son espacios métricos* $(i = 1,\ldots,n)$ *y* $\delta : \prod_{i=1}^n X_i \to [0,+\infty)$ *se define como:*

$$\delta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(d_1(x_1,y_1),\ldots,d_n(x_n,y_n)) \tag{6.170}$$

entonces $\langle \prod_{i=1}^n X_i, \delta\rangle$ *es un espacio métrico. La condición (ii) puede substituirse por la siguiente:*

$$ii') \quad (\forall i \in \{1,\ldots,n\})(f(\mathbf{x}(i)) = \lambda_i x_i) \tag{6.171}$$

con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$*, permitiendo la definición de métricas ponderadas.*

Sean $\varphi, \phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ dos funciones monótonas crecientes y continuas a trozos. Estudiemos algunas condiciones suficientes referentes a φ y ϕ, para que la solución $D : (\prod_{i=1}^n X_i)^2 \to [0,+\infty)$ de la ecuación:

$$\phi(D^*(\mathbf{x},\mathbf{y})) = \sum_{j=1}^{n} c_i \varphi(d_i(x_i,y_i)) \tag{6.172}$$

sea una métrica en el espacio $\prod_{i=1}^n X_i$. (Nótese que este planteamiento es más genérico que el inicial de la Ec. (6.154), sin embargo en breves momentos el lector observará cómo se reduce a aquél).

Si $f : [0,+\infty)^n \to [0,+\infty)$ es:

$$f(\mathbf{d}) =_{def} \phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \varphi(d_i)\right) \tag{6.173}$$

entonces:

$$D^*(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(d_1(x_1,y_1),\ldots,d_n(x_n,y_n)) \tag{6.174}$$

y si f verificase las hipótesis del teorema anterior, entonces $\langle \prod_{i=1}^n X_i, D^*\rangle$ es un espacio métrico.

De la condición (ii), esto es, si $d_k \neq 0$ y las demás $d_{j(\neq k)} = 0$, se tiene que si $c_k = 1$, $\phi(f(\mathbf{d})) = \phi(d_k) = \varphi(d_k)$, de donde ϕ^{-1} debe ser una cuasi-inversa de φ. Por tanto, sin pérdida de generalidad, consideramos $\varphi = \phi$.

Si φ es monótona creciente y superaditiva, φ^{-1} monótona creciente y subaditiva, $\varphi^{-1}(0) = 0$, y $\sum_{i=1}^n c_i \leq 1$, entonces f verifica las hipótesis del teorema anterior y por tanto, D^* es una métrica en el espacio $\prod_{i=1}^n X_i$.

Lema 107 *Sea* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es inyectiva y monótona creciente en su dominio. Si* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es superaditiva (resp., subaditiva), entonces* $\varphi^{-1} : \operatorname{Ran}\varphi \to \mathbb{R}$ *es subaditiva (resp., superaditiva).*

Demostración. Es de sobra conocido que la función inversa de una función invertible y monótona creciente también es monótona creciente. Por otro lado, al ser φ biyectiva, dados $x, y \in \operatorname{Ran}\varphi$, existen dos únicos $z_x, z_y \in \operatorname{Dom}\varphi$, tales que $\varphi(z_x) = x, \varphi(z_y) = y$. La función φ^{-1} es subaditiva precisamente si $\forall x, y \in \operatorname{Ran}\varphi$, $\varphi^{-1}(x+y) \leq \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)$. En efecto:

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{-1}(x+y) & = & \varphi^{-1}(\varphi(z_x) + \varphi(z_y)) \\ & \leq & ^{(*)}\varphi^{-1}(\varphi(z_x+z_y)) \\ & = & z_x + z_y \\ & = & \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y) \end{array}$$

$^{(*)}$ por ser φ superaditiva: $\varphi(z_x) + \varphi(z_y) \leq \varphi(z_x + z_y)$, y φ^{-1} monótona creciente.

De manera similar se demuestra la superaditividad de φ^{-1} a partir de la subaditividad de φ. La función φ^{-1} es superaditiva precisamente si $\forall x, y \in \operatorname{Ran}\varphi$, $\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y) \leq \varphi^{-1}(x+y)$. En efecto:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y) &= z_x + z_y \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(z_x + z_y)) \\ &\leq {}^{(*)}\varphi^{-1}(\varphi(z_x) + \varphi(z_y)) \\ &= \varphi^{-1}(x+y) \end{aligned}$$

$^{(*)}$ por ser φ subaditiva: $\varphi(z_x + z_y) \leq \varphi(z_x) + \varphi(z_y)$, y φ^{-1} monótona creciente. ∎

Mediante el siguiente teorema proporcionamos una subclase de funciones $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidoras de las que llamaremos φ-métricas.

Teorema 108 *Si $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ es monótona creciente, superaditiva, no negativa y tal que $\varphi(0) = 0$, entonces:*

$$d_w^{\varphi}(I, J) = \varphi^{-1}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} w(\alpha)\varphi\left(\left|i_{(\alpha)} - j_{(\alpha)}\right|\right)\right) \tag{6.175}$$

es una métrica (que denominaremos φ-métrica).[24]

6.19.2 Nueva subclase de φ-métricas basada en concavidad

Definición 109 *Sea C un conjunto convexo de números reales y f una función definida en C. Se dice que f es* convexa *en C precisamente si:*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{6.176}$$

para todo $x, y \in C$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$. Se dice que f es cóncava *en C precisamente si:*

$$f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq f(\lambda x + (1-\lambda)y) \tag{6.177}$$

para todo $x, y \in C$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$. Obviamente ser f convexa equivale a ser $-f$ cóncava.

Los teoremas 112 y 114, que proponemos y demostramos a continuación, ambos inspirados en el Lema 2.2.6. de Schweizer y Sklar [476], proporcionan una condición suficiente para que una función sea subaditiva (resp., superaditiva) en términos de concavidad (resp., convexidad). Para su demostración utilizaremos un resultado previo.

Lema 110 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x, y \in \operatorname{Dom} f$, si $xy > 0$, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Si f es no negativa, monótona decreciente en $\mathbb{R}^-$ y monótona creciente en $\mathbb{R}^+$, entonces f es subaditiva.*

Ejemplo 111 *Las funciones* $\min\{1, |x|\}$, $\max\{1, |x|\}$ *y* $\arctan|x|$ *son subaditivas (ver sus gráficas en la tabla de gráficas 6.10).*

Teorema 112 *Si $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ cóncava en $\mathbb{R}^-$ y en $\mathbb{R}^+$, y tal que $f(0) \geq 0$, entonces f es subaditiva.*

Demostración. Si $x = y = 0$, es trivial. Sea pues $x + y \neq 0$. Podemos reescribir x como:

$$x = \frac{x}{x+y}(x+y) + \frac{y}{x+y}0$$

[24] Obviamente puede ser enunciado en función de la subaditividad: «Si $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ es monótona creciente, subaditiva, no negativa y tal que $\varphi(0) = 0$, entonces:

$$d_w^{\varphi}(I, J) = \varphi\left(\sum_{\alpha=1}^{N} w(\alpha)\varphi^{-1}\left(\left|i_{(\alpha)} - j_{(\alpha)}\right|\right)\right)$$

es una métrica.»

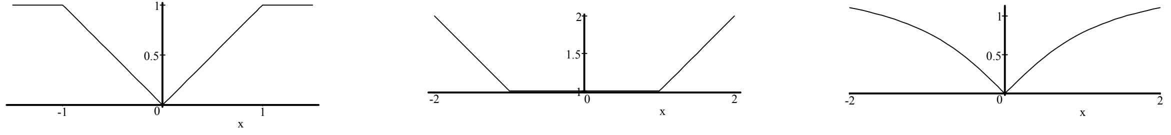


Tabla 6.10: *Funciones* $\min\{1, |x|\}$, $\max\{1, |x|\}$ *y* $\arctan |x|$.
—*Fuente:* Elaboración propia.

e y como:

$$y = \frac{x}{x+y}0 + \frac{y}{x+y}(x+y)$$

Supongamos $x, y > 0$. Por ser f cóncava, no negativa y $f(0) \geq 0$:

$$f(x) \geq \frac{x}{x+y}f(x+y) + \frac{y}{x+y}f(0) \geq \frac{x}{x+y}f(x+y) \tag{6.178}$$

$$f(y) \geq \frac{y}{x+y}f(x+y) + \frac{x}{x+y}f(0) \geq \frac{y}{x+y}f(x+y) \tag{6.179}$$

Sumando, obtenemos (6.166). Igualmente, obtendríamos (6.166) para $x, y < 0$. Como f es cóncava en $\mathbb{R}^-$ y en $\mathbb{R}^+$, es monótona decreciente en $\mathbb{R}^-$ y monótona creciente en $\mathbb{R}^+$, entonces, por el lema anterior, f es subaditiva. ■

Ejemplo 113 *La función* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$*, definida por* $f(x) = \frac{x}{x+1}$ *es cóncava en* $\mathbb{R}^+$*, y tal que* $f(0) \geq 0$*, por lo que es subaditiva.*

Teorema 114 *Si* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *es convexa y tal que* $f(0) = 0$*, entonces* f *es superaditiva.*

Demostración. De manera similar al teorema anterior. En este caso, $x, y > 0$, f es convexa y $f(0) = 0$. Las desigualdades correspondientes a (6.178) y (6.179) son:

$$f(x) \leq \frac{x}{x+y}f(x+y) + \frac{y}{x+y}f(0) = \frac{x}{x+y}f(x+y)$$

$$f(y) \leq \frac{y}{x+y}f(x+y) + \frac{x}{x+y}f(0) = \frac{y}{x+y}f(x+y)$$

de donde sumando, obtenemos (6.167). ■

El siguiente teorema proporciona una nueva subclase de funciones $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidoras de φ-métricas.

Teorema 115 *Si* $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *es monótona creciente, convexa, no negativa y tal que* $\varphi(0) = 0$*, entonces* $d_w^\varphi(I, J)$*, solución de:*

$$\varphi\left(d_w^\varphi(I, J)\right) = \sum_{\alpha=1}^{N} w(\alpha)\varphi\left(\left|i_{(\alpha)} - j_{(\alpha)}\right|\right)$$

es una métrica.[25]

[25]Obviamente puede ser enunciado en función de la concavidad: «Si $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es monótona creciente, cóncava, no negativa en $[0, +\infty)$ y tal que $\varphi(0) = 0$, entonces:

$$d_w^\varphi(I, J) = \varphi\left(\sum_{\alpha=1}^{N} w(\alpha)\varphi^{-1}\left(\left|i_{(\alpha)} - j_{(\alpha)}\right|\right)\right)$$

es una métrica.» Esto corresponde a la versión del Teorema 108 (pág. 141) en su correspondiente nota a pie de página. Obviamente hay otras condiciones más fuertes que la subaditividad (esto es, suficientes para ella); por ejemplo: «dada $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, si $|x - y| \leq z \leq x + y$ entonces $f(z) \leq f(x) + f(y)$, para todo $x, y, z \in [0, +\infty)$.» Ahora bien, a medida que la condición sea más fuerte, menor será la subclase correspondiente de funciones φ definidoras de las φ-métricas.

Demostración. Consecuencia inmediata de los teoremas (108) y (114). ■

Ejemplo 116 *Funciones* no negativas en $[0, +\infty)$, monótonas crecientes*, tales que* $\varphi(0) = 0$*,* superaditivas *y* convexas *son por ejemplo* $\varphi(x) = x^p$ $(p \geq 1)$*,* $\varphi(x) = e^x - 1$*.*

Como hemos insistido repetidamente, lo que hemos hallado son condiciones suficientes, o sea, hemos identificado ciertas subclases de φ-métricas. El siguiente ejemplo explicita este comentario.

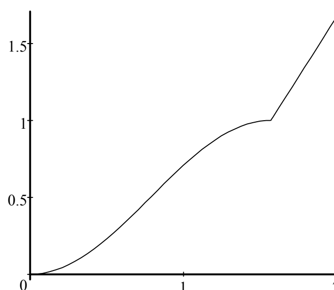
Ejemplo 117 *Un ejemplo de función* no negativa en $[0, +\infty)$, monótona creciente*, tal que* $\varphi(0) = 0$*,* superaditiva*, pero* no convexa *(tiene un punto de inflexión en* $\pi/4$*) es la siguiente:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin^2 x & si\ x \in [0, \pi/2] \\ \frac{\pi}{2}(x - \frac{\pi}{2}) + 1 & si\ x \in [\pi/2, +\infty) \end{cases} \tag{6.180}$$

cuya función inversa es no negativa, monótona creciente, tal que $\varphi^{-1}(0) = 0$*, subaditiva, pero no cóncava (tiene un punto de inflexión en* $1/2$*):*

$$\varphi^{-1}(x) = \begin{cases} \sin^{-1}(\sqrt{x}) & si\ x \in [0, 1] \\ \frac{2}{\pi}(x - 1) + \frac{\pi}{2} & si\ x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

y la gráfica de φ *es:*



6.20 (α, β)-percentilado

Esta sección gira en torno a la idea de poder medir disimilitudes entre intervalos, concediendo distintas relevancias a diferentes subconjuntos (en nuestro caso, subintervalos) de los mismos. Podríamos denominarlo punto de vista basado en trozos, en vez del punto de vista basado en elementos o puntos[26], correspondiente al α-percentilado, visto anteriormente, en el que destacamos elementos aislados. Un ejemplo ilustrativo podría ser el caso de intervalos que sean α-cortes de subconjuntos borrosos multi-modales, en los que cada subconjunto modal fuese, asimismo, un intervalo.

Proponemos un *esquema iterativo* basado en los que denominamos *intervalos* (α, β)*-percentílicos —cfr.* §6.20.1—. Observamos en §6.21, que las quasi-normas de los espacios lineales complejos $\ell_q^N(\ell_p^M)$ $(M, N \in \mathbb{N};$ $0 < p, q \leq \infty)$ —*cfr.* Edmunds y Triebel [725]; Triebel [726]— son un caso particular de las definidas por el esquema iterativo aquí propuesto —*cfr.* §6.20.2.

6.20.1 Intervalos (α, β)-percentílicos

Cualquier α-percentilado finito de $[0, 1]$ destaca un conjunto finito de puntos de $[0, 1]$. Podemos pensar también en destacar un conjunto finito de subintervalos de $[0, 1]$.

Definición 118 *Sean* $(L, \preceq)$ *un retículo y* $X \in \mathfrak{C}(L)$*. Sean* $\alpha, \beta \in [0, 1]$*, tales que* $\alpha + \beta < 1$*. Definimos el* ***subintervalo*** (α, β)***-percentílico*** *de* X *como:*

$$I_{(\alpha,\beta)} = \langle x_\alpha, x_\beta \rangle \tag{6.181}$$

[26] En inglés, y en muchos campos, suele hablarse de *piecewise view* y de *pointwise view*.

Definición 119 *Sea* $(L, \preceq)$ *un retículo,* μ *una medida y* $X \in \mathfrak{C}(L)$ *tal que* $\mu(X) > 0$. *Sea* $\mathfrak{h} \in \mathfrak{P}(\mathbb{I}X)$ *un conjunto finito de al menos dos subintervalos de* X. *Decimos que* $\mathfrak{h}$ *es un* (α, β)***-percentilado*** *de* X *si:*

i) *todo elemento de* $\mathfrak{h}$ *es un subintervalo* (α, β)*-percentílico de* X,

ii) $\forall I, J \in \mathfrak{h}$, $\mu(I \cap J) = 0$, *si* $I \neq J$, *y*

iii) *existen* $I, J \in \mathfrak{h}$, *tales que* $i_0 = x_0$ *y* $j_1 = x_1$.

En tal caso, decimos de X *que es un* ***conjunto*** (α, β)***-percentilado****, denotando esta situación por el par ordenado* $(X, \mathfrak{h})$.

Sea $(L, \preceq)$ un retículo, μ una medida, $X \in \mathfrak{C}(L)$ tal que $\mu(X) > 0$ y $\mathfrak{h}$ un (α, β)-percentilado de X. De manera similar a como hicimos anteriormente —*cfr.* Ec. 6.160—, podemos considerar la siguiente aproximación «en forma libre» de ξ en $[0, 1]$:

$$\xi(\alpha) \simeq \sum_{I \in \mathfrak{h}} c_I \chi_I(\alpha) \tag{6.182}$$

donde $c_I \in \mathbb{R}$, para todo $I \in \mathfrak{h}$, y χ_I es la función característica de I, cuya área, con respecto a una medida μ, es $\mu(I)$, para cualquier intervalo que contenga a I. El caso particular $\chi_{[a,a]}$ es $\delta(x - a)$, la distribución δ de Dirac —*cfr.* Ec.6.160—. Obsérvese que es necesaria una normalización:

$$\sum_{I \in \mathfrak{h}} c_I \mu(I) = 1 \tag{6.183}$$

de manera que queden incluidas las métricas de la familia $\mathcal{M}$ de Minkowski como casos particulares.

Ejemplo 120 *Sea* $\Gamma_{[0,1]} = \{I_1, \ldots, I_M\}$ *un* (α, β)*-percentilado de* $[0, 1]$, *es decir, una colección finita de subintervalos* (α, β)*-percentílicos disjuntos de* $[0, 1]$, *asumiendo que existen* r *y* s, *tales que* $1 \leq r, s \leq M$ *y* $i_{r,0} = 0$ *y* $i_{s,1} = 1$. *Sea* μ *la medida de* Lebesgue. *Supongamos que* $\sum_{k=1}^{M} c_k \mu(I_k) = 1$. *La familia de disimilitudes* α*-percentiladas y ponderadas de* Minkowski, *se obtiene para* $\varphi(x) = x^p$ *y la aproximación (6.182) de* $\xi(\alpha)$ *en (6.158):*

$$d^w_{(p)}(I, J) = \left[\int_0^1 \left| \Delta^{I,J}_\alpha \right|^p \left(\sum_{k=1}^{M} c_k \chi_{I_k}(\alpha) \right) d\alpha \right]^{\frac{1}{p}} \tag{6.184}$$

6.20.2 Esquema iterativo

Es posible medir la disimilitud entre dos intervalos I y J, a partir de las disimilitudes entre algunos de sus subintervalos (α, β)-percentílicos, procediendo con estos de una manera similar. Proponemos el siguiente esquema iterativo:

$$\begin{cases} \varphi_{y+1}\left(d^{\varphi_{y+1}}_{w_{y+1}} \left(S^I_{y+1,k}, S^J_{y+1,k} \right) \right) = \sum_{r=1}^{N_y} v^{y+1}_r \varphi_{y+1} \left(d^{\varphi_y}_{w_y} \left(S^I_{y,r}, S^J_{y,r} \right) \right) \\ \sum_{r=1}^{N_y} v^{y+1}_r = 1 \\ k = 1, \ldots, N_{y+1} \end{cases} \tag{6.185}$$

alcanzándose el final de la iteración en $P+1$ pasos, imponiendo, de antemano, que el cómputo de $d^{\varphi_P}_{w_P}\left(S^I_{P,r}, S^J_{P,r} \right)$, para todo $r = 1, \ldots, N_P$, se defina a partir de sus α-percentiles, o sea, de $I_{[\alpha,\alpha]}$, al igual que en la Ec. 6.154. Suponemos que las funciones φ y φ_y son continuas y monótonas en los intervalos correspondientes.

Ejemplo 121 *Podríamos modificar la distancia normalizada de* Minkowski *—cfr. Ec. 6.38— entre dos intervalos de la siguiente manera. Sean* $I, J \in \mathbb{IR}$, *tales que* $I = \langle i_0, i_1 \rangle$ *y* $J = \langle j_0, j_1 \rangle$, $\varepsilon_{I,0}, \varepsilon_{I,1}, \varepsilon_{J,0}, \varepsilon_{J,1}, \in \mathbb{R}$, *y consideremos los subintervalos de* I:

$$S^I_{1,0} = \langle i_0, i_0 + \varepsilon_{I,0} \rangle \qquad y \qquad S^I_{1,1} = \langle i_1 - \varepsilon_{I,1}, i_1 \rangle \tag{6.186}$$

y los de J:

$$S^J_{1,0} = \langle j_0, j_0 + \varepsilon_{J,0} \rangle \qquad y \qquad S^J_{1,1} = \langle j_1 - \varepsilon_{J,1}, j_1 \rangle \tag{6.187}$$

Podemos entonces definir una posible disimilitud como:

$$\overline{d}^{(2)}_p(I, J) = \left[\frac{1}{2} \left(\left(\overline{d}^{(2)}_p \left(S^I_{1,0}, S^J_{1,0} \right) \right)^p + \left(\overline{d}^{(2)}_p \left(S^I_{1,1}, S^J_{1,1} \right) \right)^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \tag{6.188}$$

Observación 122 *Obsérvese que cuando consideramos una colección finita* $\Gamma_I = \{I_1, \ldots, I_M\}$ *de subintervalos* (α,β)*-percentílicos de un intervalo* $I = [i_0, i_1]$*, suponemos la existencia de* r *y* s*, tales que:*

$$1 \leq r, s \leq M \tag{6.189}$$

$$i_{r,0} = i_0 \tag{6.190}$$

$$i_{s,1} = i_1 \tag{6.191}$$

6.21 Estudio ilustrativo: El espacio lineal $\ell_q^N(\ell_p^M)$

Sea $M \in \mathbb{N}$ y $0 < p \leq \infty$. Por espacio ℓ_p^M se entiende —*cfr.* Edmunds y Triebel [725]; Triebel [726]— el espacio lineal de todas las M-tuplas complejas $x = (x_j : j = 1, \ldots, M)$ dotado con la cuasi-norma[27]:

$$\left\| x | \ell_p^M \right\| = \left(\sum_{l=1}^{M} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.195}$$

si $0 < p < \infty$, y:

$$\left\| x | \ell_\infty^M \right\| = \sup_j |x_j| \tag{6.196}$$

si $p = \infty$.

Sean $M, N \in \mathbb{N}$ y $0 < p, q \leq \infty$. Por espacio $\ell_q^N(\ell_p^M)$ se entiende —*cfr.* Edmunds y Triebel [725]; Triebel [726]— el espacio lineal de todas las $M \times N$-tuplas complejas $x = (x_{j,l} : j = 1, \ldots, N;\ l = 1, \ldots, M)$ dotado con la cuasi-norma:

$$\left\| x | \ell_q^N(\ell_p^M) \right\| = \left(\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{l=1}^{M} |x_{j,l}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{6.197}$$

si $0 < p, q < \infty$, con las modificaciones pertinentes, de acuerdo con (6.196) si $p = \infty$ ó $q = \infty$.

Ejemplo 123 *Sean* I *y* J *dos intervalos compactos, que representamos, como en el ejemplo anterior, por un par de subintervalos percentílicos:*

$$I \rightleftharpoons \left(S_{1,0}^I, S_{1,1}^I\right), \qquad J \rightleftharpoons \left(S_{1,0}^J, S_{1,1}^J\right) \tag{6.198}$$

por lo que cada intervalo está representado por un vector de dos componentes, ambas a su vez, vectores de dos componentes:

$$I \quad \rightleftharpoons \quad ((i_0, i_0 + \varepsilon_{I,0}), (i_1 - \varepsilon_{I,1}, i_1)) \tag{6.199}$$

$$J \quad \rightleftharpoons \quad ((j_0, j_0 + \varepsilon_{J,0}), (j_1 - \varepsilon_{J,1}, j_1)) \tag{6.200}$$

y según la definición de la cuasi-norma:

$$\begin{aligned} \left\{ d\left(I, J | \ell_q^2(\ell_p^2)\right) \right\}^q &= \left(|i_0 - j_0|^p + |(i_0 + \varepsilon_{I,0}) - (j_0 + \varepsilon_{J,0})|^p \right)^{\frac{q}{p}} \\ &+ \left(|(i_1 - \varepsilon_{I,1}) - (j_1 - \varepsilon_{J,1})|^p + |i_1 - j_1|^p \right)^{\frac{q}{p}} \end{aligned} \tag{6.201}$$

que no es otra cosa que:

$$d\left(I, J | \ell_q^2(\ell_p^2)\right) = \left(\left(d_p^{(2)}\left(S_{1,0}^I, S_{1,0}^J\right) \right)^q + \left(d_p^{(2)}\left(S_{1,1}^I, S_{1,1}^J\right) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{6.202}$$

Por lo que hemos obtenido así otro caso particular del esquema iterativo propuesto.

[27] Se denomina **cuasi-norma** en un espacio lineal complejo B, a cualquier aplicación $\|\cdot|B\|$ de B en $\mathbb{R}_0^+$ tal que para todo $x, y \in B$:

$$\|x|B\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \tag{6.192}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \ \|\lambda x|B\| = |\lambda| \, \|x|B\| \tag{6.193}$$

y existe una constante $c \geq 1$, tal que:

$$\|x + y|B\| = c\left(\|x|B\| + \|y|B\|\right) \tag{6.194}$$

Si $c = 1$, entonces $\|\cdot|B\|$ es una **norma** en B.

Dado un espacio lineal complejo B y una cuasi-norma $\|\cdot|B\|$ sobre él, se dice que B es un **espacio cuasi-Banach** si toda sucesión de Cauchy con respecto a $\|\cdot|B\|$ es convergente.

6.22 Estudio ilustrativo: Sobre evaluación de aprendizajes

«Un mínimo análisis de la realidad cotidiana parece avalar la "condena" a la que estamos sometidos los humanos: ser permanentes sujetos y objetos de evaluación. Cada individuo ejerce a lo largo del día continuos actos evaluadores: valora el funcionamiento del reloj que compró para despertarse; evalúa la calidad de los productos de su desayuno; valora la puntualidad del amigo con que se citó; evalúa la calidad docente de su profesor, etc.»
—J. Fernández Sánchez [727] (p. 157)

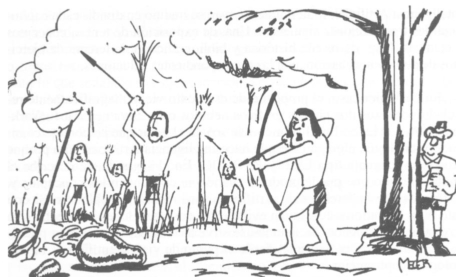


Figura 6.10: *Los naciremos son cazadores y recolectores, aunque a veces confunden ambos conceptos.*
— *Fuente:* Borrajo, Juristo, Martínez y Pazos [728] (p. 18)

En este estudio reflexionamos sobre: las dificultades de evaluar los aprendizajes (§6.22.2), el diseño de pruebas funcionales, la evaluación de las destrezas de ejecución y la evaluación de procesos frente a la de productos (§6.22.3), aprobados «no clásicos» como resultado de emplear diferentes distancias o disimilitudes (§6.22.4), puntos mínimos aprobatorios y mínimo conocimiento compensatorio (§6.22.5), número de categorías a tener en cuenta, categorías autosemejantes para una calificación humana y potenciación de interfaces hombre-método (§6.22.6). Todo ello tiene su continuación en varias secciones posteriores de nuestra Tesis: §16 , en §6.22.1ss. et passim, y §17 passim, y en una experiencia real (§9 y §15.4,et passim).

6.22.1 Teorías del aprendizaje

«Si tuviera que reducir toda la Psicología Educativa a un único principio sería éste: el factor más importante que influye en el aprendizaje: es lo que el alumno ya sabe. Averígüese ésto y enséñese en consecuencia.»
—David P. Ausubel [200], *via* María Victoria Trianes Torres [729] (p. 188).

Los programas de formación, enseñanza, o instrucción con apoyo computacional —*Computer Aided Instruction*, CAI— pueden fallar en que no dispensen la atención individualizada que un instructor humano da, debido a que no consideran la diversidad de estudiantes, ni sus necesidades particulares, ni su historia —*cfr.* Gamboa y Fred [730]; Bennett [731]—. No obstante, si nos fijamos en la Universidad, la realidad es que, debido a la masificación actual, en ciertas titulaciones, el alumno no cuenta más que como un número entre cientos, y serán muy pocos los profesores —en tales atiborradas aulas— que afirmen, sin fingir, conocer a todos y cada uno de sus alumnos (que mal nos tememos, ni discípulos ni discentes).

Se ha investigado mucho hasta la fecha para salvar este inconveniente: el presente de la Inteligencia Artificial en la Educación (*Artificial Intelligence in Education*, AI-ED) está configurado por varios enfoques en pos del aprendizaje, como la «Instrucción Inteligente Asistida por Ordenador» (*Intelligent Computer-Assisted Instruction*, ICAI), *Micro-world* —*cfr.* Galvis [732]—, «Sistemas Tutoriales Inteligentes» (*Intelligent Tutoring Systems*, ITS), «Entornos de Aprendizaje Inteligente» (*Intelligent Learning Environments*, ILE), «Aprendizaje Cooperativo con Apoyo Computacional» (*Computer-Supported Collaborative Learning*, CSCL).

Nuestro segundo ejemplo ilustrativo versa sobre la **inferencia del estado cognitivo de un estudiante bajo un enfoque de aprendizaje ITS** —aunque lo mismo podría aplicarse a cualquiera de los otros citados.

La esencia, en cierta manera, más relevante de un ITS es considerar que cada estudiante es único —*cfr.* Burns y Capps [733]—. Por ejemplo, el sistema SMART (*Student Modeling Approach for Responsive Tutoring*), presentado por Valerie J. Shute [734], facilita la creación y desarrollo de ITSs, con la meta siempre presente de la consecución de la particularización de la enseñanza hacia cada individuo concreto, de la **individuación**[28] **de la enseñanza**, podríamos decir. Si, por ejemplo, se sabe que la memoria de trabajo de un estudiante es escasa, entonces el ITS debería proponer trabajar con unidades pequeñas de información —*cfr.* Colom Marañón [8] (p. 206).

Por una parte debemos contar con una descripción del estudiante en cuestión que nos permita predecir su conducta. Una descripción basada en **rasgos psicológicos** —*cfr.* Eysenck y Eysenck [735]— permiten lograrlo. Los rasgos psicológicos suelen clasificarse en tres tipos: **intelectuales** (p. ej., razonamiento, memoria, creatividad), **temperamentales** (p. ej., extroversión, estabilidad emocional) y **motivacionales** (p. ej., actitudes, valores, intereses) —*cfr.* Colom Marañón [8] (p. 125).

Siendo nuestra meta que la formación o la enseñanza estén diseñadas o adaptadas individualmente, es necesario averiguar la comprensión que cada estudiante tiene de la materia en cuestión: su **estado cognitivo** —*cfr.* Vanlehn [736]—, la *situación actual y previa* del estudiante con respecto a lo que está por venir.

Joseph D. Novak publica en 1977 [737], por vez primera, su teoría de la enseñanza. En esta obra, defiende la **doctrina de la asimilación** —en el sentido de la semejanza entre conceptos y entre materia y concepto— en la que, según él mismo reconoce, están presentes las influencias de James Bryant Conant [?], Thomas S. Kuhn [738], Stephen E. Toulmin [739] y Joseph J. Schwab [740]. El paso del tiempo, y obras como la de D. Bob Gowin [741], hace que Novak insista en **lo humano**, en las **dimensiones afectiva y social de la enseñanza**. Novak resume su pensamiento actual así —*cfr.* González García, Morón Arroyo y Novak [742] (p. 232):

> *«El aprendizaje significativo fundamenta la integración constructiva del pensamiento, sentimiento y acción, conducente a la liberación del hombre para el compromiso y la responsabilidad.»*

Destacamos que, hoy por hoy, sigue siendo necesaria la colaboración y supervisión de un instructor humano, de cara a evitar el aprendizaje memorístico y rutinario —aprendizaje mecánico (*rote learning*), *vide infra*— , para potenciar las idas por las sendas que conducen hacia el **aprendizaje significativo** postulado por Ausubel [199, 200, 201], y defendido, entre otros muchísimos, por Novak y Hanesian [202]. Es este tipo de aprendizaje aquél mediante el que el aprendiz integra, en su bagaje[29], el último conocimiento adquirido, de manera refleja, sustantiva, real, no arbitraria, intentando reproducir el proceso que llevó al descubrimiento del nuevo conocimiento.

Además del concepto de significación, una segunda noción básica en la teoría de Ausubel es la de concepto inclusor, aquellos que «incluyen o subsumen, bajo su extensión más general, otros conceptos de menor predicabilidad (poder de generalización), que serían los conceptos "incluidos", subsumidos o subordinados (frente a los conceptos inclusores, subsumentes, supraordenados o subordinantes)» —*cfr.* Miguel Fernández Pérez [22] (pp. 189-190)—. Esta idea de inclusión entre conceptos abre las puertas a la **jerarquización conceptual** defendida por Ausubel.

La importancia de los conocimientos previos ya había sido sugerida por Bartlett [?] (1932) y por Kelly [744] (1955). Aunque fue posteriormente, cuando ha alcanzado su plenitud —*cfr.* Ausubel [199] (1963), Viennot [745] (1976) y Novak (1982).

Enfrente del aprendizaje significativo, se sitúa el **aprendizaje mecánico** (*rote learning*)[30]. Este «aprendizaje» es el que más usan los estudiantes —por ejemplo, Katherine Edmondson [746] muestra lo bien que

[28] Carl G. Jung empleaba el término **individuación** para denotar el proceso mediante el cual la persona desarrolla y moldea una personalidad individual integrada y saludable a través de la diferenciación y el desarrollo de cada uno de los sistemas de la personalidad.

[29] «Esquema mental», en palabras de Joseph D. Novak, o sea, el **conocimiento a priori**.

Los profesores González García, Morón Arroyo y Novak [742] (p. 53), citan, en este sentido, a Ausubel y a Wandersee:

—«El factor más importante que influye en el aprendizaje es el conocimiento previo de los propios alumnos.» (*cfr.* Ausubel [199])

—«Las cosas más importantes que los alumnos traen a sus clases son sus conceptos.» (*cfr.* Wandersee [743]).

[30] Puede el lector apreciar la significación del término «significativo», en oposición a «mecánico», en paralelo, por ejemplo, con la diferencia entre **implicación significante** e **implicación material**. En el último caso, el vínculo entre enunciados depende única y exclusivamente de sus valores de verdad. En cambio, la significación de los enunciados y la verdad de su relación, intervienen en la valoración de la implicación significante. De hecho, la no diferenciación entre ambas, es el origen de multitud de paradojas —*cfr.* Piaget y García [224] (*passim*)—, en particular, las «paradojas» «clásicas» de la implicación material: $q \to (p \to q)$; $\neg p \to (p \to q)$; $(p \to q) \vee (q \to p)$.

funciona de cara a los exámenes para los estudiantes de la Universidad de Cornell—; pero la mayoría de estos «conocimientos» son irrecuperables en la memoria a largo plazo y aunque se consiga, no se es capaz de aplicarlos en contextos nuevos. En definitiva, un fraude —*cfr.* EDMONDSON y NOVAK [747]—.

El aprendizaje mecánico y el significativo pueden verse como los extremos de un segmento; NOVAK habla de **grado de aprendizaje significativo**, en la medida en que avancemos hacia él por dicho segmento —*cfr.* Fig. 6.11.

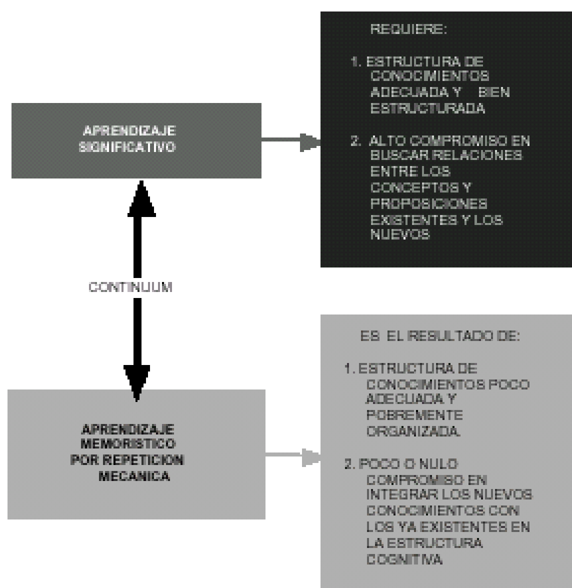


Figura 6.11: *El continuo del aprendizaje, desde el mecánico al significativo.*
— *Fuente:* NOVAK [203] (Fig. 2).

Con la finalidad de ayudar a aprender de manera significativa, se muestra necesario identificar las estructuras de interrelación refleja (esto es, por significado, tras reflexionar) entre los diferentes conocimientos adquiridos. Tanto el **aprender descubriendo** de Jerome S. BRUNER [748, 749], como el **aprender inventando** de Jean PIAGET [750], comparten esta necesidad. Algunos ejemplos de **herramientas de representación del conocimiento** que se han desarrollado para facilitar esta tarea[31], son:

- los *organizadores previos* (*advanced organizers*) —*cfr.* AUSUBEL [751]—, o «puentes conceptuales» —*cfr.* Miguel FERNÁNDEZ PÉREZ [22] (p. 194)— que preparen al individuo para el aprendizaje de determinados nuevos conceptos;

- las *vistas estructuradas de conjunto* (*structured overviews*) u organizadores gráficos —*cfr.* ALVERMANN [752]—;

- las *vistas previas* (*previews*) —*cfr.* GRAVES, COOKE y LABERGE [753]—;

- las *redes semánticas* y los *mapas*, como los *mapas mentales*[32] —*cfr.* BUZAN [754]—, que plasman pensamientos o perspectivas acerca de una situación particular o problema de interés, y que se clasifican en *mapas cognitivos* y *mapas de conceptos*, según se refieran a uno o varios individuos[33].

[31] Y no sólo esta tarea de enseñanza. Una de los posibles motivos de lo difícil que resulta compartir conocimiento en las grandes empresas —parte fundamental de la **gestión del conocimiento**— puede ser la carencia de medios simples, pero eficientes, para compartir los «átomos» y «moléculas» de conocimiento, el conocimiento básico. El uso de cualquiera de las herramientas de representación del conocimiento pensadas para las actividades de enseñanza y aprendizaje, y por tanto, diseñadas para la transmisión de conocimientos, obliga a los trabajadores a clarificar su conocimiento desde la base, algo fundamental a la hora de compartirlo.

[32] `http://www.maps.jcu.edu.au/netshare/learn/mindmap`

[33] Un **mapa cognitivo** es un mapa mental personal, esto es, un esquema en forma de mapa que recoge los pensamientos que un individuo posee sobre una situación en particular o sobre un problema que le interesa. La idea original es del año 1955, de George KELLY [744], pero sigue vigente en la actualidad —*cfr.* EDEN, JONES y SIMS [755]; EDEN [756]; ACKERMANN, EDEN y CROPPER [757]—. Un **mapa de conceptos** (*concept maps*)$^{(*)}$ —*cfr.* NOVAK y GOWIN [758]; NOVAK [759]— también es un mapa mental. Lo que lo diferencia de un mapa cognitivo es que si bien éste recoge los pensamientos de un único individuo, un mapa de conceptos

- los *organizadores temáticos —cfr.* Álvarez [764]; Álvarez y Risko [765]; Risko y Álvarez [766]—;
- los *diagramas UVE* (*Vee diagrams*) *—cfr.* Gowin [741].
- las *tablas K-W-L* (*what a student Knows, what a student Wants to learn, what a student Learned while reading*) (¿Qué conoce un estudiante?, ¿qué quiere aprender¿, ¿qué aprendió miemtras leía)—*cfr.* Ogle [767]—, y más actualmente las K-W-L-Plus y las K-W-L-H (..., *How a student can learn more*) (¿Cómo puede un estudiante aprender más).

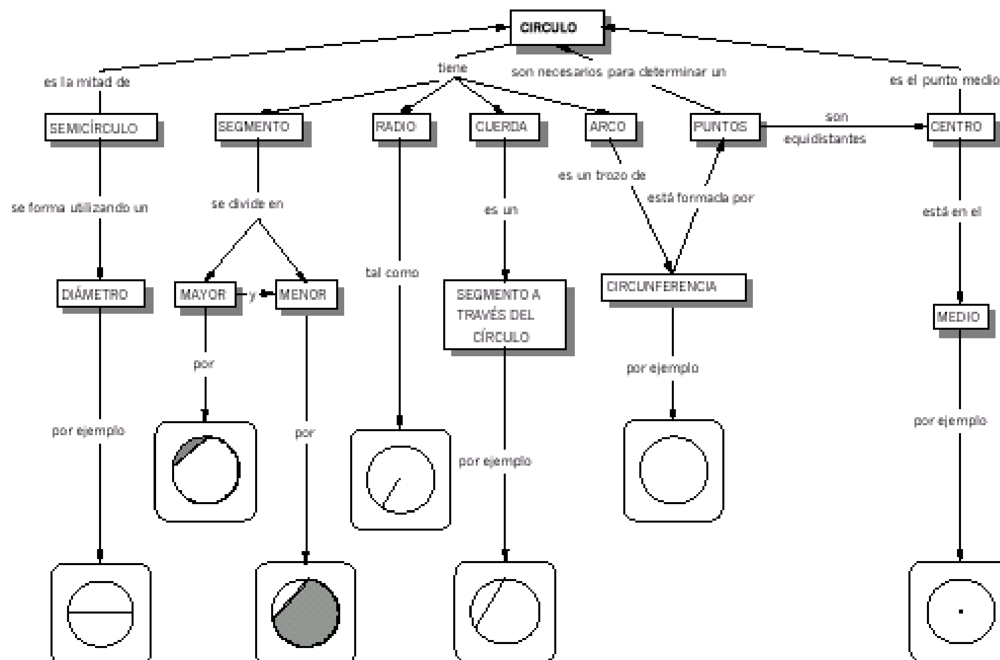


Figura 6.12: *Mapa de conceptos preparado por un alumno a partir de una sección de un libro de texto.*
— *Fuente:* Fuata'i [768] (p. 68), *via* Novak [203] (Fig. 3).

Todas estas estrategias suponen «un esfuerzo mental extraordinario para probar con precisión nuestros ["verdaderos"][34] conocimientos y distinguirlos de las nociones vagas» *—cfr.* González García, Morón Arroyo y Novak [742] (p. 248)—. Aunque los autores citados se refieren al caso particular de un **mapa de conceptos**, la realidad es que este comentario puede aplicarse a cualquiera de las técnicas organizadoras relatadas.

Resta decir que la teoría del aprendizaje tan brevemente expuesta es una de tantas. Existen múltiples teorías del aprendizaje *—cfr. v. gr.* María Victoria Trianes Torres (Coord.) [729] (*passim*); o Miguel Fernández Pérez[22] (pp. 166-257), quien analiza y discute 15 teorías diferentes, elaborando además la suya propia.

6.22.2 ¡Cuán difícil es evaluar los aprendizajes!

> *«Resulta imposible comprender la actuación de una persona con solo observarla. Todo lo que se puede saber es lo que está haciendo, y quizá cuán bien lo hace. No se puede saber el porqué hace lo que hace, ni lo que*

lo hace con respecto a varios individuos. Por ello, un mapa de conceptos no puede considerarse, estrictamente hablando, como un mapa cognitivo, porque el conocimiento, la cognición, pertenece a los individuos, y no a los grupos, ni a las organizaciones *—cfr.* Eden y Ackermann [760]—. Las estructuras conceptuales varían debido a dos procesos: «diferenciación progresiva» (los conceptos amplían su significado y su ámbito de aplicación) y «reconciliación integradora.» (se establecen progresivamente nuevas relaciones entre conceptos).

Los mapas de conceptos son ampliamente utilizados, por ejemplo, como **componentes de hipermedia** *—cfr. v. gr.* Gaines y Shaw [761]—, fomentando la **cooperación para el aprendizaje** *—cfr. v. gr.* Gaines y Shaw [762]—, usando para ello, por ejemplo, Internet *—cfr. v. gr.* Gaines y Shaw [763].

(*) Existen varios **programas gratuitos** en Internet, para la elaboración de mapas de conceptos. Uno de ellos, el IHMC UWF CMapTool, desarrollado por el *Institute for Human and Machine Cognition*, de la Universidad de Florida Oeste, puede encontrarse en: [`http://cmap.coginst.uwf.edu/download/cmapForm.html`].

[34] Este ["verdaderos"] no figura en el texto original, pero sirve para matizar la idea de una ***posible*** **presencia de incertidumbre**.

podría hacerse para ayudarle a cambiarlo.»
—Charles A. DAILEY y Frederick C. DYER [138] (p. 110)

En la lista de cuestiones difíciles que presentamos a continuación están recogidas ideas de: J. Wayne WRIGHTSTONE, Joseph JUSTMAN e Irving ROBBINS [769] (cap. 9); Norman E. GRONLUND [770] (p. 323); Victor H. NOLL, Dale P. SCANNELL y Robert C. CRAIG [771] (p. 363), y de Pedro D. LAFOURCADE [772] (pp. 169-173).

- Tener una idea clara de cuáles son las metas que serán verificadas mediante la escala de calificación.
- Elegir las características o rasgos más representativos de lo que va a ser calificado.
- Tener en cuenta que estos rasgos deben ser claramente observables en el ámbito del estudio que estemos realizando.

Como ejemplo directamente relacionado con estas tres cuestiones difíciles, sugerimos reflexionar sobre el problema de elección de campos, registros o criterios, expuesto en §8.17.

Prosigue la lista de cuestiones difíciles referentes a la evaluación de los aprendizajes:

- El número de categorías. Racional, sí que lo es, afirmar que cuanto mayor sea la precisión que necesitemos, mayor habrá de ser el número de categorías. La verdad es que todo depende de lo que se pretenda evaluar. Podríamos aceptar como regla que el número ha de permitir la fácil identificación en situaciones reales. Y los evaluadores de seres humanos o de procesos o productos que afecten a seres humanos, ¡siempre han de ser humanos! Por ejemplo, J. Wayne WRIGHTSTONE [773] (pp. 961-964) deduce que 7 es un número óptimo para calificar rasgos vinculados con la conducta. ¡Vaya coincidencia con George A. MILLER! (*The magical number seven ...*) [774].
- Describir las categorías del modo más unívoco posible, o sea, debe evitarse que una categoría evoque más de un significado en la mente de los evaluadores. Esto entronca con dos cuestiones aún más difíciles. PRIMERA, el hecho de que una misma categoría seguramente sí que será interpretada de manera distinta por los diferentes evaluadores. Aunque no tan distinta. Como afirma Witold PEDRYCZ [449] (p. 68), las personas miembros de una misma comunidad tienden a estandarizar los calificativos que usan bajo la misma situación. La diferencia entre lo que yo considero notable y lo que tú consideras notable puede que sea mínima, pero, haberla, «haila». Y SEGUNDA, ¿qué significa una nota? Refiramos una lista de posibles significados, según Pedro D. LAFOURCADE [772] (p. 229-230); la pregunta concreta es: ¿qué significa un 10 sobre 10?
  - ¿Que, según el criterio personal del profesor, conoce extraordinariamente bien la materia preguntada?
  - ¿Que cumple el papel de «preferido» y recibe su premio? (Tanto el profesor como sus compañeros saben que no es tan excelente como indica la nota).
  - ¿Que su exposición, comparándola con las de sus compañeros, fue la mejor? (Aunque no sepamos qué calificación habría recibido si todos hubieran estudiado por igual y mostrasen el mismo interés por aprender).
  - ¿Que, comparado con el resto de alumnos, conoce realmente la materia de modo muy satisfactorio?
  - ¿Que se ha esforzado en aprender la materia y aunque la exposición no fue de lo mejor, el profesor premia su esfuerzo con la nota más alta?
  - ¿Que es un brillante escritor, y que, aunque sus informaciones no son tan exactas ni tan profundas, impresiona a su profesor con un lenguaje vivaz e ininterrumpido, recompensándole éste, la mayoría de las veces, con la nota más alta?
  - ¿Que su profesor suele poner notas altas, o sea, que sólo usa las categorías superiores de la escala?
- Evitar el «efecto de halo», que produce el conocimiento general del o de lo evaluado y que por tanto, inhabilita la veracidad de las valoraciones del evaluador. Tanto la observación como el juicio crítico que determinen la existencia y medida del rasgo observado, serán lo suficientemente claros y sensatos como para suponer la fiabilidad de la información que suministren.

- Procurar que, siempre que sea posible, intervenga más de una persona en el proceso de calificación. Parece razonable que el trabajo cooperativo proporcionará resultados más eficientes que el individual, fomentará la objetividad y contribuirá a evitar algunos de los defectos típicos como, por ejemplo, el efecto halo, la elección inadecuada de rasgos o de categorías, la ambigüedad en las definiciones, o en general, la parcialidad de los enfoques. Hechos como el que relata Víctor García Hoz [775] (p. 23) refuerzan la idea del trabajo evaluador cooperativo: en una Universidad de Madrid, dos profesores de la misma asignatura, con dos grupos de un mismo curso de Facultad y en un mismo año, proporcionaron juicios tan dispares, como que según uno, el porcentaje de suspensos fue 0 y según otro el 38 por ciento. (Aunque esto también ocurre interviniendo más de una persona, si hay más de un tribunal: tanta es la diferencia de notas, que la única explicación posible es que un tribunal haya examinado a los tontuelos, mientras que el otro lo haya hecho con los listillos). Solución: tribunales únicos o sistemas de corrección múltiple inter-tribunales.

- Procurar, siempre que sea posible, utilizar más de un instrumento de medición de los aprendizajes, de manera que se obtenga una mayor riqueza informativa.

- Eliminar la sabiondez en el evaluador, por ejemplo, no deberían señalarse por aproximación aquellas categorías que no fueron observadas, sino más bien anotar el porqué de su no observación.

6.22.3 ¿Y las destrezas de ejecución?: a vueltas con las pruebas funcionales

«Dice este investigador [A. Bodin], en su monografía citada [[776]], que, por ejemplo, a propósito del objetivo "saber calcular la superficie del triángulo", prácticamente todos los alumnos saben enunciar la regla o fórmula para su obtención. Mas sólo un 70% de entre los alumnos de doce años, sujetos de sus investigaciones, eran capaces de aplicar la fórmula enunciada a un triángulo, una vez dadas su base y su altura. Sólo un 46% era capaz de aplicarla al mismo triángulo, pero dibujado sobre una hoja de papel y teniendo que utilizar una regla milimetrada para averiguar sus dimensiones. El porcentaje de alumnos capaces de realizar la tarea se reduce al 20%, si en el triángulo dibujado la altura no corta a la base (si la vertical trazada desde el vértice superior cae "fuera del" triángulo), siendo escandalosamente alto el número de alumnos que ni siquiera reconocen en la figura un triángulo, si éste se les presenta visualmente invertido (el vértice superior abajo y la base en la parte superior). A partir de estas constataciones empíricas, el investigador se pregunta, radicalmente: "¿Quién puede decidir, pues, si los alumnos saben o no calcular la superficie de un triángulo?", pregunta sensata desde la perspectiva del residuo de indeterminación técnica, que yo reformulo desde la perspectiva del residuo de indeterminación semántica: si esto es así, ¿quién puede decir qué significa "saber calcular la superficie del triángulo"?»

—Miguel Fernández Pérez [22] (p. 865)

Hemos de definir las fronteras del dominio de maestría respecto al cual deseamos evaluar a los sujetos. Hemos de destacar las tareas más significativas de dicho dominio y probar a los trabajadores en esas tareas, de forma que nos sea posible inferir la proporción de tareas que es capaz de desempeñar eficazmente el individuo.

A tenor de lo expuesto, mas ahora relativo a pruebas funcionales, apuntamos lo que sigue.

El sujeto debe realizar una actividad real o «muy próxima» a la realidad, de manera que se compruebe su eficacia en su ejecución. Se evaluan los procesos, esto es, las secuencias de tareas o subtareas intervinientes en la ejecución, y los productos, sean tangibles o intangibles, que se logran mediante tales procesos.

Las pruebas de ejecución, sin duda parecen proporcionar mayor información que otro tipo de pruebas. Mediante ellas, es posible evaluar el final de cualquier etapa de formación. Es posible evaluar factores como la integración o el grado de cooperación en el trabajo de un grupo o de un equipo. Parece un tipo de pruebas muy adecuada para medir el desempeño de tareas.

En relación a las conductas interactuantes en una prueba funcional o de ejecución, hay que identificar, describir y fijar criterios respecto de su ausencia o presencia o del grado de excelencia que manifiestan —*cfr.* Lafourcade [772] (pp. 159-160)—. Ryans y Frederiksen [777] (cap. 12) distinguen tres tipos de prueba, según se requiera del evaluado:

- Que identifique o reconozca la adecuación de un procedimiento, el uso adecuado de una herramienta, etc. Por ejemplo: «¿Qué tipo de escofina o gubia es el más adecuado para terminar un desbastado?», «¿Qué software usarías para componer un libro si al final debes casar las páginas en cuadernillo?», «¿Qué escopladura es la que tú aconsejarías para hacer esto?»

- Que ejecute una tarea bajo las condiciones simuladas en pequeña escala. Por ejemplo, si estamos buscando a un instalador de redes, podría pensarse en una prueba funcional donde sólo participen cuatro ordenadores, tres en red, y un cortafuegos para el servidor. Esta sería una prueba a pequeña escala, donde las actividades y operaciones que ejecutará el examinando se corresponden con las que, tendría que hacer en modelos de redes a mayor escala, con mayor número de servidores, varias redes compartidas, etc.
- Que lleve a cabo una cierta tarea muy representativa de los objetivos que deban evaluarse. Por ejemplo: «Tienes instalados `Adobe Pagemaker`, `Quark X Press`, `Corel Suite` y `Microsoft Word`. Debes, con el software que creas oportuno, en 15 minutos, elaborar un diseño de un boletín comercial para la empresa PAMICOCHI, que fabrica X, a dos columnas, tamaño A5, en doble A4 horizontal, casado en cuadernillo. No converse ni pida ayuda a sus compañeros de trabajo. No pierda tiempo innecesariamente, tiene justo el que necesita.»

La cuestión difícil en este tipo de pruebas reside en su interpretación. Por ejemplo, si se ha solicitado confeccionar un cartel publicitario, ¿cómo se mide la perfección del diseño, de su composición, de los dibujos y gráficos que aparezcan, del tipo y tamaño de letra elegido, etc.? Si para evaluar la calidad de la composición un rasgo relevante es el equilibrio en la misma, seguramente que evaluadores diferentes emitan distintos juicios de valor. Este tipo de pruebas sí que puede acentuar el «efecto ego» en los evaluadores, o sea, el calificar con mejores puntuaciones aquellos procesos y productos con los que se identifiquen con su ejecución y realización.

6.22.4 Un aprobado «no clásico»

No nos olvidemos de la relación existente entre las bolas correspondientes a diferentes distancias —*cfr.* Fig. 6.13—. Si $2 < n < m < \infty$ y $2 < q < p < \infty$, se tiene:

$$B^2_\infty \subset B^2_p \subset B^2_q \subset B^2_2 \subset B^n_{(2)} \subset B^m_{(2)} \subset B^2_1 \tag{6.203}$$

por lo que las distancias $d(\langle x, y\rangle, 1)$, con $x \neq y$, satisfacen:

$$d^2_1 < d^m_{(2)} < d^n_{(2)} < d^2_2 < d^2_q < d^2_p < d^2_\infty \tag{6.204}$$

y los índices de similitud:

$$s^2_\infty < s^2_p < s^2_q < s^2_2 < s^n_{(2)} < s^m_{(2)} < s^2_1 \tag{6.205}$$

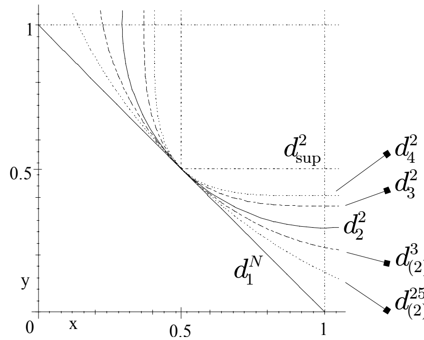


Figura 6.13: *Tercer cuadrante relativo al origen* $(1, 1)$. *La recta representa un trozo de la correspondiente a la distancia* d_1, *cuya bola es la mayor, al ser la que proporciona valores más pequeños. Observemos cómo, a medida que es mayor el* α*-percentilado, las distancias* α*-percentiladas se alejan del punto* $(1, 1)$.
— *Fuente:* Elaboración propia.

Por lo general, se usa el índice de similitud s^2_1 (correspondiente a una media aritmética), y una de las razones que se esgrimen es que usar cualquier otro significa asignar una similitud menor al mismo punto que se esté evaluando (y por tanto una nota menor).

Observemos que los nuevos índices que proponemos $s^N_{(2)}$, asignan una similitud intermedia, acotada superiormente por el «clásico» s^2_1, e inferiormente por s^2_2. Además, a medida que se aumenta el percentilado, los índices $s^N_{(2)}$ se aproximan más a s^2_1.

Si calificásemos según $s_{(2)}^N$, esto significaría que la correspondiente noción de aprobado se aproximaría cada vez más, a medida que aumentásemos el percentilado, a la noción de aprobado clásico, proporcionada por s_1^2.

6.22.5 Digresión numérica: mínimo conocimiento compensatorio

Supongamos que una evaluación consta de dos criterios (dos parciales, dos bloques temáticos, etc.). Imaginemos que una calificación es 0.9.

Supongamos que trabajamos con alguna métrica percentilada de MINKOWSKI. Si una calificación es c, entonces la otra ha de ser solución de la inecuación:

$$\lim_{N\to\infty} s_2^N((c,x),(1,1)) \geq 0.5 \tag{6.206}$$

es decir, el par (c,x) debe ser similar (en el sentido de próximo, cercano) al ideal $(1,1)$. Pero a la vez, el par (c,x) debe ser disimilar (lejano) del anti-ideal $(0,0)$. Es decir, debe satisfacer la ecuación:

$$\lim_{N\to\infty} d_2^N((c,x),(0,0)) > 0.5 \tag{6.207}$$

Se tiene por tanto que (c,x) es solución del sistema de inecuaciones:

$$1-\left(\frac{|c-1|^p (c-1) - |x-1|^p (x-1)}{((c-1)-(x-1))(p+1)}\right)^{1/p} \geq 0.5 \tag{6.208}$$

$$\left(\frac{|c|^p c - |x|^p x}{(c-x)(p+1)}\right)^{1/p} > 0.5 \tag{6.209}$$

Por ejemplo, si se trata de algún percentilado de la métrica euclidea ($p=2$) y la calificación de una prueba es 0.9, entonces, el *punto mínimo «aprobatorio»* correspondiente a la otra prueba es $x \geq 0.1883$ (la lejanía del anti-ideal se traduce en la tautología $x > -0.725$).

En el caso extremo, si una calificación es 1 (la máxima), entonces, la otra debe ser $x \geq 0.1866$.

Pero la calificación x depende de los valores concretos de p y N. La Tabla 6.11 muestra las calificaciones «finales» para diferentes valores de x (según diferentes valores de p y N).

x	s_1^2	s_2^2	s_2^4	s_2^{14}
.45	.675	.6047	.6343	.6463
.40	.650	.5699	.6035	.6172
.35	.625	.5350	.5726	.5880
.30	.600	.5000	.5417	.5588
.25	.575	.4650	.5108	.5296
.20	.550	.4299	.4798	.5004
.15	.525	.3948	.4489	.4711
.10	.500	.3597	.4178	.4418

Tabla 6.11: *Calificaciones finales, según las métricas d_1 y d_2 de* MINKOWSKI, para los conjuntos de calificaciones iniciales $\{.9, x\}$.
—*Fuente:* Elaboración propia.

Por ejemplo, utilizando s_2^2, si una calificación es 0.9, podríamos considerar «aprobado» siempre que la otra calificación sea mayor o igual que 0.3.

A modo de ejemplo mostramos en la Tabla 6.12, algunas calificaciones para las que el indicador de similitud es igual al umbral mínimo, o sea, soluciones de la ecuación

$$s_2^N(.9, x, 1, 1) = 0.5 \tag{6.210}$$

para diferentes tamaños N de percentilados. Podemos denominarlos «puntos de corte».

Observemos, además, que tratándose de la codistancia euclidea clásica s_2^2, si en vez de 0.9, una calificación ha sido 1 (la máxima), entonces la otra debe ser mayor o igual que 0.2929 (de nuevo la condición de lejanía respecto del anti-ideal muda en una tautología).

¿Es ésta una justificación métrica de nuestra exigencia habitual como profesores, de un mínimo de conocimiento en las diferentes áreas temáticas que evaluamos, al considerarlas partes inseparables de un todo?

$s_2^N(.9, x, 1, 1) = .5$	
N	x
2	.3000
3	.2516
4	.2325
10	.2041

Tabla 6.12: *Diferentes soluciones «puntos de corte»para la ecuación planteada.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

6.22.6 A por los interfaces hombre-método

Pero, tanto número puede confundirnos. Tanto que se invierte en desarrollar interfaces hombre-máquina, también habría de pensarse en desarrollar interfaces hombre-método. La verdad es que lo que hemos propuesto en los puntos anteriores se desarrolla en una etapa anterior a la aplicación del método en sí. Una vez decidido cuál será la distancia con la que trabajemos, sólo hay que operar con ella.

La actualidad de la evaluación del alumnado se resume en su dicategorización: malo, si la calificación obtenida es menor que la mitad de la máxima calificación posible (MCP) y bueno, si la calificación obtenida es mayor o igual que la MCP.

En la Universidad, como norma, nos olvidamos de sobrecategorizar las calificaciones de aquellos alumnos que obtienen notas bajas (suspensos). Mientras que sobrecategorizamos las calificaciones altas (aprobados) en simplemente altas, notablemente altas, sobresalientemente altas y óptimamente altas, las bajas sólo son bajas.

En realidad, en todos los países se distingue entre diferentes categorías aprobatorias. Pero dependiendo del país, se distinguen o no, categorías desaprobatorias. En España, depende del nivel educativo. En la Universidad, como hemos dicho, no. En Enseñanzas Medias, en la ESO se distinguen las categorías: insuficiente, aprobado, bien, notable y sobresaliente. En lo que no es LOGSE, las categorías se identifican mediante números naturales, de 0 a 10.

Pero, ¿por qué no tricategorizar?: malo (C), si la calificación obtenida es menor que la tercera parte de la MCP; regular (B), si su calificación es mayor o igual que MCP/3 y menor que 2MCP/3; y bueno (A), si es mayor o igual que la MCP. Es decir:

¿Por qué no nos olvidamos de la MCP y calificamos como se hace en educación infantil: mal, regular y bien?

Claro que parece que necesitemos un mayor número de calificaciones. Entonces:

¿Por qué no utilizar la misma tricategorización en cada categoría?

Podemos asegurar que, dentro de lo malo, lo hay:

malo malo,

malo, y

malo no tan malo (algo así como bueno dentro de lo malo).

Algo parecido ocurre con las categorías mediano y bueno. Es decir:

¿Por qué no subcategorizar cada categoría bajo el mismo criterio de categorización del universo?

Las denominamos **categorías autosemejantes**.

Notemos malo, mediano y bueno, mediante las letras C, B y A, respectivamente. Distinguiríamos así $3^2 = 9$ calificaciones diferentes: CC, CB, CA, BC, BB, BA, AC, AB y AA. Si hiciésemos lo mismo una vez más, es decir, si acordamos calificar con una tríada ordenada, de manera que, por ejemplo, una calificación CBA significa que el alumno o alumna es:

«de los buenos (A) entre los medianamente (B) malos (C)»

pudiendo ser representada esta afirmación como un conjunto borroso.

De este modo, podemos utilizar un total de $3^3 = 27$ calificaciones borrosas: CCC, CCB, CCA, CBC, CBB, CBA, CAC, ..., AAC, AAB y AAA. Pensamos, en la medida en que nos conocemos, que un mayor número de categorías no aporta nada nuevo. La Tabla 6.13 muestra una lista ejemplo de este tipo calificaciones.

Pensamos que es importante que se use la misma partición (en nuestro ejemplo, una tripartición) para medir en las categorías y en las subcategorías. Pero no es necesario. Sólo facilita la tarea.

El examen de selectividad, actualmente, sólo puede calificarse con 21 notas: 0, 0.5, 1, 1.5, ..., 9.5, 10 (y

Calificaciones provisionales de IP-7	
Juan Derrochón de Cuartos	BCC
Jacinto Máximo Amable	ABA
Pedro del Bosque Animado	BBA
María del Mediterráneo Limpio	AAA
Felipe del Barco de Libros	CCB
Carmen Siempre Precisa	BAC

Tabla 6.13: *Ejemplo de listado de calificaciones resultantes de la utilización de una categoría autosemejante trivalente de orden* 3.
—*Fuente:* Elaboración propia.

siempre con redondeo al alza). Varias jerarquías se ajustan a este hecho: $10-2$, $2-10$, $5-4$, $4-5$, $5-2-2$, $2-5-2$, y $2-2-5$. Por ejemplo, esta última:

Jerarquía $2-2-5$:

El primer 2 corresponde a la tarea de diferenciar entre exámenes que serán calificados con una nota baja (B) y otros que serán calificados con una nota alta (A), el segundo 2 significa que dentro de cada una de las categorías anteriores tenemos que hacer la misma diferenciación, obteniendo un total de cuatro categorías: BB, BA, AB y AA. Finalmente, el 5 indica que en cada una de estas cuatro categorías debemos diferenciar 5 subcategorías, por ejemplo: baja (B), menos baja (mB), normal (N), menos alta (mA) y alta (A) . De este modo obtenemos un total de 20 categorías: BBB, BBmB, BBN, ..., AAmA, AAA (además de una categoría extraña, correspondiente a la calificación numérica 0).

Si, querido lector, te parecieron demasiadas categorías las de estos ejemplos, esperamos que no seas de aquellos que califican a sus alumnos con dislates tales como $7,734$ (siete con setecientos treinta y cuatro), pues **tan artificioso engendro** implica ser un experto taxónomo, perfecto conocedor de **diez mil tipos diferentes de alumnos**. Y, sin ánimo alguno de ofenderte, decirte que estamos absolutamente convencidos de que no eres capaz de consumar tan desproporcionada distinción. La realidad es que no lo afirmamos nosotros, sino que existen muchísimos estudios psicológicos, según los cuales, se ha concluido que el ser humano es capaz de discriminar, simultáneamente, como media, *únicamente* 7 ± 2 categorías —*cfr.* Miller [774]; aunque Brent Berlin y Paul Kay [778], tras examinar unas 90 lenguas, concluyeron que, como mucho, hay 11 categorías de color en cada lengua (cfr. pág. 278 de esta Tesis).

El *yerro del entendido*[35] (por no decir del necio): como maquinal que es, **el procedimiento discrimina** entre 10.000 categorías, pero, como ser humano que es, **el usuario del procedimiento es incapaz de interpretar** esas 10.000 categorías.

Lo que te ocurre, por supuesto que sin darte cuenta, es que no lo haces simultáneamente. Pero entonces, querido lector, piensa que **has perdido la visión de conjunto** (ves árboles, pero no ves el bosque). Al menos, piensa en ello. GRACIAS.

Para encontrar argumentos y experiencias a favor de considerar pocas categorías de gradación, evitando así aspirar a una exactitud, a nuestro parecer, inexistente, para el evaluador, pueden leerse las opiniones de: Ruch [779] (pp. 369-402), J. Wayne Wrightstone [773] (pp. 961-964), Pedro D. Lafourcade [772] (pp. 171 *et passim*), o de Paul A. Goring [780] (pp. 13-17 y 154 *et passim*), mientras que una reflexión en contra puede encontrarse, por ejemplo, en el libro de Robert L. Ebel [781] (pp. 421-424) (pero sólo en el caso del sistema centesimal, con únicamente $100+1$ categorías y no diez mil, como ocurría en nuestro ejemplo).

De hecho, nosotros, a la hora de evaluar a nuestros alumnos, también pecamos de uso de bastantes categorías: utilizamos 21; sintácticamente las mismas que en selectividad, pero no semánticamente. Nos valemos de la escala:

cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis

y la subescala:

bajo, medio, alto

para graduar cada uno de los escalones principales.

Lo único que podemos decir es que pensamos mejor así que con las 21 notas «clásicas»: 0, 0.5, 1, 1.5, ..., 9.5, 10.

[35] Descuido o error cometido por alguien juicioso o experto, y que por consiguiente suele tener cierta trascendencia (DRAE).

6.22.7 ¿Aritmetización?

Por mor de ley, las calificaciones no pueden venir dadas como en la Tabla 6.13. Debemos aritmetizar tales calificaciones.

Pensemos en la métrica euclidea s_2^2. Terminando la sección 6.22.5, y en referencia a esta métrica s_2^2, asociábamos a la calificación máxima de 1, una calificación mínima de $0,2929$ para poder «aprobar».

Este dato numérico puede traducirse como el conjunto borroso (notación de ZADEH):

$$0 \cdot \mathsf{CCC} + ... + 0 \cdot \mathsf{CAC} + 0,0917 \cdot \mathsf{CAB} + 1 \cdot \mathsf{CAA} + ... + 1 \cdot \mathsf{AAA} \tag{6.211}$$

de forma que si un examen consta de dos partes, si en una, la calificación ha sido AAA, en la otra debe, como mínimo, «rozar» CAA.

Supongamos, pues, que las calificaciones de un alumno son AAA y CAA. La calificación numérica global «final» es el resultado de eliminar la borrosidad del conjunto borroso medio, posiblemente ponderado según la relevancia de cada área temática, de ambos:

$$\frac{\mathsf{CAA} + \mathsf{AAA}}{2^w}(x) = w_1 \mathsf{CAA}(x) + w_2 \mathsf{AAA}(x) \tag{6.212}$$

siendo $w_1 + w_2 = 1$. Esta eliminación de la borrosidad puede realizarse mediante cualquier procedimiento estándar (centroide, altura, etc.) —*cfr.* 4.7.3.

En muchas ocasiones la ponderación es necesaria. En todo caso, evita que factores de menor peso *de facto*, aunque igualmente imprescindibles, decidan una posición en la ordenación global «final».

No obstante, hacer una media es tan malo como tan bueno es no hacerla. Coincidimos con Pedro D. LAFOURCADE [772] (p. 241) en que la ventaja de no hacerla es que cualquiera puede conocer la posición del alumno en las diferentes pruebas, suponiendo que éstas sean representativas de las diferentes metas a conseguir en la enseñanza de la materia en cuestión.

Como nos recuerda Paul A. GORING [780] (pp. 13-17), la evaluación del rendimiento escolar sólo puede aspirar a conseguir una ordenación entre estudiantes, a una medida ordinal.

6.22.8 Representación borrosa de un proceso sumativo de evaluación cuantitativa

Consideremos genéricamente un proceso de evaluación cuantitativa, donde se han evaluado m pruebas. El proceso se representa por un conjunto Φ_1-borroso:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \sum_{i=1}^{m} O_i/P_i \\ &= [u_1, 1]/P_1 + \ldots + [u_m, 1]/P_m \end{aligned} \tag{6.213}$$

Habitualmente, $u_1 = u_2 = .5$. El resultado ideal, en el sentido de la perfección absoluta, sería:

$$\check{\mathcal{P}} = 1/P_1 + \ldots + 1/P_m \tag{6.214}$$

Si las calificaciones son numéricas, $c_i \in [0,1]$, y el proceso es sumativo, y suele tomarse su media aritmética como calificación final, lo que corresponde a hallar la co-distancia:

$$1 - d_{(1)}^m((\min_{i \in \mathbb{N}_m}(c_i), \ldots, \max_{i \in \mathbb{N}_m}(c_i)), 1) \tag{6.215}$$

No debe olvidarse que, en general, no tenemos por qué elegir una media aritmética (las pruebas pueden considerarse de desigual importancia), ni todas las disimilitudes tienen que ser las mismas:

$$\delta\left(\langle\langle c_0^{(1)}, c_1^{(1)}\rangle, \ldots, \langle c_0^{(m)}, c_1^{(m)}\rangle\rangle, \langle\langle 1,1\rangle, \ldots, \langle 1,1\rangle\rangle\right) = \text{Agregación}_{i=1}^m \delta_i(\langle c_0^{(i)}, c_1^{(i)}\rangle, \langle 1,1\rangle) \tag{6.216}$$

Por suponer, supongamos que el proceso de evaluación se representa por un conjunto Φ_1-borroso de tipo 2, es decir la valoración de función de pertenencia viene dada por intervalos de competencia de tipo 2:

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{m} [[u_0^{(i)}, u_1^{(i)}], 1]/P_i \tag{6.217}$$

y que las calificaciones vienen dadas por intervalos $[c_0^{(i)}, c_1^{(i)}] \subseteq [0,1]$. Entonces, podría tomarse como calificación final la media aritmética de todas ellas, calculada como la co-distancia:

$$\begin{aligned} \mathrm{CF}([c_0^{(1)}, c_1^{(1)}], [c_0^{(2)}, c_1^{(2)}], \ldots, [c_0^{(m)}, c_1^{(m)}]) &= 1 - \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} d_{(1)}^2(\langle c_0^{(i)}, c_1^{(i)}\rangle, 1)\right) \\ &= 1 - d_{(1)}^{2m}(\langle \min_{i \in \mathbb{N}_m}(c_0^{(i)}), \ldots, \max_{i \in \mathbb{N}_m}(c_1^{(i)})\rangle, 1) \end{aligned}$$

6.22.9 Síntesis reflexiva

Como nos recuerda Paul A. GORING [780] (pp. 13-17), la evaluación sólo puede aspirar a conseguir una ordenación entre los evaluados, esto es, a una medida ordinal. Hacer una media es tan malo como tan bueno es no hacerla. Coincidimos con Pedro D. LAFOURCADE [772] (p. 241) en que la ventaja de no hacerla es que cualquiera puede conocer la posición del alumno en las diferentes pruebas, suponiendo que éstas sean representativas de las diferentes metas a conseguir en la enseñanza de la materia en cuestión.

Sin embargo, no debemos caer en la antigua confusión entre medición y evaluación. La evaluación es una interpretación de una medida (o medidas) en relación a una norma ya establecida, por la que se trata de diagnosticar el alcance del aprendizaje logrado por los estudiantes —*cfr.* LAFOURCADE [772] (p. 21).

Es innegable que para evaluar los aprendizajes debemos disponer de instrumentos y técnicas que provean o complementen datos sobre el rendimiento y progreso de los alumnos. Instrumentos que, además, ayuden a superar los nada extraños **errores conceptuales**, también conocidos como *concepciones alternativas*, *nociones ingenuas*, *nociones pre-científicas*, o *jerarquías proposicionales limitadas o inapropiadas* (*Limited or Inappropriate Propositional Hierarchies*, LIPH) —*cfr.* GONZÁLEZ GARCÍA, MORÓN ARROYO y NOVAK [742] (p. 221 *et passim*)— (véase Fig. 6.10). En la sección 6.22.1 mostramos algunos ejemplos de herramientas de representación del conocimiento que se utilizan para facilitar estas tareas.

Se ha desarrollado e implementado un número ingente de diseños evaluadores, pero las mayores distancias entre ellos giran en torno a cuestiones difíciles como —*cfr.* ROMERO MORANTE [782] (pp. 212ss): ¿quién promueve la evaluación?, ¿para qué se realiza?, ¿qué funciones cumple y a qué intereses sirve?, ¿quién evalua y cuál es su papel ante las personas participantes en el programa?, ¿qué se evalúa?, ¿de acuerdo con qué criterios se juzgará su valor?, ¿cómo se relacionan las interpretaciones de los resultados por parte de los evaluados, los evaluadores, y posiblemente, investigadores o consultores?, ¿a quién pertenecen los resultados?, ¿qué uso se les va a dar, y por parte de quién?, ¿cómo se tomarán decisiones a partir de los resultados de la evaluación?, etc. Y, por supuesto, ¿cómo construir las escalas de calificación? 8.17.

En este estudio hemos reflexionado, principalmente, sobre: las dificultades de evaluar los aprendizajes (§6.22.2), el diseño de pruebas funcionales, la evaluación de las destrezas de ejecución y la evaluación de procesos frente a la de productos (§6.22.3), aprobados «no clásicos» como resultado de emplear diferentes distancias o disimilitudes (§6.22.4), puntos mínimos aprobatorios y mínimo conocimiento compensatorio (§6.22.5), número de categorías a tener en cuenta, categorías autosemejantes para una calificación humana y potenciación de interfaces hombre-método (§6.22.6).

Todo ello tiene su continuación en varias secciones posteriores de nuestra Tesis: §16 , en §6.22.1ss. *et passim*, y §17 *passim*, y en una experiencia real (§9 y §15.4,*et passim*).

Observa, finalmente, querido lector, que encontrar el significante[36] de un concepto es una decisión. Aún más, el significado del significante puede que no corresponda plenamente al concepto. Según CHURCHMAN:

> *«El significado que se asigna a un concepto es una decisión asignada para servir ciertos intereses.»*
> —C. CHURCHMAN [81]

Y además de distinguir entre sintaxis y semántica, debemos distinguir entre extensión (el objeto o conjunto de objetos al que se refiere un término) e intensión (el modo concreto en que se escoge o se determina ese objeto o ese conjunto de objetos) de un término. En fín, hay un paralelismo: la extensión, como pura enumeración, es algo sintáctico; la intensión es significado: «triángulo equilátero» y «triángulo equiángulo» tienen la misma extensión, pero distinta intensión —*cfr.* DENNETT [151] (p. 53)—. Desde luego, son dos conocimientos diferentes, por lo que habrá que aclarar cual ha de evaluarse (aunque algunos digan que es una cuestión de matices, sin alterar lo sustancial).

Si bien WHITE [79] (p. 20) duda si CHURCHMAN quiere decir elección cuando dice decisión, lo relevante para nosotros, es que, distinguiendo significante, significado y concepto, asumimos su afirmación, y por tanto la decidibilidad parcial[37] de cualquier decisión acerca del conocimiento o aprendizaje de un concepto. Mejor

[36] **significante.-** w m. LING. Según Ferdinand de SAUSSURE, manifestación material y concreta del signo lingüístico, serie de fonemas o de letras que constituye el soporte del signo lingüístico y que remite a un concepto, el significado.

[37] Dado un predicado $\alpha(x)$, se denomina *función característica parcial positiva* a:

$$C_\alpha^+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha(x) \\ \text{no definida} & \text{si } \neg\alpha(x) \end{cases}$$

Se dice que un **predicado** $\alpha(x)$ es **parcialmente decidible**, precisamente si su función característica parcial positiva es computable. Cualquier algoritmo A que compute C_α^+, se denomina **procedimiento de semidecisión** o **decisión parcial** para α. Dado x, A proporciona respuesta afirmativa si se satisface $\alpha(x)$, pero no proporciona respuesta, si no se satisface, es decir el programa correspondiente no finaliza.

deberíamos hablar de conocimiento o aprendizaje del significado de un concepto. Las decisiones acerca de ello son potencialmente decidibles —nos referimos a su modalidad, a la existencia de un mundo, en cuanto ámbito local, en el que suceda su meta-decidibilidad—. Su decidibilidad actual depende del método de evaluación de tal conocimiento o aprendizaje. Además, seguramente habrá un mundo para cada decisión, para cada aprendiz, y para cada tiempo. A falta de un método óptimo, permanecemos en su semidecidibilidad[38].

6.23 Resumen del capítulo

El material contenido en este capítulo, es original, salvo los indispensables conocimientos previos sobre los que se asientan las discusiones y propuestas, y que se encuentran fundamentalmente en las secciones §6.3, §6.5.1, §6.6, §6.8, §6.9, §6.18.1 y §6.21.

Para que una medida de disimilitud, distancia, etc., sea de utilidad en un entorno de trabajo, debe existir una gran correlación entre los valores numéricos y los juicios subjetivos sobre las distancias medidas. Esta correlación expresa la cohesión, coherencia y consistencia, que existe entre su representación sintáctica y su interpretación semántica, como discutiremos de inmediato en §6.2. Lo cierto es que se trata de un problema difícil el de aunar la expresividad y significación subjetiva con la propiedad de ser matemáticamente tratable. Las soluciones de compromiso son inevitables. Asimismo, el problema se agrava por lo subjetivo del propio acto de aunamiento.

En §6.7, §6.8 y §6.9, presentamos ejemplos de distancias y métricas, y situaciones de no discernibilidad, cuando para comparar intervalos, sólo se tienen en cuenta, como clásicamente, sus puntos extremos. En §6.10 consideramos, además de los puntos extremos, el punto medio, viendo en §6.11, ejemplos de intervalos no discriminables aunque usemos estos tres puntos, aunque atisbando un principio de solución.

En §6.12 elaboramos la definición de α-percentilado en retículos, y en particular en el retículo normado de los números reales. Definimos las familias de métricas α-percentiladas de MINKOWSKI e ilustramos lo dicho definiendo índices de borrosidad basados en estas distancias. Y como el α-percentilado no sólo tiene por qué ser lineal, como ejemplo de alternativa, en §6.14, introducimos el α-percentilado poligonal.

En §6.15, estudiamos los que denominamos intervalos y líneas de confusión para las métricas α-percentiladas de MINKOWSKI, es decir, donde se confunden (igualan, intersecan). En §6.16 definimos la métrica de HAUSDORFF α-percentilada y en §6.17 las de otras medidas de comparación, aunque en las experiencias llevadas a cabo no se aprecian ventajas en el uso de los percentilados para ninguna de las nueve medidas revisadas en §6.9.

En nuestra realidad física, esto no es así, pues todo sistema material parará, antes o después, por *degeneración termodinámica*. No obstante, podría argüirse que el sistema no ha parado, sino que ha desaparecido, dejando de existir como tal sistema computacional (material). Aunque esta segunda interpretación implicaría la no existencia del equivalente físico de los *programas universales*, para cualquier aridad, pues éstos no desaparecen (a nivel teórico, abstracto, siempre existen, pues no están sujetos a restricciones espacio-temporales). Parece que no podemos evitar concluir que cualquier computador físicamente realizable, o peor aún, humanamente manejable, está sujeto a determinadas restricciones físicas, que parece que marcan las diferencias con cualquier programa universal.

Los modelos abstractos de computación actuales, si se expresan con una cinta de registros, requieren una cinta *finita pero infinitamente extensible*, según el número de registros necesarios para efectuar una nueva computación, en definitiva, una cinta no acotada por el tamaño de la entrada.

En el entorno teórico en el que estamos, la inmensidad de los números no afecta a su computabilidad, pues suponemos que disponemos de infinitos registros, en otras palabras de memoria infinita; no obstante, si pensamos que el número de átomos del universo conocido se estima en 10^{80}, número considerablemente menor que 2^{320}, entonces, ... Hay acuerdo en llamar *sistema inmenso* a cualquier sistema de 10^{80} o más componentes. ¿Es computable un sistema inmenso? No podemos construir una lista con los primeros 10^{80} números naturales por la sencilla razón de que ni siquiera representando cada número en un átomo sería posible. Por otro lado, según los modelos actuales, el número de funciones computables es $\aleph_0$ (infinito numerable, tantas como números naturales). Sin embargo, 10^{80} es una cantidad infinítamente pequeña, absolutamente despreciable, comparada con el número total de números naturales ($\aleph_0 - 10^{80} = \aleph_0$). Sin embargo, trabajamos con estas cantidades, y no nos remuerde la conciencia.

Ningún computador físico, real, dispone de una memoria infinitamente extensible. Existe este *límite de inmensidad* comentado. Cualquier computador físico, tendrá una memoria finitamente extensible (claro que siempre que el número de átomos en el Universo sea finito).

Pero no sólo eso, la *potencia de computación* es menor o igual que un supremo, impuesto por las leyes de la Física, dependiente de la masa del sistema, de la velocidad de la luz y de la constante de PLANCK. Las potencias de computación actuales están lejísimos de tal supremo.

En la implementación física surgen muchísimos problemas. Por ejemplo, han existido *problemas de comunicación entre componentes*, dependiendo de ciertas proporciones entre el tamaño del sistema y el de sus componentes. Se han construido ordenadores cilíndricos para reducir distancias entre componentes. Por encima de un determinado tamaño, la comunicación se desincroniza, teniéndose que añadir nuevos componentes re-sincronizadores, pero éstos deben, a su vez, ser sincronizados por otros nuevos componentes, y así, sucesivamente.

[38] Las denominaciones *parcialmente decidible*, *semidecidible, positivamente decidible, parcialmente resoluble, semicomputable, recursivamente enumerable*, pueden considerarse sinónimos en Teoría de la Computabilidad.

En 6.18 hemos definido las disimilitudes α-percentiladas y ponderadas de MINKOWSKI —que notamos $d_w^\varphi(I, J)$—. En §6.19 hemos encontrado condiciones suficientes en el caso finito, para que estas disimilitudes α-percentiladas y ponderadas que hemos propuesto, o sea, las instancias de la solución de la Ec. (6.154), sea una pseudodistancia (Teorema 100.i), una distancia (Teorema 100.ii), y una métrica (Teorema 108), en el espacio de intervalos considerado. En §6.19.1 hemos logrado identificar una subclase de φ-métricas basada en subaditividad, mientras que en §6.19.2, una subclase de φ-métricas basada en concavidad.

Es el momento de pasar del punto al intervalo; de representar mayores incertidumbres. Extendemos la idea de disimilitud entre intervalos, calculada a partir de disimilitudes locales entre puntos, a la idea de calcularla a partir de disimilitudes locales entre subintervalos de los intervalos originales. Proponemos para ello la definición de *intervalo* (α, β)*-percentílico* —*cfr.* §6.20.1—. En §6.20.2, proponemos un *esquema iterativo* de cómputo de $d_w^\varphi(I, J)$, construido utilizando intervalos (α, β)-percentílicos. Como un primer ejemplo ilustrativo, en §6.21, observamos que las quasi-normas de los espacios lineales complejos $\ell_q^N(\ell_p^M)$ $(M, N \in \mathbb{N};\ 0 < p, q \leq \infty)$ son un caso particular de las definidas por dicho esquema iterativo.

Como segundo ejemplo ilustrativo, reflexionamos sobre: las dificultades de evaluar los aprendizajes (§6.22.2), el diseño de pruebas funcionales, la evaluación de las destrezas de ejecución y la evaluación de procesos frente a la de productos (§6.22.3), aprobados «no clásicos» como resultado de emplear diferentes distancias o disimilitudes (§6.22.4), puntos mínimos aprobatorios y mínimo conocimiento compensatorio (§6.22.5), número de categorías a tener en cuenta, categorías autosemejantes para una calificación humana y potenciación de interfaces hombre-método (§6.22.6). Todo lo aquí visto continúa en los Capítulos 9, 15, 16 y 17.

7

Comparando subconjuntos borrosos

En este capítulo proponemos asignaciones de medida de comparación entre conjuntos borrosos, disimilitudes, algunas de ellas, métricas. Las unas, «horizontales», comparando conjuntos borrosos a partir de las diferencias entre los referentes —para lo que hemos supuesto que el universo de discurso es $\mathbb{R}$ o un retículo normado, de tal forma que los α-cortes son intervalos del retículo, y, en definitiva, comparamos conjuntos borrosos a partir de las comparaciones entre sus α-cortes, pudiendo utilizar las asignaciones de comparación entre intervalos propuestas en el capítulo anterior, para el caso de α-percentilado finito, infinito numerable y continuo—. Las otras, «verticales», referida al grado de «superposición» entre conjuntos borrosos. Como ejemplos ilustrativos, pensamos en el reconocimiento de queiremas aislados y en la comparación de figuras planas.

7.1 Comparando «horizontalmente» subconjuntos borrosos

7.1.1 Algún que otro antecedente

Dubois y Prade [783] propusieron un índice de comparación, con valoración borrosa, entre conjuntos borrosos:

$$IC(A,B) = \int \alpha / IC({}^{\alpha}A, {}^{\alpha}B) \tag{7.1}$$

definido a partir de los valores del índice de comparación para los α-cortes correspondientes. Es lo primero que conocemos publicado sobre una *comparación horizontal* entre conjuntos borrosos utilizando sus α-cortes.

Tras el intenso esfuerzo dedicado al desarrollo de los *espacios métricos probabilísticos* —cuyo origen se sitúa en los trabajos de Menger [474, 475], y Schweizer y Sklar [477]— y cuya motivación fundamental es la inexactitud de la distancia entre dos puntos, Kaleva y Seikkala [419] introducen el concepto de **espacio métrico borroso**, en respuesta a que dicha inexactitud se deba a razones de borrosidad mas que de aleatoriedad. En el ejemplo 3.2 de su artículo [419] (p. 222), Kaleva y Seikkala proporcionan la siguiente métrica borrosa entre números borrosos:

$$\begin{array}{rcl} d : \mathfrak{N} \times \mathfrak{N} & \longrightarrow & \mathfrak{N}^{+} \\ (A,B) & \longmapsto & d(A,B) = \begin{cases} |A-B| & \text{si } A \neq B \\ 0 & \text{si } A = B \end{cases} \end{array} \tag{7.2}$$

donde, si $A \neq B$, el valor absoluto $|A-B|$ se define mediante sus α-cortes:

$${}^{\alpha}(|A-B|) = [\max\{0, a_0^{\alpha} - b_1^{\alpha}, a_1^{\alpha} - b_0^{\alpha}\}, \max\{|a_0^{\alpha} - b_1^{\alpha}|, |a_1^{\alpha} - b_0^{\alpha}|\}] \tag{7.3}$$

La cuaternidad $(\mathfrak{N}, d, 0, \mathrm{Max})$ es un espacio métrico borroso.

Puri y Ralescu [683] generalizan la métrica de Hausdorff —*cfr.* Def. 74— al conjunto $\mathfrak{N}_C$ de números borrosos normales y compactos (α-cortes compactos). La función:

$$\begin{array}{rcl} d : \mathfrak{N}_C \times \mathfrak{N}_C & \longrightarrow & [0,1] \\ (A,B) & \longmapsto & d(A,B) = \sup_{\alpha>0} d_{\mathrm{HAUS}}({}^{\alpha}A, {}^{\alpha}B) \end{array} \tag{7.4}$$

donde d_{HAUS} es la métrica de Hausdorff, extiende ésta al espacio $\mathfrak{N}_C$. El par $(\mathfrak{N}_C, d)$ es un espacio métrico completo —*cfr.* Puri y Ralescu [683] (p. 416).

En la literatura aparecen más ejemplos de distancias entre números borrosos, definidas horizontalmente. Por ejemplo, DIAMOND [784] define una distancia entre números borrosos triangulares, con el formato diagonal de la métrica d_2 de MINKOWSKI, pero haciendo intervenir las modas, además de los extremos. Dados los números borrosos triangulares $A = (a^-, a^m, a^+)$ y $B = (b^-, b^m, b^+)$, define la distancia entre ellos mediante:

$$d(A,B) = \left(\left(a^- - b^-\right)^2 + (a^m - b^m)^2 + \left(a^+ - b^+\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.5}$$

Utilizando como distancia entre los α-cortes, la distancia de HAUSDORFF:

$$\psi\left(\langle a_0, a_1\rangle, \langle b_0, b_1\rangle\right) = \max\left\{|a_0 - b_0|, |a_1 - b_1|\right\} \tag{7.6}$$

o el índice de enmascaramiento (*dissemblance*) entre intervalos:

$$\psi\left(\langle a_0, a_1\rangle, \langle b_0, b_1\rangle\right) = \left(|a_0 - b_0| + |a_1 - b_1|\right)/2\left(\beta_2 - \beta_1\right) \tag{7.7}$$

(donde β_1 y β_2 son constantes arbitrarias para la normalización), Rami ZWICK, Edward CARLSTEIN y David V. BUDESCU [785] —*cfr. item* TZAFESTAS y VENETSANOPOULOS [786]— proponen utilizar como distancias entre dos números borrosos A y B las siguientes:

- *Media*:

$$\psi_1(A,B) = \int_0^1 \psi\left({}^\alpha A, {}^\alpha B\right) d\alpha \tag{7.8}$$

- *Supremo*:

$$\psi_\infty(A,B) = \sup_{\alpha \geq 0} \psi\left({}^\alpha A, {}^\alpha B\right) \tag{7.9}$$

- *Conjunto nivel-1*:

$$\psi_*(A,B) = \psi\left({}^1 A, {}^1 B\right) \tag{7.10}$$

En esta última, no se recorren todos los α-cortes, sino que sólo se usan los núcleos. Ayumi YOSHIKAWA [787] propone utilizar también las siguientes:

- Ínfimo:

$$\text{GLB-FDL1}(A,B) = \inf_{a \in {}^1 A, b \in {}^1 B} |a - b| \tag{7.11}$$

- Supremo:

$$\text{LUB-FDL1}(A,B) = \sup_{a \in {}^1 A, b \in {}^1 B} |a - b| \tag{7.12}$$

De sabor también horizontal, pero distinto, es usar los centros de gravedad —*cfr.* Def. 16 (pág. 63)— (también, p. ej., YOSHIKAWA [787]):

$$\text{Dist-gc}(A,B) = |G(A) - G(B)| \tag{7.13}$$

o:

$$\text{V}(A,B) = \left((|A| - |B|)^2 + (\text{Dist-gc}(A,B))^2 \right)^{1/2} \tag{7.14}$$

donde $|A|$ es la cardinalidad escalar de A —*cfr.* Def. 15 (pág. 63).

BERTOLUZZA, CORRAL y SALAS [681, 696] —véase también SALAS, BERTOLUZZA y CORRAL [695]—, motivados por problemas de regresión borrosa, definen una familia de **divergencias** métricas entre números borrosos, basándose en α-cortes y en la métrica d_2 de MINKOWSKI, cuyas propiedades son estudiadas también por MONTES, GIL y BERTOLUZZA [697]. A partir de esta nueva distancia, LUBIANO [788], y LUBIANO, COLUBI y GIL [789], definen la $\vec{\lambda}$-desviación cuadrática media para variables aleatorias borrosas en poblaciones finitas,

una medida de desviación real entre una variable aleatoria borrosa y un número borroso prefijado. Más recientemente, MONTES y GIL [790] proponen, a través de ciertas propiedades, un concepto de divergencia como medida del grado de diferencia entre dos subconjuntos borrosos en un referencial finito, precisando esta definición en un artículo posterior —*cfr.* MONTES, GIL y BERTOLUZZA [791]—. MONTES y GIL [790] extienden el concepto de **borrosidad de un conjunto** al de borrosidad de una partición, definiendo el concepto de **divergencia entre particiones**, concretándose todo ello en la Tesis Doctoral de Susana MONTES [792], y, por ejemplo, en el artículo de MONTES, COUSO y GIL [793]. Como una **partición borrosa** —*cfr.* Nota a pie de página n°1 (pág. 402)— no es más que una colección de conjuntos borrosos, la divergencia entre ellas, puede cuantificarse mediante divergencias entre colecciones de conjuntos borrosos, donde, de alguna u otra forma, se agreguen las divergencias «locales» entre los conjuntos.

7.1.2 Una propuesta

Tanto la generalización de la métrica de HAUSDORFF, debida a PURI y RALESCU —*cfr.* Ec. 7.4—, como la generalización de la distancia d_1 de MINKOWSKI —*cfr.* Ec. 7.8—, pueden ser vistas como el resultado de la composición de una operación de eliminación de la borrosidad —*cfr.* §4.7.3— con d_{HAUS} y con el índice de enmascaramiento ψ, a saber, el supremo y la media, respectivamente.

En esta línea, podríamos proponer cuantas asignaciones básicas de disimilitud (o similitud) se nos ocurriesen, pues basta partir de una asignación básica de disimilitud (o similitud) entre intervalos.

7.1.3 α-percentilado horizontal

En la aproximación horizontal, supondremos en principio, que trabajamos con conjuntos borrosos *normales* para asegurar así la no vacuidad de todos los α-cortes. No obstante esta hipótesis será relajada —*cfr.* Def. 128 y §7.1.5—. Como los α-cortes de un conjunto borroso normal y convexo con soporte real son intervalos compactos de números reales, lo primero que debemos investigar es cómo medir disimilitudes entre tales intervalos. Si el conjunto borroso es normal pero no convexo, entonces y en general, cualquier α-corte será una unión finita de intervalos compactos de $\mathbb{R}$.

A ello hemos dedicado capítulos anteriores, donde hemos motivado y propuesto diversas disimilitudes entre intervalos, incluyendo una definida iterativamente —*cfr.* §6.20.2— a partir de las disimilitudes medidas entre algunos de sus subintervalos. Las siguientes subsecciones presentan algunos ejemplos de su aplicación.

La extensión de la medida de divergencia horizontal propuesta a conjuntos *normales y no convexos* se lleva a cabo en §7.1.5.

Distinguimos tres casos, según el α-percentilado sea finito, infinito numerable o continuo.

Definición 124 *Sean A y B dos conjuntos borrosos normales y cerrados. Sean:*

1. $\mathfrak{p} \subset_\alpha [0,1]$ *un α-percentilado finito,*
2. $w : \mathfrak{p} \to \mathbb{R}_0^+$ *una función de ponderación normalizada, o sea,* $\sum_{\alpha\in\mathfrak{p}} w(\alpha) = 1$,
3. $d_\alpha^{\text{H}}(A,B)$ *una medida de disimilitud entre los α-cortes de A y B, y*
4. $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *una función continua y monótona en* $\mathbb{R}_0^+$,

entonces, definimos la ***disimilitud horizontal*** *entre A y B, como la posible solución $D^{\text{H}}(A,B;\mathfrak{p},w,d_\alpha^{\text{H}},\varphi)$ de:*

$$\varphi\left(D^{\text{H}}(A,B;\mathfrak{p},w,d_\alpha^{\text{H}},\varphi)\right) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{u}} w(\alpha)\varphi\left(d_\alpha^{\text{H}}(A,B)\right) \tag{7.15}$$

Observación 125 ($D_{\varphi,w}^{\text{H}}$ como métrica) *La ecuación 7.15 posee el mismo formato que la Ec. (6.172). En los Teoremas 108 y 115 de las secciones §6.19.1 y §6.19.2, se expusieron condiciones suficientes para que (6.172) fuese una métrica. Las mismas condiciones son válidas para (7.15). A saber:*

Sea d_α^{H} una métrica entre intervalos y $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente, no negativa y tal que $\varphi(0) = 0$, entonces, si φ es superaditiva o convexa:

$$D_{\varphi,w}^{\text{H}}(A,B;\mathfrak{u},w,d_\alpha^{\text{H}},\varphi) = \varphi^{-1}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} w(\alpha)\varphi\left(d_\alpha^{\text{H}}(A,B)\right)\right) \tag{7.16}$$

es una métrica.

El caso de un α-percentilado infinito numerable es similar a los anteriores, sólo que teniendo como hipótesis la convergencia de la serie que aparece.

Definición 126 *Sean A y B dos conjuntos borrosos normales y cerrados. Sean:*

1. $\mathfrak{p} \subset_\alpha [0,1]$ *un α-percentilado infinito numerable,*
2. $w : \mathfrak{p} \to \mathbb{R}_0^+$ *una función de ponderación normalizada, o sea,* $\sum_{\alpha\in\mathfrak{p}} w(\alpha) = 1$,
3. $d_\alpha^{\mathrm{H}}(A,B)$ *una medida de disimilitud entre los α-cortes de A y B, y*
4. $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *una función continua y monótona en* $\mathbb{R}_0^+$,

entonces, definimos la ***disimilitud horizontal*** *entre A y B, caso de que la siguiente serie converja, como la posible solución* $D^{\mathrm{H}}(A,B;\mathfrak{p},w,d_\alpha^{\mathrm{H}},\varphi)$ *de:*

$$\varphi\left(D^{\mathrm{H}}(A,B;\mathfrak{p},w,d_\alpha^{\mathrm{H}},\varphi)\right) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{p}} w(\alpha)\varphi\left(d_\alpha^{\mathrm{H}}(A,B)\right) \tag{7.17}$$

Finalmente, para un α-percentilado continuo, proponemos la siguiente definición.

Definición 127 *Sean A y B dos números borrosos cerrados. Sean*

1. $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *una función continua y monótona en* $\mathbb{R}_0^+$,
2. ϕ *una función medible* LEBESGUE *(una medida ponderada normalizada de* LEBESGUE *en* $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$, *con* $\mathcal{B}([0,1])$ *la σ-álgebra de* BOREL *sobre* $[0,1]$*),*
3. $d_\alpha^{H}(A,B)$ *una medida de disimilitud entre intervalos (medirá disimilitud entre los α-cortes de A y B),*
4. $\varphi\left(d_\alpha^{H}(A,B)\right)$ *es ϕ-integrable,*

entonces, definimos como ***disimilitud horizontal*** *entre A y B, caso de que la siguiente integral exista, la posible solución* $D_{\varphi,\phi}^{\mathrm{H}}(A,B)$ *de:*

$$\varphi\left(D^{\mathrm{H}}(A,B;d_\alpha^{\mathrm{H}},\varphi,\phi)\right) = \int_0^1 \varphi\left(d_\alpha^{H}(A,B)\right) d\phi(\alpha) \tag{7.18}$$

Por ejemplo, si $\phi(x) = x$, $d_\alpha^{\mathrm{H}}(A,B) = d_{(q)}^{N}({}^\alpha A, {}^\alpha B)$, y $\varphi(x) = x^p$, entonces:

$$D^{\mathrm{H}}(A,B;d_\alpha^{\mathrm{H}},\varphi,\phi) = \left(\int_0^1 \left(d_{(q)}^{N}({}^\alpha A, {}^\alpha B)\right)^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \tag{7.19}$$

La expresión (7.18) depende de la definición de ϕ, no existiendo una solución general a la integral propuesta. Si $\zeta(\alpha)$ es la derivada de RADON - NIKODYM de la medida ϕ, o sea, si $\zeta(\alpha) = d\phi(\alpha)/d\alpha$, entonces:

$$\varphi\left(D_{\varphi,\phi}^{\mathrm{H}}(A,B)\right) = \int_0^1 \zeta(\alpha)\varphi\left(d_\alpha^{\mathrm{H}}(A,B)\right) d\alpha \tag{7.20}$$

de manera similar que en la Ec. (6.158).

7.1.4 Disimilitud horizontal entre cuasi-números borrosos

Recuerde el lector que la única diferencia entre un número borroso y un cuasi-número borroso —*cfr.* Sec. §4.4.5—, es que este último no es normal.

Definición 128 *Sean A y B dos cuasi-números borrosos cerrados,* $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *una función continua y monótona en* $\mathbb{R}_0^+$, ϕ *una función medible* LEBESGUE *(una medida ponderada normalizada de* LEBESGUE *en* $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$, *con* $\mathcal{B}([0,1])$ *la σ-álgebra de* BOREL *sobre* $[0,1]$*). Sea* $d_{\alpha(h)}(A,B)$ *una medida de disimilitud entre intervalos (medirá la disimilitud entre el $(\alpha \cdot h_A)$-corte de A y el $(\alpha \cdot h_B)$-corte de B). Si* $\varphi\left(d_{\alpha(h)}(A,B)\right)$ *es ϕ-integrable y la siguiente integral existe, entonces, definimos la* ***disimilitud horizontal entre cuasi-números borrosos*** *como la posible solución* $D^{\mathrm{H}}(A,B;d_{\alpha(h)}^{\mathrm{H}},\varphi,\phi)$ *de:*

$$\varphi\left(D^{\mathrm{H}}(A,B;d_{\alpha(h)}^{\mathrm{H}},\varphi,\phi)\right) = \int_0^1 \varphi\left(d_{\alpha(h)}(A,B)\right) d\phi(\alpha) \tag{7.21}$$

Sea $\mathfrak{p} \subset [0,1]$ un α-percentilado finito, sea $w : \mathfrak{p} \to \mathbb{R}_0^+$, la función de ponderación normalizada uniforme sobre $\mathfrak{p}$, o sea, $w(\alpha) = |\mathfrak{p}|^{-1}$; empleemos, por ejemplo, $d_\alpha^{\mathrm{H}} = d_{(q)}^M$, para todo $\alpha \in \mathfrak{p}$, con $1 \leq q < \infty$ y $M \in \mathbb{Z}_{>1}$, como medida de la disimilitud entre los α-cortes correspondientes ${}^\alpha A$ y ${}^\alpha B$, de modo que, si $\varphi(x) = x^p$ $(1 \leq p < \infty)$:

$$D^{\mathrm{H}}(A,B;\mathfrak{p},w,d_q^M,x^p) = \left(|\mathfrak{p}|^{-1}\sum_{\alpha\in\mathfrak{p}}\left(d_q^M({}^\alpha A,{}^\alpha B)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{7.22}$$

Ejemplo 129 (Cuasi-números borrosos triangulares) *Sea $A \in \mathfrak{F}^*(\mathbb{R}) = \mathfrak{F}(\mathbb{R}) - \{\varnothing\}$. De acuerdo con el conocimiento que se posea de antemano, podremos usar, en vez del número triangular original, la siguiente clase de cuasi-números borrosos triangulares:*

$$A \triangleq [A_l, A_u] = \{B \in \mathfrak{F}^*(\mathbb{R}) : A_l(x) \leq A_\alpha(x) \leq A_u(x)\} \tag{7.23}$$

en realidad, todo $B \in [A_l, A_u]$ es de la forma $B = h(B)A(x)$, o sea:

$$A_\alpha(x) = \alpha A(x) \tag{7.24}$$

donde $h(A_\alpha) = \alpha$ —definiendo como «normalizado» de $A(x)$, o número borroso correspondiente al cuasi-número borroso A, el que obtenemos al dividir el cuasi-número entre su altura $h(A)$.

Sea $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ el universo de discurso, y consideremos los cuasi-números borrosos triangulares $A = T(1,2,3,h_A)$ y $B = T(6,7,8,h_B)$. Podemos demostrar que el $(\alpha \cdot h_X)$-corte de un cuasi-número borroso triangular X es:

$${}^\alpha T(x_-,x,x_+,h) = \left[x_- + \alpha\frac{x-x_-}{h_X}, x_+ - \alpha\frac{x_+-x}{h_X}\right]$$

por lo que, para todo $p,q \in [1,\infty)$, $M \in \mathbb{Z}_{>1}$, y $\alpha \in \mathfrak{p}$:

$$d_{(q)}^M({}^\alpha A,{}^\alpha B) = \begin{cases} 5 & \text{si } h_A = h_B \\ \left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^M \left|\alpha\left(\frac{1}{h_B}-\frac{1}{h_A}\right)\left(2\frac{i-1}{M-1}-1\right)-5\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } h_A \neq h_B \end{cases} \tag{7.25}$$

Obsérvese, en particular, que si $h_A = h_B$, entonces:

$$D^{\mathrm{H}}(A,B;\mathfrak{u},|\mathfrak{u}|^{-1},d_q^M,x^p) = 5 \tag{7.26}$$

o sea, que incluye el caso particular de ser ambos números borrosos.

Por otro lado, según (6.94):

$$d_{(\infty)}({}^\alpha A,{}^\alpha B) = \max\left(\left|a_- - b_- + \alpha\left(\frac{a-a_-}{h_A}-\frac{b-b_-}{h_B}\right)\right|, \left|a_+ - b_+ - \alpha\left(\frac{a_+-a}{h_A}-\frac{b_+-b}{h_B}\right)\right|\right) \tag{7.27}$$

7.1.5 Disimilitud horizontal entre conjuntos «*normocordes*»

Una clase particular de conjuntos borrosos cerrados y normales pero no convexos son los que proponemos denominar *«normocordes»* (del lat. *normalis* y de *cordel* —de *cuerda*, del lat. *chorda*—; en inglés, proponemos la denominación «*climbing*») conjuntos borrosos cerrados y normales tales que todos los puntos donde se alcanza un máximo local pertenecen al núcleo del conjunto —*cfr.* Fig. 7.1—. Debido a la hipótesis de normalidad todos los α-cortes de A son no vacíos. Si A tiene soporte real, cada uno de sus α-cortes es una unión finita y disjunta de intervalos compactos de números reales:

$$\begin{aligned} X &= I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n \\ &= [i_{1,0}, i_{1,1}] \cup [i_{2,0}, i_{2,1}] \cup \ldots \cup [i_{n,0}, i_{n,1}] \end{aligned} \tag{7.28}$$

Podemos extender las disimilitudes definidas anteriormente a este caso. Por ejemplo, si para todo $k \in \mathbb{N}_n^+$, $i_{k,0} < i_{k,1}$, la definición del α-*percentil* de X es:

$$x_{(\alpha)} = i_{k,0} + \alpha L - S_{k-1} \tag{7.29}$$

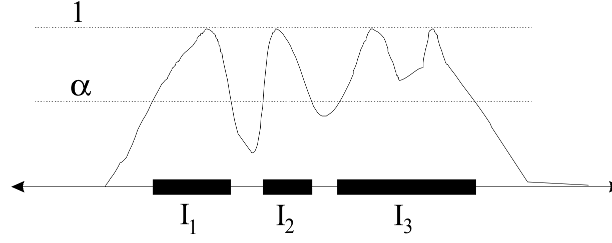


Figura 7.1: *Conjuntos borrosos «normocordes».*
—*Fuente:* Elaboración propia.

siendo:

$$\frac{S_{k-1}}{L} \leq \alpha \leq \frac{S_k}{L} \tag{7.30}$$

$$L_h = i_{h,1} - i_{h,0} \tag{7.31}$$

$$S_0 = 0 \tag{7.32}$$

$$S_k = L_1 + L_2 + ... + L_k \tag{7.33}$$

$$L = S_n \tag{7.34}$$

Observación 130 (Extensión a conjuntos borrosos cerrados) *Combinando las estrategias expuestas en la Def. 128 (pág. 164) y en este apartado, definiríamos una disimilitud horizontal entre conjuntos borrosos cerrados cualesquiera.*

7.2 Comparando «verticalmente» subconjuntos borrosos

El valor de los índices aquí encuadrados se calcula a partir de los valores de pertenencia para cada referente. La interpretación más natural de los valores de estos índices se refiere al grado de «superposición» entre ambos conjuntos borrosos.

7.2.1 Un antecedente: las medidas de posibilidad y necesidad

Las *medidas de posibilidad y necesidad*, introducidas por Zadeh —*cfr.* Dubois y Prade [437]— (aunque postuladas, por ejemplo, por Łukasiewicz, son unos claros antecedentes de medidas de comparación «vertical» entre conjuntos borrosos.

La **medida de posibilidad** de A respecto de B, definida como:

$$\begin{array}{rcl} \Pi : \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{F}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & [0,1] \\ (A,B) & \longmapsto & \Pi(A|B) = \sup_{x \in X}\{\min\{A(x), B(x)\}\} \end{array} \tag{7.35}$$

es simétrica respecto a sus argumentos y refleja hasta donde A y B coinciden o interseccionan —*cfr.* Pedrycz [449] (p. 48).

La **medida de necesidad** de A respecto de B, definida como

$$\begin{array}{rcl} N : \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{F}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & [0,1] \\ (A,B) & \longmapsto & N(A|B) = \inf_{x \in X}\{\max\{A(x), 1 - B(x)\}\} \end{array} \tag{7.36}$$

es asimétrica e indica el grado de inclusión de B en A —*cfr.* Pedrycz [449] (p. 48).

Ambas medidas se extienden utilizando cualquier t-norma y t-conorma, en lugar del mínimo y el máximo, respectivamente —*cfr.* Pedrycz [449] (p. 49).

7.2.2 Aproximación vertical «clásica»

Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$. Como un proceder general, podemos medir la disimilitud entre dos funciones reales acotadas f y g, de $\mathcal{U}$ en $[0,1]$, midiendo las disimilitudes locales en cada punto x del dominio común $\mathcal{U}$, $\delta(f(u), g(u))$, definiendo a partir de ellas una medida de disimilitud $D(f,g)$ entre las funciones.

Tal disimilitud D, se definirá a partir de las disimilitudes locales, siempre que encontremos una manera adecuada de agregar toda esa información local disponible. Parecen obvias al menos las siguientes tres formas de hacerlo[1].

- *Máximo optimista*:

$$D_{\text{inf}}(f,g) = \inf\{\delta(f(u),g(u)) : u \in \mathcal{U}\}$$

- *Máximo pesimista*[2]:

$$D_{\text{sup}}(f,g) = \sup\{\delta(f(u),g(u)) : u \in \mathcal{U}\}$$

- o de una manera *intermedia*, una clase de media entre ambos casos extremos:

$$D_{\text{inf}}(f,g) \leq D_{\text{med}}(f,g) \leq D_{\text{sup}}(f,g)$$

Si el dominio es finito o infinito numerable

En el caso de ser finito $\mathcal{U}$, esta $D_{\text{med}}(f,g)$ podría definirse a partir de la idea de una φ-media —*cfr.* Def. 95 (pág. 135)—, con todos los coeficientes iguales a $1/|\mathcal{U}|$, o sea, una media cuasi-aritmética —*cfr.* Def. 94 (pág. 135)—. De este modo, buscamos la solución $\mathfrak{M}_\varphi\{\}$ de:

$$\varphi\left(\mathfrak{M}_\varphi\{\delta(f(u),g(u)) : u \in \mathcal{U}\}\right) = \frac{1}{|\mathcal{U}|}\sum_{u\in\mathcal{U}} \varphi\left(\delta(f(u),g(u))\right) \tag{7.37}$$

Si $\varphi(x) = x^r$, $\mathfrak{M}_r$ es conocida como una *media generalizada*, caso particular de media de orden r —*cfr.* Ec. 6.150:

$$\left(\mathfrak{M}_r\left\{\delta\left(f(u),g(u)\right) : u \in \mathcal{U}\right\}\right)^r = \frac{1}{|\mathcal{U}|}\sum_{u\in\mathcal{U}} \left(\delta(f(u),g(u))\right)^r \tag{7.38}$$

Si $\delta(x,y) = |x-y|$, entonces, reconocemos la familia de distancias discretas normalizadas de MINKOWSKI (5.33), para $1 \leq p < \infty$, con $d_\infty(f,g) = \lim_{p\to\infty} d_p(f,g) = \sup\{|f(u)-g(u)| : u \in \mathcal{U}\}$.

Si $\mathcal{U}$ es infinito numerable, estaríamos necesariamente en el espacio de las series sumables de potencia r, y si $r \to \infty$, entonces $\mathfrak{M}_r\{\} = \sup\{\}$.

Si el dominio es continuo

Como vimos en §6.18.1, puede extenderse la noción de φ-media al caso continuo —*cfr.* Ecs. 6.151-6.153—. Varios ejemplos son los siguientes.

Si $\mathcal{U} = [a,b]$ y f y g son continuas en $\mathcal{U}$, entonces «sumando» todas las disimilitudes locales, extendemos la familia de MINKOWSKI (5.33) a:

$$(d_p(f,g))^p = \int_a^b |f(x)-g(x)|^p\, dx \tag{7.39}$$

donde la distancia continua del valor absoluto ($p=1$), representa el área total entre las curvas.

Si f y g son discontinuas con saltos finitos, en un conjunto finito o numerable de puntos y $\{x_i\}$ es la colección numerable de todos los puntos de discontinuidad de f y g, entonces la definición cambia a:

$$(d_p(f,g))^p = \sum_i \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)-g(x)|^p\, dx\right) \tag{7.40}$$

[1] Nótese que empleamos la misma disimilitud local δ, aunque pudiera bien pensarse en utilizar distintas para cada punto o subconjunto de puntos de $\mathcal{U}$. Un motivo para ello puede ser que sean o representen **unidades de distinta naturaleza**, lo cual podría conllevar además que la naturaleza de los dispositivos medidores (las representaciones físicas de f y g) también fuese diferente. Una causa que podría forzar la utilización de una distancia determinada en referencia a un determinado elemento del dominio podría ser una estimación a priori del error de la medida que fuese creciente: a mayor valor de la medida (f o g) mayor error. En este caso, cuanto menor sea el número de operaciones involucradas en el cálculo de δ, mejor. Por ejemplo, entre todas las distancias de la familia de MINKOWSKI —*cfr.* Ec. 5.33—, la distancia de HAMMING, d_1, sería la más adecuada.

[2] En palabras de Javier FERNÁNDEZ AGUADO [36] (p. 29): «Algunos desencantados afirman que un optimista no es sino un pesimista mal informado.»

suponiendo la convergencia de la serie en el caso infinito.

Si f y g son funciones de tipo escalera, por ejemplo distribuciones discretas o discretizadas, entonces la diferencia $f(x) - g(x)$ es constante en cada intervalo $[x_i, x_{i+1})$. Si notamos los valores de estas constantes por d_i, entonces:

$$(d_p(f,g))^p = \sum_i (x_{i+1} - x_i)\, d_i^p \tag{7.41}$$

7.2.3 Todo puede quedar entre subconjuntos borrosos

Las medidas anteriores pueden ser consideradas para conjuntos borrosos, siendo f y g funciones de pertenencia de conjuntos borrosos.

Bajo un punto de vista «más borroso», podemos recordar las propuestas por Dubois y Prade [437]:

- la **medida de coincidencia** (*matching*):

$$M(A,B) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \min\{A(u), B(u)\} \tag{7.42}$$

- la **medida de similitud** (*similarity*):

$$S(A,B) = \frac{\int_{u\in\mathcal{U}} \min\{A(u), B(u)\} du}{\int_{u\in\mathcal{U}} \max\{A(u), B(u)\} du} \tag{7.43}$$

  la cual no es más que la extensión borrosa del coeficiente de similaridad de Jaccard-Tanimoto —*cfr.* Ec. 10.34 y las Ecs. 10.10, 10.20, para su interpretación conjuntista:

$$S(A,B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} \tag{7.44}$$

  utilizando la t-norma mínimo y la t-conorma máximo como intersección borrosa y como unión borrosa, respectivamente.

De manera más general, podemos proponer —inspirados en los trabajos de Ayumi Yoshikawa [787] y junto a Takeshi Nishimura [794]— asignaciones básicas de similitud definidas a partir de una t-norma $\mathcal{T}$ —*cfr.* Tabla 4.3— y una composición con un operador de eliminación de borrosidad —*cfr.* §4.7.3—. Por ejemplo:

- la composición sup-$\mathcal{T}$ (es decir, la composición con el operador altura):

$$D(A,B) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{T}(A(u), B(u)) \tag{7.45}$$

- la composición con el operador cardinalidad escalar —*cfr.* Def. 15:

$$D(A,B) = \int_{u\in\mathcal{U}} \mathcal{T}(A(u), B(u)) du \tag{7.46}$$

- la composición con el operador razón de cardinalidad $|C|/|A \vee B|$:

$$D(A,B) = \frac{\int_{u\in\mathcal{U}} \mathcal{T}(A(u), B(u)) du}{\int_{u\in\mathcal{U}} \max\{A(u), B(u)\} du} \tag{7.47}$$

En la misma línea de pensamiento, podemos proponer asignaciones básicas de disimilitud definidas a partir de una t-conorma y una composición con un operador de eliminación de borrosidad.

Más específicos son, por ejemplo, los siguientes índices, que también proponen Yoshikawa y Nishimura:

- el **índice de posición** (1 menos la distancia entre los centros de gravedad):

$$P(A,B) = 1 - \left| \frac{\int_{u\in\mathcal{U}} u \cdot A(u) du}{|A|} - \frac{\int_{u\in\mathcal{U}} u \cdot B(u) du}{|B|} \right| \tag{7.48}$$

- el **índice de forma** (*shape*), calculado como la medida de similitud de Dubois y Prade [437], entre los trasladados a un centro de gravedad común.

Más ejemplos y referencias, se pueden encontrar en el artículo de Dubois y Prade [783].

7.2.4 Propuesta de medida de disimilitud vertical entre subconjuntos borrosos

Podríamos decir que las disimilitudes entre funciones comentadas en la secciones anteriores son *disimilitudes «verticales»*, pues sus definiciones se basan en una agregación de disimilitudes locales «verticales». Siempre que trabajemos con un α-percentilado vertical, supondremos que el universo de discurso $\mathcal{U}$ es en realidad un *retículo normado denso* $(\mathcal{U}, \preceq)$. Por β-percentilado entenderemos un α-percentilado vertical.

Definición 131 *Sean $\mathcal{U}$ un universo de discurso no vacío y consideremos la estructura de retículo normado denso $(\mathcal{U}, \preceq)$. Sea $A \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$. Definimos la **$\beta$-sección vertical** de A por —cfr. Fig. 7.2:*

$$_{a_{(\beta)}}A = \{\alpha \in [0,1] : \alpha \leq A(a_{(\beta)})\} \tag{7.49}$$

si $\beta \in (0,1)$, y en los casos $\beta = 0$ y $\beta = 1$, como los siguientes límites, caso de que existan:

$$\begin{aligned} A(a_{(0)}) &= \lim_{\beta \to 0} A(a_{(\beta)}) \\ &= \lim_{u\downarrow} A(u) \end{aligned}$$

y:

$$\begin{aligned} A(a_{(1)}) &= \lim_{\beta \to 1} A(a_{(\beta)}) \\ &= \lim_{u\uparrow} A(u) \end{aligned}$$

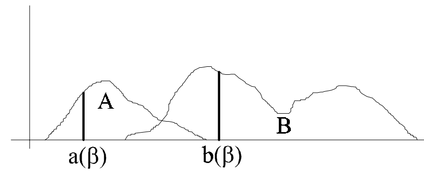


Figura 7.2: *Idea gráfica de la aproximación vertical.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

Dados dos conjuntos borrosos A y B, con soportes respectivos S_A y S_B, podremos medir la disimilitud local asociada a los β-percentiles $a_{(\beta)} \in S_A$ y $b_{(\beta)} \in S_B$, para cualquier $\beta \in [0,1]$, calculando la disimilitud entre las β-secciones verticales correspondientes, mediante:

$$\begin{aligned} d^{\mathrm{V}}_{\beta}(A,B) &= \delta\left(_{a_{(\beta)}}A, {}_{b_{(\beta)}}B\right) \\ &= \delta\left([0, A(a_{(\beta)})], [0, B(b_{(\beta)})]\right) \end{aligned} \tag{7.50}$$

donde δ es una medida de disimilitud entre intervalos.

Observación 132 *Las secciones verticales de las funciones de pertenencia de un conjunto borroso ordinario son siempre intervalos de la forma $[0, x]$, con $x \in [0,1]$.*

Definición 133 *Sean $\mathcal{U}$ un universo de discurso no vacío y consideremos la estructura de retículo normado denso $(\mathcal{U}, \preceq)$. Sea A un subconjunto borroso no acotado de $\mathcal{U}$. Definimos el **truncamiento** de A, a un **nivel significativo de pertenencia** $1-\gamma$, como el subconjunto borroso, que notamos $A_{<\gamma>}$, precisamente si su soporte es:*

$$S_{A_{<\gamma>}} = [A_0^{-1}(\gamma), A_1^{-1}(\gamma)] \tag{7.51}$$

siendo:

$$A_0^{-1}(\gamma) = \min\{u \in \mathcal{U} : A(u) = \gamma\} \tag{7.52}$$

$$A_1^{-1}(\gamma) = \max\{u \in \mathcal{U} : A(u) = \gamma\} \tag{7.53}$$

de manera que:

$$A_{<\gamma>} = A(u)\chi_{S_{A_{<\gamma>}}} \tag{7.54}$$

siendo $\chi_{S_{A_{<\gamma>}}}$ la función indicadora de $S_{A_{<\gamma>}}$.

Observación 134 *Tal y como se define, $A_{<\gamma>}$ es acotado.*
El truncamiento de un subconjunto borroso acotado a un nivel significativo de pertenencia 1 es el propio conjunto.

Se tiene la siguiente relación entre los β-percentiles de A y de B:

$$\begin{cases} a_{(\beta)} = b_{(\beta)} & \text{si } A \text{ y } B \text{ son no acotados} \\ a_{(\beta)} = \frac{\epsilon(S_A)}{\epsilon(S_A)} b_{(\beta)} & \text{si } A \text{ y } B \text{ son acotados} \\ a_{(\beta)} = \frac{\epsilon(S_{A_{<\gamma>}})}{\epsilon(S_B)} b_{(\beta)} & \text{si } A \text{ no es acotado aunque } B \text{ sí} \\ a_{(\beta)} = \frac{\epsilon(S_A)}{\epsilon(S_{B_{<\gamma>}})} b_{(\beta)} & \text{si } A \text{ es acotado aunque } B \text{ no} \end{cases} \tag{7.55}$$

donde ϵ indica la extensión, es decir:

$$\epsilon(S_X) = d_{||}(\inf S_X, \sup S_X)$$

siendo $d_{||}$ la distancia inducida por la norma del universo de discurso —con estructura reticular normada densa $(\mathcal{U}, \preceq)$—, y $A_{<\gamma>}$ y $B_{<\gamma>}$ denotan los conjuntos borrosos «truncados» a un nivel significativo de pertenencia $1-\gamma$.

De este modo pasamos a definir la medida de disimilitud vertical entre conjuntos borrosos.

Definición 135 *Sean A y B conjuntos borrosos. Sean*

1. $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *una función continua y monótona en* $\mathbb{R}_0^+$*;*
2. ϕ *una función medible* LEBESGUE *(una medida ponderada normalizada de* LEBESGUE *en* $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$*, con* $\mathcal{B}([0,1])$ *la* σ*-álgebra de* BOREL *sobre* $[0,1]$*);*
3. $d_\beta^V(A,B)$ *indica una medición de disimilitud entre las secciones verticales* ${}_{a_{(\beta)}}A$ *y* ${}_{b_{(\beta)}}B$ *de* A *y* B *—cfr. Ec. (7.50);*
4. $\varphi\left(d_\beta^V(A,B)\right)$ *es* ϕ*-integrable;*

entonces, proponemos como medida de ***disimilitud vertical entre*** *los* ***conjuntos borrosos*** *A y B, a un nivel significativo de pertenencia $1-\gamma$, caso de que la siguiente integral exista, la posible solución $D_{\varphi,\phi}^V(A,B)$ de:*

$$\varphi\left(D_{\varphi,\phi}^V(A,B)\right) = \int_\gamma^1 \varphi\left(d_\beta^V(A_{<\gamma>}, B_{<\gamma>})\right) d\phi(\beta) \tag{7.56}$$

Observación 136 *Consideremos la distancia de* HAUSDORFF *d_{HAUS} —cfr. Def. 74— entre dos funciones f y g, definida a partir de las imágenes de $\mathcal{D}$:*

$$d_{HAUS}(f,g) = \max\{\delta(f(\mathcal{D}), g(\mathcal{D})), \delta(f(\mathcal{D}), g(\mathcal{D}))\}$$

donde δ viene dada como en la Def. 74.

Si particularizamos al caso que nos ocupa, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, podemos considerar el espacio métrico $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), d_{HAUS})$, de todos los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$. Cualquier unión no vacía de intervalos compactos es un elemento particular de tal espacio. Así, puede usarse d_{HAUS} —cfr. Def. 74— en vez de las distancias anteriores, en las aproximaciones horizontal y vertical. BERTOLUZZA, CORRAL *y* SALAS *[681] identifican ciertas desventajas de su utilización en una aproximación horizontal en problemas de regresión relacionados con números borrosos.*

Alternativamente, podemos considerar el espacio métrico $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), d_{HAUS})$, de todas las funciones acotadas reales de variable real. Un conjunto borroso ordinario es un elemento de tal espacio. Puede usarse d_{HAUS} para medir la «diferencia» entre dos conjuntos borrosos.

Observación 137 *Tanto las funciones de densidad de probabilidad como las funciones de distribución de probabilidad, sintácticamente, son conjuntos borrosos. Cuando se desea comparar dos* ***densidades de probabilidad*** *y/o dos* ***distribuciones continuas de probabilidad****, se supone que el soporte de ambas es el mismo. Entre densidades, la comparación puede hacerse utilizando una disimilitud horizontal —cfr. §7.1.3—, mientras que para distribuciones puede usarse una comparación vertical —cfr. §7.56.*

Observación 138 *La disimilitud vertical presenta el problema de que si los soportes de dos conjuntos borrosos A y B son disjuntos, entonces* $D^V_{\varphi,\phi}(A, B) = D^V_{\varphi,\phi}(A+k, B+k')$, *donde* $A+k$ *y* $B+k'$ *son resultado de hacer una traslación de soporte sin que en último extremo, éstos se intersequen, o sea,* $k, k' \in \mathbb{R}$ *son tales que para todo* $u \in \mathcal{U}$*:*

$$(A+k)(u) = A(u-k) \quad (7.57)$$
$$(B+k')(u) = B(u-k') \quad (7.58)$$
$$\mathrm{supp}(A+k) \cap \mathrm{supp}(B+k') = \varnothing \quad (7.59)$$

(lo cual, por otra parte, es intuitivo, pues esta aproximación vertical no compara horizontalmente).
Sin embargo, la disimilitud horizontal no presenta este problema. Desde luego si los soportes son los mismos podremos usar indistintamente la disimilitud horizontal o la vertical. Así haremos, por ejemplo, con los conjuntos Φ*-borrosos, utilizando las medidas de disimilitud anteriores. Podemos hacerlo tanto horizontal como verticalmente, a partir, en ambos casos, de disimilitudes entre intervalos,* α*-cortes (*α*-secciones horizontales) ó* α*-secciones verticales. Obsérvese que cualquier aproximación vertical considera únicamente intervalos en* $[0, 1]$ *—cfr. §6.4—. Notemos, por último, que para cualquier* $\alpha \in (0, 1]$*, el* α*-corte de un subconjunto* Φ*-borroso es un intervalo de tipo* 2*, por lo que en cada* α*-corte estamos ante un caso particular del Ejemplo 121, de aplicación del esquema iterativo que propusimos en §6.20.2.*

7.3 Ejemplo ilustrativo: ¿qué forma tiene tu mano?

*Se trata de **reconocer queiremas aislados**, o sea, configuraciones manuales aisladas —cfr. §A.6.1—. Este reconocimiento se ha hecho en un **ambiente híbrido de probabilidad, borrosidad e imprecisión**, como preludio a lo que veremos en §15, §16 y §17, sin olvidarnos de §18. En concreto, en el ejemplo, hemos encontrado una solución a dicha cuestión de reconocimiento, representándola como un problema métrico entre conjuntos* Φ*-probabilísticos, esto es, conjuntos* Φ*-borrosos* A *—he aquí la imprecisión y la borrosidad—, tales que* $\underline{A}$ *y* $\overline{A}$ *son funciones de probabilidad —cfr. §7.3.2.*

7.3.1 Especificación

La funcionalidad de este ejemplo es ilustrar lo expuesto, con otro ejemplo: el **reconocimiento de queiremas aislados** —*cfr.* §A.6.1—. Todo ello en un **ambiente híbrido de incertidumbre e imprecisión**, como preludio a lo que veremos en §15, §16 y §17, sin olvidarnos de §18.

Nos proponemos encontrar una solución a dicha cuestión de reconocimiento, representándola como un problema métrico entre conjuntos Φ-probabilísticos, esto es, conjuntos Φ-borrosos A —he aquí una hibridación entre **incertidumbre** e **imprecisión**—, tales que $\underline{A}$ y $\overline{A}$ son funciones de **probabilidad** —*cfr.* §7.3.2.

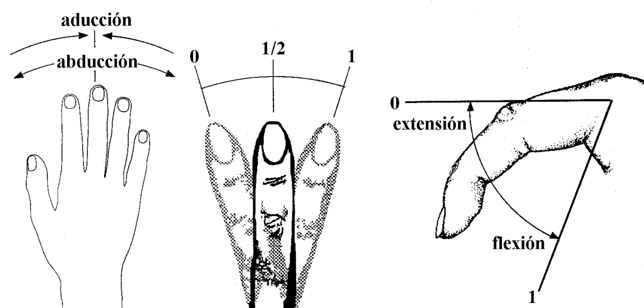


Figura 7.3: *Normalización de los ángulos de flexión y aducción.*
—Fuente: Adaptado de Sturman [795].

Llamaremos a los valores observados, síntomas, *indicios* o evidencias. Para hacer más fácil la exposición, y sin ninguna pérdida de generalidad, suponemos que los únicos sensores son los de flexión y que todos los ángulos se normalizan en $[0, 1]$, donde 1 significa la cualidad «completamente flexionado» —*cfr.* Fig. 7.3—

(o «completamente extendido», es cuestión de convenir en ello). Cada indicio hace referencia a esta cualidad. Por tanto, el conjunto de referencia es el conjunto finito de predicados:

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{lllll} s_1 \equiv MPJ(\mathsf{t}), & s_2 \equiv IJ(\mathsf{t}), & s_3 \equiv MPJ(\mathsf{i}), & s_4 \equiv PIJ(\mathsf{i}), & s_5 \equiv MPJ(\mathsf{m}), \\ s_6 \equiv PIJ(\mathsf{m}), & s_7 \equiv MPJ(\mathsf{r}), & s_8 \equiv PIJ(\mathsf{r}), & s_9 \equiv MPJ(\mathsf{p}), & s_{10} \equiv PIJ(\mathsf{p}) \end{array} \right\} \tag{7.60}$$

donde las constantes son:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{t} & \rightleftharpoons & \text{pulgar } (\textit{thumb}) \\ \mathsf{i} & \rightleftharpoons & \text{índice } (\textit{index}) \\ \mathsf{m} & \rightleftharpoons & \text{medio } (\textit{middle}) \\ \mathsf{r} & \rightleftharpoons & \text{anular } (\textit{ring}) \\ \mathsf{p} & \rightleftharpoons & \text{meñique } (\textit{pinkie}) \end{array} \tag{7.61}$$

y las funciones son:

$$\begin{array}{rcl} MPJ & \rightleftharpoons & \text{Unión Metacarpofalángea } (\textit{MetacarpoPhalangeal Joint}) \\ IJ & \rightleftharpoons & \text{Unión Interfalángea } (\textit{Interphalangeal Joint}) \\ P & \rightleftharpoons & \text{Proximal} \end{array} \tag{7.62}$$

De este modo podemos asignar un significado a cada predicado; por ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} s_7 & \equiv & MPJ(\mathsf{r}) \\ & \equiv & \text{«el ángulo MPJ del anular está “completamente” flexionado»} \end{array}$$

Por ejemplo, una aproximación algo ingenua, al queirema «i» de la LSE o de la Lengua de Señas Americana (meñique extendido y el resto completamente flexionado) es el conjunto borroso (en notación de ZADEH):

$$\sum_{i=1}^{10} \alpha_i / s_i \tag{7.63}$$

donde α_9 y α_{10} son aproximadamente 0, siendo los demás aproximadamente 1. Obsérvese que debido a la configuración anatómica de la mano humana y a las características propias de «i» para poder ser reconocido, aunque flexionado, es suficiente que el pulgar esté cerca del índice y que la yema del pulgar esté por debajo de la línea de los nudillos.

7.3.2 Conjuntos Φ-probabilísticos (*Expertones*)

Sea $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espacio probabilístico y $(\Omega_c, \mathcal{B}_c)$ un espacio de características, o sea, una álgebra de BOREL basada en el intervalo $[0, 1]$. Un **conjunto probabilístico** A se define mediante una aplicación (su función de pertenencia) $A : \mathcal{D} \times \Omega \to \Omega_c$, donde $A(x, .)$ es una aplicación $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_c)$ medible para todo $x \in \mathcal{D}$ —*cfr.* FÉRON [466]; HIROTA [464, 796, 797, 465].

La **función de pertenencia media** de un conjunto probabilístico A se define como —*cfr.* PEDRYCZ [449]:

$$E(A)(x) = \int_{\Omega} A(x, \omega) dP(\omega) \tag{7.64}$$

Un **conjunto Φ-probabilístico** A se define mediante un par de aplicaciones $\underline{A}, \overline{A} : \mathcal{D} \times \Omega \to \Omega_c$, donde $\underline{A}, \overline{A}(x, .)$ son aplicaciones $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_c)$ medibles para todo $x \in \mathcal{D}$.

Estos conjuntos fueron propuestos y profusamente estudiados por Arnold KAUFMANN, quien los denominó **expertones** —*cfr.* KAUFMANN [798, 799, 800]; KAUFMANN y GIL ALUJA [801, 412].

Observación 139 *Todo conjunto Φ-borroso es un conjunto Φ-probabilístico tal que todas las distribuciones de probabilidad inferior y superior son deltas de* DIRAC.

Dado un conjunto Φ-probabilístico A, podemos promediar sobre Ω, obteniendo sus funciones inferior y superior de pertenencia media. Definimos el **conjunto esperado** (un conjunto Φ-borroso) **de un conjunto Φ-probabilístico** A, como:

$$\begin{aligned} E(A) &= \left[\underline{E(A)}(s), \overline{E(A)}(s) \right] \\ &= \left[\int_{\Omega} \underline{A}(s, \omega) dP(\omega), \int_{\Omega} \overline{A}(s, \omega) dP(\omega) \right] \end{aligned} \tag{7.65}$$

7.3.3 Queiremas como conjuntos Φ-borrosos

En general, la articulación de los queiremas de una lengua de señas no es del todo precisa. Los dedos no tienen que articularse en una posición exacta, sino en un intervalo de posibles posiciones, por ejemplo, al signar «w» en lengua de señas americana, los dedos índice, medio y anular están extendidos, pero el ángulo entre las posibles direcciones (viendo los dedos como vectores con origen en los nudillos) no tienen porqué valer exactamente cero: diferencias de unos 10 a 15 o incluso de 20 grados son frecuentemente interpretadas correctamente como «w». Es por ello que parezca razonable representar mediante un conjunto Φ-borroso esa incertidumbre presente en la articulación de un queirema.

Supongamos que, en general, tenemos tres conjuntos finitos $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{E}$, de queiremas, dispositivos sensoriales y expertos individuos signantes, respectivamente. Si q es un queirema que debe ser aprendido, entonces, para todo experto $e \in \mathcal{E}$, q puede considerarse representado por un conjunto de $|\mathcal{S}|$ distribuciones de probabilidad:

$$D_{q,e} = \{P_{q,e,s} : s \in \mathcal{S}\} \tag{7.66}$$

Una vez articulado q por todos los expertos, se actualiza la representación de q como un superconjunto de conjuntos de distribuciones de probabilidad:

$$\{D_{q,e} : e \in \mathcal{E}\} \tag{7.67}$$

Obsérvese que si suponemos un rango finito para cada dispositivo sensorial (una discretización de $[0, 1]$), las distribuciones de probabilidad pertenecientes a $D_{q,e}$ son discretas.

Obsérvese también que dado un experto e, y un dispositivo sensorial s, disponemos de una función de masa de probabilidad $p_{e,s}$. Hemos asignado, heurísticamente, a cada experto e, un nivel de confianza $\alpha_e \in [0, 1]$, de forma que sólo son aceptadas las $\alpha_e \cdot 100\%$ articulaciones más probables de q (denominamos α_e-corte de significación de $p_{e,s}$, y lo denotamos ${}^{\alpha_e}p_{e,s}$, al conjunto de todas ellas, dados e y s). Por todo esto, parece razonable estimar cómo signa un experto determinado e, un queirema determinado q, en otras palabras, el prototipo de queirema q (signado por e), mediante el conjunto Φ-borroso:

$$\hat{q}_e = \sum_{s \in \mathcal{S}} [\underline{s}(e), \overline{s}(e)]/s \tag{7.68}$$

donde el rango muestral del dispositivo sensorial s, dado que el experto e ha signado el queirema q, se estima por el intervalo $[\underline{s}(e), \overline{s}(e)]$, con:

$$\underline{s}(e) = \min\{\underline{s}_i : i = 1, \ldots, n(e, q) \wedge \underline{s}_i \in {}^{\alpha_e}p_{e,s}\} \tag{7.69}$$

y

$$\overline{s}(e) = \max\{\overline{s}_i : i = 1, \ldots, n(e, q) \wedge \overline{s}_i \in {}^{\alpha_e}p_{e,s}\} \tag{7.70}$$

siendo $n(e, q)$ el número de veces que e ha signado q (el tamaño muestral para e y q). Por ello, dado un conjunto de expertos $\mathcal{E}$, y una vez articulados todos los queiremas por la totalidad de ellos, tenemos $|\mathcal{Q}|$ *clases de queiremas*, todas ellas con $|\mathcal{E}|$ elementos, los anteriores conjuntos Φ-borrosos $\hat{q}_e$.

Cada articulación de un queirema realizada por un indivíduo signante (o sea, el patrón de entrada al sistema) es un conjunto borroso de los valores observados $\{o(s) : s \in \mathcal{S}\}$ procedentes de los dispositivos sensoriales, aunque realmente, debido a los posibles errores presentes en el proceso de medida, estamos sólo seguros de que los valores verdaderos pertenecen a algún intervalo:

$$[o(s) - \Delta_s, \, o(s) + \Delta_s] \tag{7.71}$$

donde Δ_s es una estimación del error asociado a s. Así, cada patrón de entrada puede ser representado mediante un conjunto Φ-borroso. En todo caso, si no se consideran las Δ_s, sería un conjunto borroso, un caso particular de conjunto Φ-borroso.

En este punto, tanto los queiremas clasificados como el patrón de entrada están representados por conjuntos Φ-borrosos. El problema de la clasificación de la entrada puede pues ser resuelto por técnicas clásicas como las de «vecinos más próximos», evaluando las «diferencias» entre la entrada y todos los patrones en cada clase, para todas las diferentes clases.

7.3.4 Queiremas como conjuntos Φ-probabilísticos

Para cada clase de patrones almacenados (conjuntos Φ-borrosos) definimos un prototipo mediante un conjunto Φ-probabilístico. Dado un queirema q, definimos un *prototipo* como el conjunto Φ-probabilístico —*cfr.* §7.3.2:

$$\underline{q}, \overline{q} : \mathcal{S} \times \Omega \to \Omega_c$$

siendo:

$$\Omega = \{\{[\underline{s}(e), \overline{s}(e)] : s \in \mathcal{S}\} : e \in \mathcal{E}\}$$
$$\Omega_c = [0, 1]$$

Así, hemos modelizado el problema del reconocimiento de un queirema como un problema métrico entre conjuntos Φ-probabilísticos. La familia de divergencias anteriormente definidas proporciona una solución aceptable al problema de comparar la representación prototípica de un queirema (un conjunto Φ-probabilístico), con una signación (un conjunto Φ-borroso, caso particular de conjunto Φ-probabilístico).

Dados dos conjuntos Φ-probabilísticos A y B, podríamos evaluar su diferencia, por ejemplo, calculando:

$$\mathcal{O}_{|\mathcal{S}|} \left\{\mathcal{O}_2 \left(D(\underline{A}(s), \underline{B}(s)), D(\overline{A}(s), \overline{B}(s))\right) : s \in \mathcal{S}\right\} \tag{7.72}$$

donde D es una asignación de disimilitud entre distribuciones de probabilidad y $\mathcal{O}_{|\mathcal{S}|}$ y $\mathcal{O}_2$ son operadores de agregación de aridades $|\mathcal{S}|$ y 2, respectivamente.

Otra posibilidad se basa en la definición de conjunto esperado de un conjunto Φ-probabilístico —*cfr.* Ec. 7.65—. Dados dos conjuntos Φ-probabilísticos A y B, podríamos plantear la cuestión con respecto a sus conjuntos Φ-borrosos esperados y calcular:

$$\mathcal{O}_{|\mathcal{S}|} \{D(E(A)(s), E(B)(s)) : s \in \mathcal{S}\} \tag{7.73}$$

donde D es una asignación de disimilitud entre intervalos de números reales.

7.3.5 Comentario: señas QKQ

La importancia del reconocimiento de queiremas radica en que la gran mayoría de las señas de la LSE responden al que denominamos **patrón QKQ**: su reconocimiento es posible a partir de dos queiremas, uno «de salida» y el otro «de llegada», y un kinema (trayectoria) donde se produce la transformación del primero en el segundo. Suponiendo un contexto, esto es, un subconjunto controlado de la lengua natural LSE, de signos QKQ, entonces, cualquier signo (QKQ) es isomorfo a una tríada (queirema, kinema, queirema), y por ende, reconocer cualquier signo (QKQ) equivale a reconocer una tríada (queirema, kinema, queirema).

Para muchos signos ocurre algo que incrementa la importancia del reconocimiento de queiremas, a saber, que el queirema «de salida» y el «de llegada», son el mismo —*cfr.* Fig. 7.4 y siguiente.

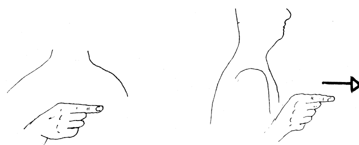


Figura 7.4: *[MAÑANA] (adverbio).* — *Fuente:* Rodríguez [802].



Secuencia de imágenes de la articulación de [NO], una seña QKQ uniqueirema, con un sólo kinema (arco).
— *Fuente:* Sébastien Marcel
— ftp://ftp.idiap.ch/pub/marcel/databases/handpostures/dhp_marcel.tar.gz

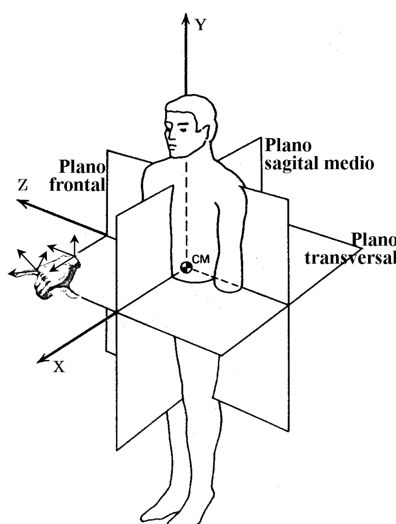


Figura 7.5: *Sistema tridimensional de coordenadas espaciales.*
— *Fuente:* WINTER [803].

Articulación de [HOLA]

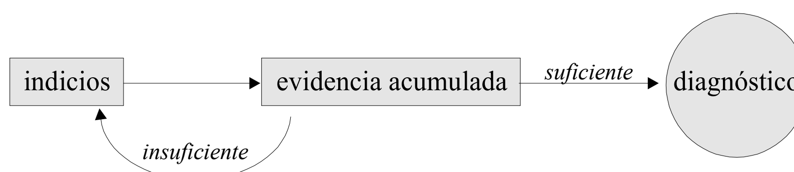
Otro ejemplo de signo QKQ es [HOLA]: queirema: M, toponema: frente, queirotropema: palma hacia el cuerpo, kinema: rectilíneo o ligeramente en arco, kineprosema: hacia el cuerpo. Si en el lenguaje controlado donde queremos ejecutar nuestro proceso de reconocimiento, con el queirema M y un kinema rectilíneo o ligeramente en arco no hay ningún otro signo que comparta queirema y kinema con [HOLA], entonces este último queda identificado por ellos.

Por curiosidad, fijémonos en el desarrollo de la articulación de [HOLA], desde un punto de vista físico. Imaginemos el comienzo de su articulación. Este signo, idealmente, se realiza en el plano sagital medio (XY) —*cfr.* Fig. 7.5.

La *cinemática completa* de cualquier segmento requiere 15 variables dinámicas, a saber, la posición (x, y, z) del centro de masas del segmento, la velocidad lineal $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ del centro de masas del segmento, la aceleración lineal $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ del centro de masas del segmento, los ángulos del segmento respecto de dos planos: θ_{xy}, θ_{yz}, la velocidad angular del segmento en dos planos: ω_{xy}, ω_{yz}, y la aceleración angular del segmento en dos planos: α_{xy}, α_{yz}.

Supongamos que para un intervalo de tiempo hemos obtenido los datos: $\dot{x} = -0.837$ m/s, $\dot{y} = 0.139$ m/s, $\ddot{x} = -8.3$ m/s^2, $\ddot{y} = 4.56$ m/s^2, $\omega_{xy} = 2.02$ rad/s, y $\alpha_{xy} = 12.36$ rad/s^2. La interpretación es sencilla y acorde con el inicio de la articulación de [HOLA]: la componente x de la velocidad del centro de masas de la mano indica que éste se mueve hacia el cuerpo ($\dot{x} = -0.837$ m/s), mientras que la componente y indica un ligero movimiento hacia arriba ($\dot{y} = 0.139$ m/s). Los valores de las componentes de la aceleración lineal indican que hay una aceleración hacia el cuerpo ($\ddot{x} = -8.3$ m/s^2) y hacia arriba ($\ddot{y} = 4.56$ m/s^2). El valor $\omega_{xy} = 2.02$ rad/s indica que la palma (en realidad el eje OX, el eje definido por el sistema muñeca-dedo medio) está girando hacia el cuerpo, y al ser $\alpha_{xy} = 12.36$ rad/s^2 indica una aceleración relativamente grande en sentido contrario a las agujas del reloj.

Nuestras metas



Este esquema ha de tenerse siempre presente en cualquier proceso de diagnóstico o evaluación. El sistema en el que pensamos es bayesiano. Sea S un conjunto de sensores. Representamos la articulación de un queirema

por un individuo signante u mediante un conjunto de síntomas (indicios, evidencias), relativos al sensor s y al usuario u:

$$\mathbf{o}(\mathbf{s}, u) = \{o(s, u) : s \in S\} \tag{7.74}$$

El nuestro es un modelo de evidencia múltiple $\mathbf{e}$=$\mathbf{o}(\mathbf{s}, u)$, estructurado sobre un conjunto finito H de hipótesis exhaustivas y mutuamente excluyentes, que no es otro que el conjunto de posibles queiremas Q. El mecanismo bayesiano consiste en, una vez observada la evidencia múltiple nítida $\mathbf{o}(\mathbf{s}, u)$, estimar el queirema que el individuo u ha signado, como el máximo a posteriori (MAP):

$$\widehat{q} = \arg\max_{q \in Q}\{p(q|\mathbf{o}(\mathbf{s}, u))\} \tag{7.75}$$

con:

$$p(q|\mathbf{o}(\mathbf{s}, u)) = p(q)p(\mathbf{o}(\mathbf{s}, u)|q)/p(\mathbf{o}(\mathbf{s}, u)) \tag{7.76}$$

suponiendo conocidas las probabilidades a priori de los queiremas $p(q)$. Para la estimación de estas probabilidades a priori, primero seleccionamos un *corpus* lingüístico de la LSE y contamos las apariciones de los diferentes signos del corpus elegido de la LSE. Estos hallazgos implican obviamente el conocimiento frecuentista de las probabilidades de cualquier queirema particular de los que forman parte de las articulaciones o realizaciones de los signos del corpus.

El cálculo de las verosimilitudes supone un proceso de entrenamiento. Dos son las metas que tenemos en mente:

- un número reducido de queiremas entrenadores, y
- que los queiremas entrenadores sean independientes de la lengua de signos.

Esto último permitirá extender de inmediato el sistema a otras lenguas de signos. Para conseguirlo debemos basar las configuraciones manuales entrenadoras en algo externo a la LSE, a la vez que significativo.

Nuestra idea es que se basen en las **habilidades motoras del usuario**, esenciales para la realización de los queiremas y la articulación de los signos de cualquier lengua de signos, y no en queiremas propios de una lengua de signos determinada[3].

Un ejemplo es el conjunto de configuraciones manuales correspondiente a la propuesta de evaluación de habilidades motoras genéricas de DENNIS, REICHLE, WILLIAMS y VOGELSBERG [805] —*cfr.* Fig. 7.6.

Una vez que hemos resuelto el problema de categorización, hallando un número determinado de **clases prototipo de usuarios** (c.p.u.), entonces, cuando el sistema se enfrenta a un nuevo usuario, y una vez que éste articule los queiremas evaluadores, el sistema podrá clasificar al usuario como perteneciente a una de las c.p.u. (o creará una nueva), disponiendo así de las verosimilitudes asociadas.

Como hipótesis de trabajo, también suponemos que la desviación de la media en la articulación de un mismo signo es menor si se trata de un experto que si no —el experto «ideal» (no real) siempre articularía exactamente igual un mismo signo.

Manos que «hablan» y ojos que «escuchan»

El problema real que deseamos abordar no es el reconocimiento de queiremas aislados, sino el reconocimiento de un discurso.

Por «segmentar» una seña entendemos el hecho de detectar los instantes de tiempo inicial y final de su articulación. En este proceso de segmentación interviene una *jerarquía de agentes computacionales*. Desde el grupo de recogida de síntomas (indicios, evidencias) —que bien podrían ser valores angulares, si utilizásemos un guante de datos—, meros agentes recolectores de la secuencia cronológica de síntomas —quizás, preprocesados—, hasta los agentes encargados de reconocer específicamente cada componente articulatoria del signo.

[3]En referencia a tales **habilidades motoras**, conocemos el estudio de BOYES-BRAEM [804], sobre la estructura formal de las primeras palabras en lengua de signos. Propuso un modelo teórico evolutivo sobre el desarrollo de las configuraciones manuales en la Lengua de Signos Americana (LSA) basado en el **desarrollo motor de las manos**. Su modelo propone varios estadios en el desarrollo de las configuraciones que siguen la evolución de las propiedades flexoras y extensoras de los músculos de la mano. Según el autor, las primeras palabras (primer estadio) se caracterizan por el predominio de las configuraciones basadas en la flexión total de la mano (puño cerrado, configuraciones A y S, según STOKOE); la extensión de toda la mano (mano abierta, configuraciones 5 y C de STOKOE) y la flexión y extensión de los dedos pulgar e índice (configuraciones L, bO y G de STOKOE). Las previsiones de su modelo son contrastadas con un pequeño estudio empírico.

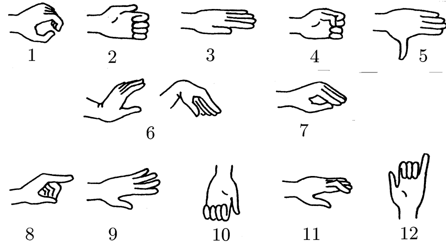


Figura 7.6: *Articulación de queiremas evaluadores de ciertas habilidades motoras: 1) presión de garra; 2) presión de carpo; 3) aducción del pulgar; 4) posición media del antebrazo; 5) abducción del pulgar; 6) movimiento de la muñeca; 7) presión de oposición; 8) prensión lateral aislada del pulgar; 9) prensión de soltar; 10) inversión completa; 11) dedos cruzados; 12) aislamiento del meñique.* — *Fuente:* DENNIS, REICHLE, WILLIAMS y VOGELSBERG [805].

Imaginemos que nuestros síntomas son valores angulares. *Detectar movimientos* significa reconocer cambios de coordenadas en el tiempo. Dado un punto de observación (por ejemplo, la punta de un dedo) de coordenadas $P = (x, y, z)$, rápidamente detectamos si está en movimiento o no; sólo hay que observar si se produce un cambio de coordenadas[4], esto es, si es no nulo el vector $\Delta P = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = P(t_i) - P(t_{i+1})$, donde t_i and t_{i+1} representan dos instantes consecutivos de tiempo (si la frecuencia de muestreo sensorial es constante, entonces $\Delta P = P(t) - P(t + \Delta t)$).

Por ejemplo, podríamos detectar los tres *kinemas dactílicos simples* a partir de las siguientes variaciones angulares:

$$\Delta\angle^d_{art} \equiv \angle^d_{art}(t_i + \Delta t) - \angle^d_{art}(t_i) \tag{7.81}$$

$$\Delta\vee^d_{art} \equiv \vee^d_{art}(t_i + \Delta t) - \vee^d_{art}(t_i) \tag{7.82}$$

$$\Delta\vee_{\text{CMC}} \equiv \Delta \vee_{\text{CMC}} (t_i + \Delta t) - \Delta \vee_{\text{CMC}} (t_i) \tag{7.83}$$

La identificación de los tipos de movimiento de la mano, considerada en su totalidad, es tan sencilla (o tan compleja) como el reconocimiento de una trayectoria determinada en el espacio. Dicha trayectoria podría aproximarse por una poligonal, muestreando con una frecuencia (según recomiendan estudios de terceros) no

[4] Supongamos determinadas las longitudes de las falanges, $d(MF, IFP)$, $d(IFP, IFD)$ y $d(IFD, Punta)$, lo cual no es sencillo. Observemos la Fig. 7.7. Sea X el eje determinado por el dedo medio; Y, el eje que sale hacia el dorso de la mano; Z, hacia abajo. Los ejes X y Z, determinan el plano en el que se produce el movimiento caracterizado por los ángulos correspondientes a las articulaciones IFP e IFD, de cada dedo trifalángico. Las **coordenadas de la punta de un dedo trifalángico** (para el dedo pulgar es similar, sobrando los sumandos correspondientes a $d(IFP, IFD)$), quedan determinadas por:

$$P_x = IFD_x + d(MF, IFP)cos\angle F_P + d(IFP, IFD)cos\angle F_M + d(IFD, Punta)cos\angle F_D \tag{7.77}$$

$$P_z = IFD_z + d(MF, IFP)sen\angle F_P + d(IFP, IFD)sen\angle F_M + d(IFD, Punta)sen\angle F_D \tag{7.78}$$

$$P_y = IFD_y + (sen \vee A)d\sqrt{P_x^2 + P_z^2} \tag{7.79}$$

No obstante ha de observarse lo siguiente.

- La medida del ángulo F_D no suele ser proporcionada por algunos guantes de datos, si bien existen estimaciones en la literatura —*cfr. v. gr.* DORNER [806]; LEE y KUNII [807, 808]. Por ejemplo, según LEE y KUNII [807, 808]:

$$F_D = \frac{2}{3}F_M \tag{7.80}$$

- En presencia de errores de calibración en los sensores de flexión y aducción y en la medición de las longitudes de las falanges, la posición medida difiere de la real de una forma considerable —*cfr.* BURDEA y COIFFET [809].

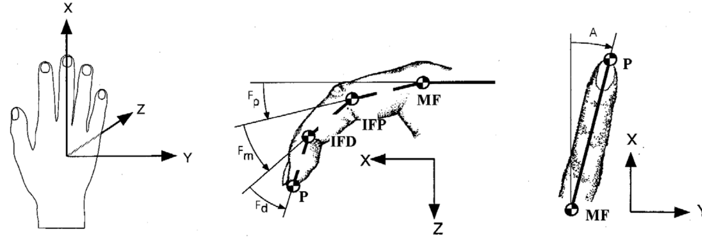


Figura 7.7: *Posición de las puntas de los dedos a partir de la información angular.*
— *Fuente:* SORIANO, GONZÁLEZ, GONZÁLEZ y LÓPEZ [810]. Los dibujos proceden de STURMAN [795].

mayor de 10 tomas por segundo. Aparte de otras que, indudablemente, habría que estudiar, si nos basamos en el trabajo previo de varios autores, la característica más discriminante —*cfr. v. gr.* STURMAN [795]—, es el **producto vectorial relativo** a cada par de vectores consecutivos —*cfr.* Fig. 7.8.

$$\frac{\Delta\angle(t)}{\Delta t},\ \frac{\Delta vel_{\angle}(t)}{\Delta t},\ \frac{\Delta acel_{\angle}(t)}{\Delta t},\ \ldots \tag{7.100}$$

son monótonas decrecientes y que cuanto más pequeño sea Δt, más rápidamente convergen a cero.

Debido a ello y al *teorema de Taylor*, podríamos estimar la posición $\Delta\vec{\alpha}(t+\Delta t)$ y el ángulo $\angle(t+\Delta t)$ en función de los ya conocidos $\Delta\vec{\alpha}t$ y $\angle(t)$. Por ejemplo, para $\angle(t)$ (y $p=3$):

$$\hat{\angle}_p(t+\Delta t) = \angle(t) + vel_{\angle}(t)\Delta t + \frac{1}{2}acel_{\angle}(t)\,(\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta acel_{\angle}(ct)}{\Delta t}\right)(\Delta t)^3 \tag{7.101}$$

con $c \in (t, t+\Delta t)$. Si $\Delta t = 1$, $\hat{\angle}_p(t+1)$ puede ser un buen estimador de $\angle(t+1)$:

$$\hat{\angle}_p(t+1) = \angle(t) + \frac{5}{2}vel_{\angle}(t) - \frac{1}{2}vel_{\angle}(t-1) \tag{7.102}$$

o lo que es lo mismo:

$$\hat{\angle}_p(t+1) = \frac{5}{2}\angle(t) - 2\angle(t-1) + \frac{1}{2}\angle(t-2) \tag{7.103}$$

Podríamos estimar el *error* de esta aproximación por Taylor (según el *resto de Lagrange*); si $\Delta t = 1$, y teniendo en cuenta que $\Delta acel_{\angle}(ct) \simeq \Delta acel_{\angle}(t)$, obtenemos:

$$Error\left(\hat{\angle}_p(t+1)\right) \simeq \frac{|\angle(t) - 3\angle(t-1) + 3\angle(t-2) - \angle(t-3)|}{6} \tag{7.104}$$

Esta predicción resulta de utilidad, aun en el caso de un dispositivo de adquisición que proporcione directamente los ángulos $\angle(t)$, como un guante de datos, pues, a partir de ella, se puede *eliminar ruido*, y confirmar o rectificar lo obtenido hasta ese momento, es decir puede realizarse un *reajuste de datos* en base a esas predicciones.

Si el dispositivo de adquisición es una cámara, este tipo de predicciones podría ayudar a resolver estimaciones en caso de *oclusión*.

(*) En $\mathbb{R}^3$, se define un **camino** como cualquier aplicación continua $\alpha : [0,a] \to \mathbb{R}^3$, donde $a \geq 0$ es el *instante de parada* en el que cesa el movimiento. A $\alpha(0)$ y $\alpha(a)$ se les denomina *origen* (punto inicial) y *destino* (punto final) del camino α. Se llama *camino recto segmentado* a cualquier poligonal (alabeada o no) en $\mathbb{R}^3$. En $[0,a]$ puede destacarse un conjunto finito de puntos $\{t_1,\ldots,t_n\}$. La notación $\alpha_i = \alpha(t_i)$ es habitual.

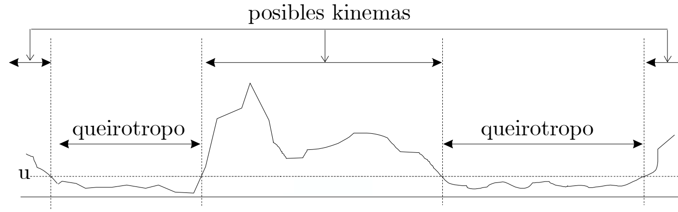


Figura 7.9: *Un signo QKQ. El eje de ordenadas representa el rango de S; el de abcisas es un eje de tiempo.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

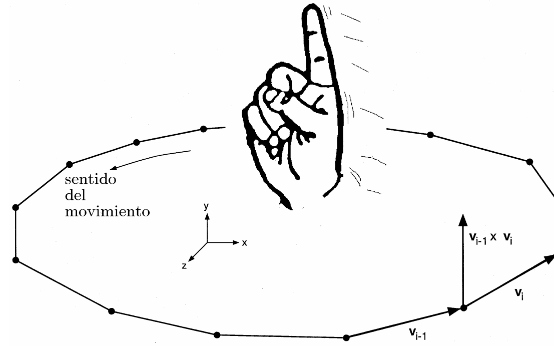


Figura 7.8: *La característica más discriminante de los signos en movimiento, según varios estudios: el producto vectorial relativo a cada par de vectores consecutivos.*
— *Fuente:* Sturman [795].

En todo caso, la metodología consiste en que ciertos *agentes segmentadores* evaluen un conjunto de *activadores* o indicadores de movimiento, cuya importancia relativa puede ponderarse según determinados factores de relevancia. La agregación S de las valoraciones de estos activadores, se compara con un valor umbral u, de presencia de movimiento. Si $S < u$, se estima que no hay movimiento —*cfr.* Fig. 7.9—. El conocimiento de las velocidades y aceleraciones también ayudará a segmentar los queiremas de inicio y final, de hecho, seguramente deberán formar parte del conjunto de indicadores de movimiento[5].

[5] **Velocidades y aceleraciones.-** En el proceso de reconocimiento de algunos de los diferentes atributos del movimiento, podrían utilizarse *velocidades* y *aceleraciones lineales* de los vectores $\vec{a}_i$, que calcularíamos de la forma siguiente. La *velocidad*:

$$\vec{v}_i = \frac{\vec{a}_i}{\Delta t_i} \tag{7.84}$$

$$= \frac{\vec{a}_i}{t_i - t_{i-1}} \tag{7.85}$$

la *velocidad lineal*:

$$v_i = \|\vec{v}_i\| \tag{7.86}$$

y la *aceleración*:

$$\vec{A}_i = \frac{\vec{v}_i}{\Delta t_i} \tag{7.87}$$

o bien, con las correspondientes a los vértices de un camino$^{(*)}$ α:

$$\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i} = \frac{\vec{\alpha}_{\mathrm{i}+1} - \vec{\alpha}_{\mathrm{i}-1}}{\Delta \mathrm{t}_\mathrm{i} + \Delta \mathrm{t}_{\mathrm{i}+1}} \tag{7.88}$$

$$= \frac{\vec{\alpha}_{\mathrm{i}+1} - \vec{\alpha}_{\mathrm{i}-1}}{2\Delta \mathrm{t}} \tag{7.89}$$

$$\vec{\mathrm{A}}_\mathrm{i} = \frac{\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{i}+1} - \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{i}-1}}{\Delta \mathrm{t}_\mathrm{i} + \Delta \mathrm{t}_{\mathrm{i}+1}} \tag{7.90}$$

$$= \frac{\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{i}+1} - \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{i}-1}}{2\Delta \mathrm{t}} \tag{7.91}$$

De este modo segmentamos un *queirotropo* = queirema + queirotropema + toponema. y por tanto de conseguir su segmentación. En la zona donde se ha detectado movimiento es donde habrá de reconocerse el kinema.

Cualquiera de los agentes segmentadores anteriores, al descubrir un instante de tiempo, donde se ha producido un cambio significativo, «avisa» al *agente registrador*, el cuál se encarga de registrar, toda la información proporcionada y actualizada por todos los agentes segmentadores, desde el último registro, hasta ese preciso momento.

Existe un *grupo unificador*, encargado de realizar, siempre que sea posible, la unificación de ciertos componentes de registros consecutivas. Por ejemplo, imaginemos una secuencia de 10 registros, donde la información del *agente inspector de movimiento* ha sido la que muestra la Fig. 7.10.

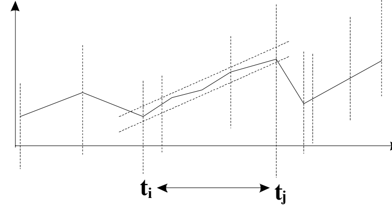


Figura 7.10: *Ejemplo de información proporcionada por un agente inspector de movimiento, y posterior actuación de un agente unificador.* — *Fuente:* Elaboración propia.

El *agente reconocedor de kinemas* es el encargado de identificar en este caso, que, en conjunto, se ha realizado un kinema de tipo *zig-zag*. También forma parte de su labor, la interpretación de ciertos caminos poligonales, por ejemplo, $[t_i, t_j]$, como líneas rectas (debido, por ejemplo, a que las pendientes consecutivas no presentan diferencias superiores a un umbral prefijado) —*cfr.* Fig. 7.10.

Pero no sólo se trata de kinemas. En general, cualquier información aportada por cualquier agente de los

Observemos que en el cálculo de la aceleración en el punto $\vec{\alpha}_i$ intervienen cinco puntos, desde $\vec{\alpha}_{i-2}$ hasta $\vec{\alpha}_{i+2}$. Esto *aumenta el intervalo de proceso* en la tarea de reconocimiento. Podríamos reducir este número a tres, utilizando dos puntos auxiliares, $\vec{\alpha}_{i-1/2}$ y $\vec{\alpha}_{i+1/2}$, de modo que:

$$\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{i}-1/2} = \frac{\vec{\alpha}_{\mathrm{i}} - \vec{\alpha}_{\mathrm{i}-1}}{\Delta \mathrm{t}_{\mathrm{i}}} \tag{7.92}$$

$$\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{i}+1/2} = \frac{\vec{\alpha}_{\mathrm{i}+1} - \vec{\alpha}_{\mathrm{i}}}{\Delta \mathrm{t}_{\mathrm{i}+1}} \tag{7.93}$$

y, por tanto, suponiendo constante el intervalo de muestreo, $\Delta t_i = \Delta t_{i+1} = \Delta t$:

$$\vec{\mathrm{A}}_{\mathrm{i}} = \frac{\vec{\alpha}_{\mathrm{i}+1} - 2\vec{\alpha}_{\mathrm{i}} + \vec{\alpha}_{\mathrm{i}-1}}{(\Delta \mathrm{t})^2} \tag{7.94}$$

En un movimiento genérico de rotación en torno a un eje, se define la *velocidad angular* (media) como el cociente entre la variación del ángulo y la variación de tiempo, esto es:

$$vel_{\angle}(t) = \frac{\Delta\angle(\mathrm{t})}{\Delta \mathrm{t}} \tag{7.95}$$

donde $\Delta\angle(t) = \angle(t) - \angle(t - \Delta t)$, y por tanto, si $\Delta t = 1$ (*frecuencia de muestreo constante*):

$$vel_{\angle}(t) = \angle(t) - \angle(t-1) \tag{7.96}$$

La *aceleración angular* (media) se define como:

$$acel_{\angle}(t) = \frac{\Delta vel_{\angle}(t)}{\Delta t} \tag{7.97}$$

así, si $\Delta t = 1$:

$$acel_{\angle}(t) = vel_{\angle}(t) - vel_{\angle}(t-1) \tag{7.98}$$

Frank G. Hofmann y Günter Hommel [811] proponen el uso de *sensores de aceleración* que proporcionen directamente las mediciones relativas a ésta.

Predicción de la posición y de la separación angular.- Parece razonable suponer que si Δt es pequeño, los posibles cambios en las velocidades y aceleraciones sean prácticamente despreciables. De hecho, lo que parece razonable es suponer que las sucesiones:

$$\frac{\Delta\vec{\alpha}(t)}{\Delta t},\ \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t},\ \frac{\Delta\vec{A}(t)}{\Delta t},\ \ldots \tag{7.99}$$

grupos anteriores, en un registro, puede ser similar a la del registro siguiente, o tener un atisbo de continuidad. Por ello, a cada agente de los grupos anteriores le corresponde «su» *agente unificador*.

* * *

En este marco relativo al movimiento, también trabajaremos con conjuntos de usuarios que articulen de manera similar un mismo kinema o signo. Como patrones entrenadores, y a la espera de mejoras futuras, podríamos elegir signos o kinemas que se correspondan a la clasificación de Dennis, Reichle, Williams y Vogelsberg [805], de habilidades motoras referentes al movimiento:

- movimiento de una sola mano
- movimiento simétrico de dos manos
- movimiento de una sola mano que cruza la línea central (p.ej., limpiar la mesa con un trapo);
- uso de dos manos: una que descansa y una que se mueve ();
- dos manos en movimiento (más o menos libre);
- las dos manos cruzan la línea central.

* * *

Ahondar más en todo esto sobrepasa los fines de la presente Tesis. Insistamos en que nuestra meta, a corto-medio plazo es reconocer un discurso articulado en la lengua controlada LSE_{QKQ}, es decir, un discurso donde sólo intervengan signos QKQ de la LSE. Nuestra meta final es clara: reconocer en tiempo real un discurso articulado en la LSE. Pero esta es una meta a largo plazo.

Dejamos para otros el problema —que puede ser abordado de manera independiente— de la traducción entre la LSE y el español hablado.

Quizás sólo resta decir que la representación más natural de los queiremas es con palabras. Por ejemplo, Recordando el ejemplo del queirema que represente dactilológicamente la letra [I], podemos describirlo como el subconjunto borroso de tipo 2:

$$\mathsf{flexionado}/s_1 + \ldots + \mathsf{flexionado}/s_8 + \mathsf{extendido}/s_9 + \mathsf{extendido}/s_{10}$$

En la Fig. 7.11 puede apreciarse la diferencia entre tres descripciones posibles: nítida, borrosa y borrosa de tipo 2, usando como referentes los dedos, en vez de las uniones interfalángicas. El ejemplo que muestra dicha figura es la letra [C], donde 1 significa la cualidad «completamente extendido» y el conjunto de términos es: $L = \{$flexionado (F), algo flexionado (AF), ni flexionado ni extendido (NFE), algo extendido (AE), extendido (E)$\}$.

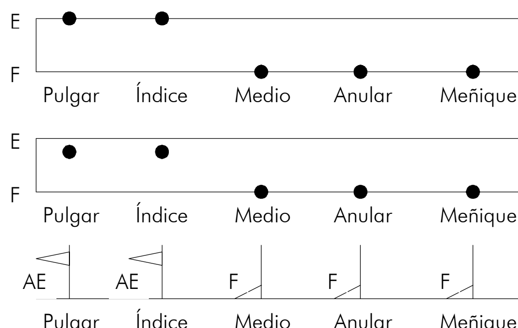


Figura 7.11: *Tres descripciones de la configuración dactilológica que representa la letra [C]. En orden descendente son: descripción nítida, descripción borrosa y descripción borrosa de tipo 2.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Este tipo de representación hace que dirijamos nuestras miradas y pensamientos a los Capítulos 15, 16, 17 y 18. Uno de nuestros mayores problemas es la generación de las probabilidades a priori de los queiremas, debido a que han de deducirse de un gran corpus de la $\mathrm{LSE}_{\mathrm{QKQ}}$. En ello estamos y deseamos reiterar nuestro agradecimiento a María del Carmen MARTÍNEZ PICÓN —pedagoga terapéutica, intérprete de la lengua de señas española (LSE), y conocedora de la lengua de señas marroquí—, por su disposición para emprender el camino de las transcripciones necesarias para las futuras simulaciones y experiencias, así como por sus enseñanzas sobre los sistemas alternativos y aumentativos de comunicación (AAC).

7.4 Estudio ilustrativo: comparación de imágenes digitales

En esta sección, consideramos la posibilidad de comparar «figuras» planas mediante la agregación de la distancia entre sus centroides y de la distancia entre sus fronteras, tanto si estas últimas son conexas —cfr. §7.4.4—, como si no lo son —cfr. §7.4.5.

7.4.1 Motivación y presentación

El análisis de intervalos en los apartados anteriores, nos sugiere la siguiente cuestión: ¿Por qué no comparamos «figuras» planas mediante la agregación de la distancia entre sus centroides (que indicaría el efecto de una traslación) y de la distancia entre sus fronteras (que indicaría el efecto de una homotecia)?

$$D(F_1, F_2) = \mathrm{Aggr}\{d(CM_{F_1}, CM_{F_2}), D(\delta A, \delta B)\} \tag{7.105}$$

Dada una función acotada $f(x, y)$, el **momento general** de orden $p, q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, está definido según:

$$m_{p,q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy \tag{7.106}$$

Para toda función acotada $f(x, y)$, existe un único conjunto de momentos generales y viceversa. Es decir, la función queda identificada por su conjunto de momentos asociados. Esto significa que puede reconstruirse la función, a partir de tal conjunto.

Las imágenes digitales planas son conjuntos cerrados. Queremos decir, que cualquier imagen digital se identifica topológicamente con su adherencia (su interior unión su frontera). El formalismo habitual sugiere representar una imagen digital plana de grises mediante una matriz de intensidades o factores de luminosidad $I(x, y)$, con $x, y \in [0, N-1] \cap \mathbb{N}$. Evidentemente, $I(x, y)$ es una función acotada.

Debido a la finitud de $I(x, y)$, se habla de los **momentos generales discretos** de la función $I(x, y)$, que son, para todo $p, q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$:

$$m_{p,q} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} x^p y^q I(x, y) \tag{7.107}$$

La función $I(x, y)$ puede ser la que es, o bien puede ser redefinida como la función característica de la frontera, o del objeto (la unión de su interior con su frontera). Nosotros preferimos trabajar con la función $I(x, y)$ original. Es necesario observar, por otro lado, que los momentos generales basados en la unión de su contorno y su interior son más robustos que los que únicamente se basan en su contorno —*cfr.* MARAVALL [812].

En los problemas de reconocimiento de formas se usan los momentos como componentes del vector de características de la imagen. En realidad, no se usan los $m_{p,q}$ anteriores, sino otros que se construyen a partir de ellos, y que son **momentos invariantes** respecto a traslaciones, giros y homotecias (contracciones y dilataciones). Obviamente, el mayor problema de esta metodología es encontrar el número (finito) de momentos necesarios para reconstruir *aceptablemente* la imagen $I(x, y)$. En general, cuanto más irregular sea el contorno de una imagen, más momentos serán necesarios para su reconstrucción —*cfr.* Fig. 7.12.

El método que presentamos en esta sección, evita este problema. Independientemente de lo irregular que sea una figura, los únicos momentos que usamos son los relacionados con las definiciones del centro de gravedad —*cfr.* Ec. 7.110— y del eje de mínima inercia —*cfr.* Ec. 7.114ss—, es decir, sólo usamos el conjunto de momentos —*cfr.* Ecs. 7.110, 7.122, y 7.112:

$$\{m_{0,0}, m_{0,1}, m_{1,0}\} \tag{7.108}$$

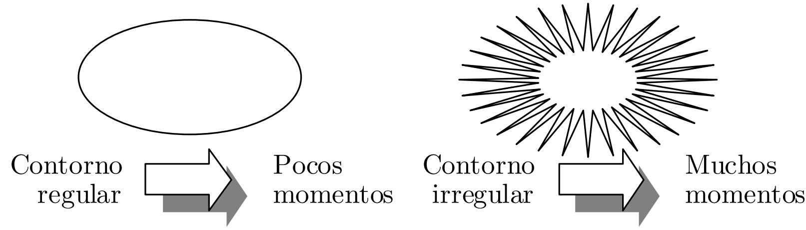


Figura 7.12: *Relación entre la irregularidad del contorno y el número de momentos generales necesarios para la reconstrucción de la imagen.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

o a lo sumo, el conjunto «práctico» (en términos de complejidad computacional) —*cfr.* Ecs. 7.110, 7.122, y 7.113:

$$\{m_{0,0}, m_{0,1}, m_{1,0}, m_{1,1}, m_{0,2}, m_{2,0}\} \tag{7.109}$$

7.4.2 Centro de gravedad y dirección de mínima inercia

El **centro de gravedad**, o de masas, de una imagen, es un punto único de referencia de una imagen $I(x, y)$:

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{m_{1,0}}{m_{0,0}}, \frac{m_{0,1}}{m_{0,0}}\right) \tag{7.110}$$

$$= \left(\frac{\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} xI(x,y)}{\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} I(x,y)}, \frac{\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} yI(x,y)}{\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} I(x,y)}\right) \tag{7.111}$$

Los momentos $m_{p,q}$ se pueden transformar en unos momentos invariantes a traslaciones, los conocidos como **momentos centrales**. Para ello, sólo hay que redefinirlos en base al centro de gravedad:

$$\mu_{p,q} = \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} (x-\overline{x})^p (y-\overline{y})^q I(x,y) \tag{7.112}$$

$$= \sum_{r=0}^{p}\sum_{s=0}^{q} \binom{p}{r}\binom{q}{s} (-\overline{x})^r (-\overline{y})^s m_{p-r,q-s} \tag{7.113}$$

Igual que el centro de gravedad es un punto único de referencia de una imagen, podemos plantearnos la búsqueda de una dirección única de referencia de una imagen: su **eje de mínima inercia**. Sea (α, β) un punto genérico de una recta que forma un ángulo θ con el eje X:

$$(y-\beta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}(x-\alpha) \tag{7.114}$$

El momento de inercia de una figura plana $I(x, y)$, respecto a la recta anterior es:

$$M_i(x,y,\theta) = \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} \left((x-\alpha)\operatorname{sen}\theta - (y-\beta)\cos\theta\right)^2 I(x,y) \tag{7.115}$$

La condición de mínimo para el momento de inercia M_i, respecto a la posición es:

$$\left(\frac{\partial M_i}{\partial x}(x,y,\theta), \frac{\partial M_i}{\partial y}(x,y,\theta)\right) = (0,0) \tag{7.116}$$

o sea, si

$$(\overline{x}-\alpha)\operatorname{sen}\theta - (\overline{y}-\beta)\cos\theta = 0 \tag{7.117}$$

lo que se resume en que:

$$(\overline{x}, \overline{y}) = (\alpha, \beta) \tag{7.118}$$

Es decir, el eje de mínima inercia pasa por el centro de gravedad de la imagen.

La mínima inercia en $(\overline{x}, \overline{y})$ se consigue para un ángulo θ tal que:

$$\frac{\partial M_i}{\partial \theta}(\overline{x}, \overline{y}, \theta) = 0 \tag{7.119}$$

o lo que es lo mismo, tal que:

$$\tan^2 \theta + (\mu_{2,0} - \mu_{0,2}) \frac{\tan \theta}{\mu_{1,1}} + 1 = 0 \tag{7.120}$$

y como

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \tag{7.121}$$

entonces, el ángulo θ determinante de la dirección de mínima inercia es:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\mu_{1,1}}{\mu_{2,0} - \mu_{0,2}} \tag{7.122}$$

7.4.3 Cápsulas convexas

Ante la complejidad que puede suponer trabajar directamente con una representación puntual (independientemente de la métrica elegida), se podría trabajar —y es usual hacerlo, por ejemplo, al abordar problemas de *planificación de trayectorias* en Robótica, *diseño de circuitos electrónicos*, *planificación de ensamblado*, o en el campo de la *animación por computador*— con unas primeras aproximaciones poliédricas externas (cápsulas), e incluso con una jerarquía de aproximaciones, de tal manera que una solución a la posible indecisión transitoria sería refinar esta aproximación, ascendiendo en la jerarquía. Lo único que suele exigirse es la convexidad de las cápsulas.

Las cápsulas más utilizadas —*cfr.* Fig. 7.13— (aunque en otros campos de estudio) son, la *envolvente convexa, rectángulo (*paralelótopo*), rectángulo ortogonal* (paralelótopo ortogonal) —*caja envolvente* (*bounding box*), en $\mathbb{R}^n$, un paralelótopo, cuyas aristas son paralelas al sistema de referencia—, *rectángulo hemiesférico* (de extremos semicirculares) (paralelótopo hemiesférico), *cilindro hemiesférico*, *circunferencia* (esfera) y *elipse* (elipsoide).

7.4.4 Comparación de figuras (imágenes binarias) planas con fronteras conexas

De vuelta a la cuestión de partida, consideremos la posibilidad de comparar «figuras» planas mediante la agregación de la distancia entre sus centroides y de la distancia entre sus fronteras. Dadas dos figuras F y G, su distancia estaría determinada por:

$$D(F, G) = \text{Aggr}\{d(CM_F, CM_G), D(\delta F, \delta G)\} \tag{7.123}$$

donde Aggr es una operación de agregación.

Para el cómputo de $D(\delta F, \delta G)$ se utiliza una semirrecta, con origen en los centros de masa de las figuras. Estas semirrectas recorren las diferentes fronteras —*cfr.* Figs. 7.14.a y 7.14.b—, comparándolas puntualmente, en los puntos de corte con la semirrecta. Tal semirrecta puede recorrer las fronteras de manera continua, o «a saltos». En definitiva, lo que se hace es α-percentilar las fronteras, habiendo normalizado su longitud a uno, siendo finito el α-percentilado, correspondiente al recorrido «a saltos».

Observemos de nuevo la Fig. 7.14. El caso (c) refleja un ligero desplazamiento, mientras que en el caso (d) parece que las figuras son de clases distintas (rombo y cuadrado). Cada figura plana se enmarca en su envolvente convexa de tipo rectángulo ortogonal (lados paralelos al diedro). Como observa Miguel Macías [813], para evitar la situación (c), cada figura se rota de forma que su eje de mínima inercia coincida con el eje más cercano del diedro (sombreado) (si buscásemos la coincidencia siempre con el mismo eje del diedro, el rombo y el cuadrado de la figura (d) serían indistinguibles).

Mediante el Algoritmo 140, podemos:

- computar la distancia entre dos figuras planas como la suma de las distancias entre los centros de masa y la distancia entre las fronteras, o bien,

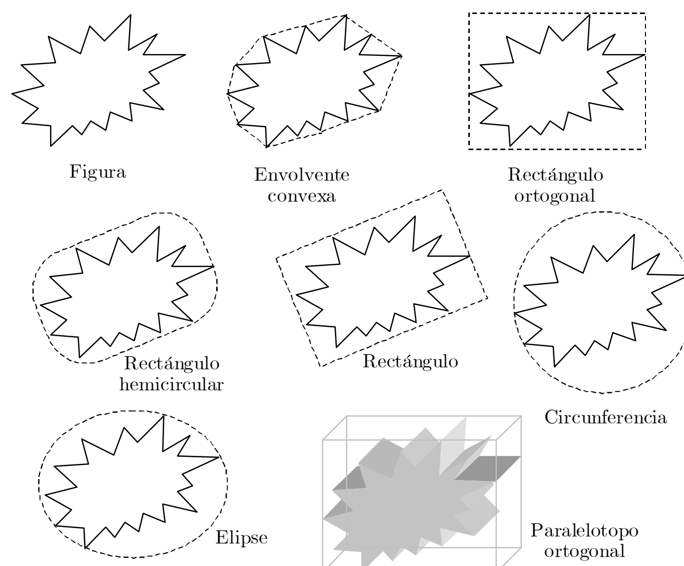


Figura 7.13: *Ejemplos de cápsulas convexas. La extensión de estas cápsulas a espacios de mayor dimensión es intuitivo, como se aprecia en el paralelotopo ortogonal, extensión del rectángulo ortogonal.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

- sólo comparar la forma de dos figuras planas.

Algorithm 140 *Comparación y cómputo de la distancia entre figuras planas*

---

1. Calcular los ejes de mínima inercia.
2. Hacer coincidir cada eje de mínima inercia con el eje más cercano del diedro.
3. Si los ejes más cercanos del diedro no han sido el mismo, entonces ir a FIN (no tienen la misma forma)
4. Cómputo de la distancia entre los centros de masas.
5. Hacer coincidir ambos centros de masas.
6. Si sólo se quiere comparar la forma, entonces inter-ajustar las envolventes convexas (de tipo rectángulo ortogonal) de ambas figuras. Esto define una dilatación de la imagen original de menor tamaño.
7. Mediante la rotación de una semirrecta, con origen en el centro de masas, recorremos ambas fronteras —cfr. Figs. 7.14.a y 7.14.b—, midiendo, para cada posición distinta de la semirrecta, la distancia entre los puntos de las fronteras, que son también puntos de corte de la semirrecta.
8. Cómputo de la distancia entre las fronteras como la agregación, recorriendo el conjunto de todas las semirrectas, de todas las distancias locales calculadas en (6).
9. FIN

La Fig. 7.15 muestra un esquema gráfico de este algoritmo.

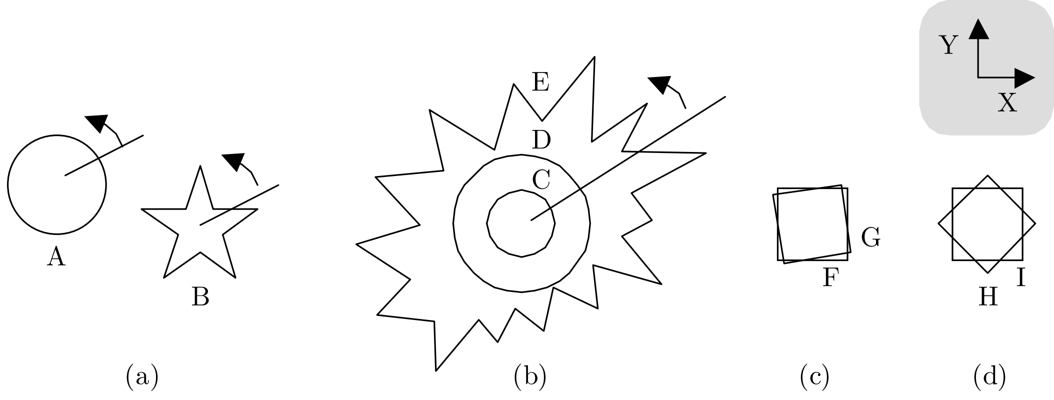


Figura 7.14: *(a) y (b): Comparación puntual de las fronteras mediante una semirrecta rotatoria.*
(c) y (d): ¿Cuándo son dos cuadrados y cuándo es un cuadrado y un rombo?
—*Fuente:* Elaboración propia.

Ejemplo 141 *Todo ello es aplicable, por ejemplo, a caracteres cuyas fronteras sean conexas —cfr. Fig. 7.16 (letra E)—. En este caso, las fronteras son conjuntos finitos de píxeles. Resultará computacionalmente más sencillo recorrer una frontera, a partir de un punto «semilla», encadenando todos los demás pixels de la frontera —«código cadena»: cfr. v. gr.* Pavlidis *[814, 815];* González *y* Woods *[816].*

Pero las fronteras tienen en general distinto número de pixels. Insistamos, lo que hacemos es α-percentilar ambas fronteras δF y δG con el mismo α-percentilado, calculando posteriormente las distancias entre cada par de α-percentiles $(\delta F)_\alpha$ y $(\delta G)_\alpha$ y agregando finalmente todos estos resultados, obtenemos $D(\delta F, \delta G)$.

7.4.5 ¿Y si las fronteras no son conexas?

Si la frontera no es conexa —*cfr.* Fig. 7.16 (letra O)—, es mejor cambiar de técnica. En vez de recorrer la frontera, trabajaremos con cortes horizontales.

En este ejemplo, trabajando con una disimilitud normalizada, podríamos considerar que $d(R_O, R_E) = d(S_O, S_E) = 1$. Por otro lado, $d(P_O, P_E) = 0$. En el corte que muestra la figura, Q_O es aproximadamente 1/3, mientras que $Q_E = 1$. De aquí que, la **estimación puntual** de la distancia entre los α-cortes que muestra la Fig. 7.16, sea:

$$d(^\alpha O, ^\alpha E) = \frac{1}{4}\left(0 + \frac{2}{3} + 1 + 1\right) = \frac{2}{3}$$

También podemos recurrir a la **estimación por intervalos** de la distancia entre los α-cortes que muestra la Fig. 7.16, mediante:

$$d(^\alpha O, ^\alpha E) = d([P_O, Q_O] \cup [R_O, S_O], [P_E, Q_E])$$

a semejanza de lo visto para conjuntos borrosos «*normocordes*» —*cfr.* §7.1.5—. Por ejemplo, para un percentilado $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, tenemos:

$$d(^\alpha O, ^\alpha E) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

De este modo, dado un conjunto de N cortes, una estimación de la distancia total entre los caracteres es:

$$D(O, E) = \frac{1}{N}\sum^{N} d(^\alpha O, ^\alpha E)$$

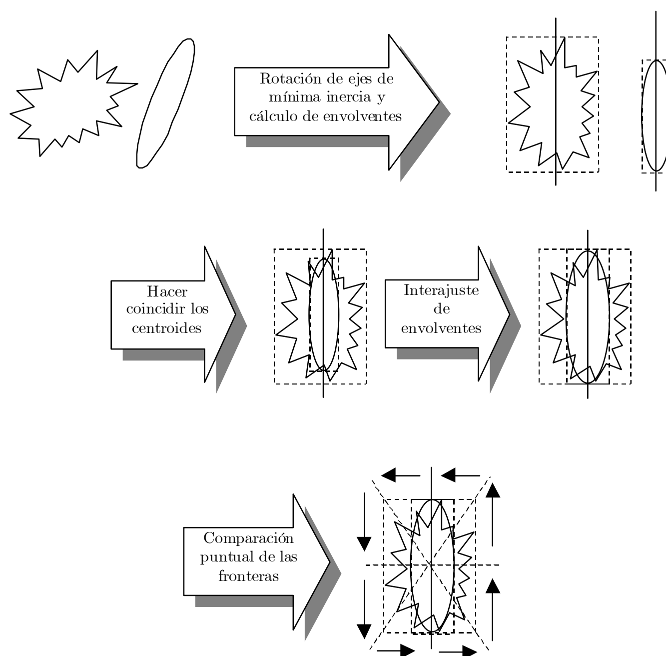


Figura 7.15: *Diagrama del algoritmo que permite calcular la distancia entre dos figuras planas como suma de las distancias entre los centros de masa y la distancia entre las fronteras, o simplemente comparar los contornos de dos figuras planas.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

7.5 Resumen

En este capítulo hemos propuesto asignaciones de medida de comparación entre conjuntos borrosos, disimilitudes, algunas de ellas, métricas. En §7.1 hemos propuesto comparar conjuntos borrosos a partir de las diferencias entre los referentes. Para poder hacer lo dicho, hemos supuesto que el universo de discurso es $\mathbb{R}$ o un retículo normado. De este modo, los α-cortes son intervalos del retículo, y lo que hemos hecho, en definitiva, es comparar conjuntos borrosos a partir de las comparaciones entre sus α-cortes, pudiendo utilizar las asignaciones de comparación entre intervalos propuestas en el capítulo anterior, para el caso de α-percentilado finito, infinito numerable y continuo. Como ejemplos, hemos estudiado en §7.1.4 la **comparación de cuasi-números borrosos triangulares**, y en §7.1.5, la comparación de los que hemos propuesto denominar conjuntos borrosos *«normocordes»* (del lat. *normalis* y de *cordel* —de *cuerda*, del lat. *chorda*—; en inglés, proponemos la denominación «*climbing*») conjuntos borrosos cerrados y normales tales que todos los puntos donde se alcanza un máximo local pertenecen al núcleo del conjunto.

En cuanto a la interpretación más natural de los valores del indicador de comparación que hemos propuesto en §7.2, así como la de los otros que hemos repasado, esa «verticalidad», se refiere al grado de «superposición» entre conjuntos borrosos. Tras repasar, en §7.2.1 y §7.2.2, varios antecedentes, en §7.2.4 hemos propuesto la definición de **truncamiento de un conjunto borroso a un nivel significativo de pertenencia** determi-

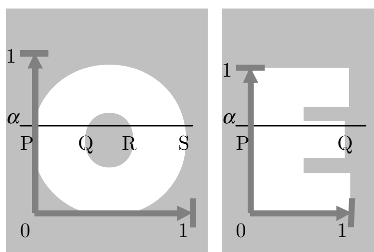


Figura 7.16: *El carácter digital <O> no tiene frontera conexa.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

nado, lo que nos ha permitido definir, a continuación, una disimilitud «vertical» entre conjuntos borrosos.

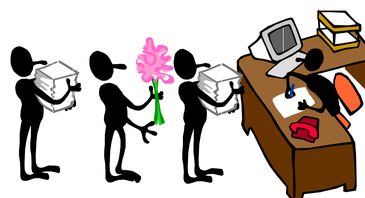
En §7.3 hemos mostrado un ejemplo con la pretensión de ilustrar lo expuesto en el capítulo. Se trata de **reconocer queiremas aislados**, o sea, configuraciones manuales aisladas —*cfr.* §A.6.1—. Este reconocimiento se ha hecho en un **ambiente híbrido de incertidumbre e imprecisión**, como preludio a lo que veremos en §15, §16 y §17, sin olvidarnos de §18. En concreto, en el ejemplo, hemos encontrado una solución a dicha cuestión de reconocimiento, representándola como un problema métrico entre conjuntos Φ-probabilísticos, esto es, conjuntos Φ-borrosos A, tales que $\underline{A}$ y $\overline{A}$ son funciones de probabilidad —*cfr.* §7.3.2.

En la sección 7.4, hemos considerado la **comparación de «figuras» planas** mediante la agregación de la distancia entre sus centroides y de la distancia entre sus fronteras, tanto si estas últimas son conexas —*cfr.* §7.4.4—, como si no lo son —*cfr.* §7.4.5.

8

Estudio ilustrativo: Administración con y para las personas

«Toda afirmación
sobre las organizaciones
es una afirmación
sobre la conducta humana.»
—James G. MARCH y Herbert A. SIMON [817] (p. 26),
via Charles PERROW [818] (p. 146)



«Trabajar es integrarse activamente en el proceso de desarrollo humano y con ello sentirse útil a los otros.»
—Karol WOJTYLA (JUAN PABLO II) [819] (p. 136)

Uno de los factores más influyentes en la buena marcha de las organizaciones es la elección de candidatos, sin duda, una actividad muy política, dado que todo el proceso de elección, la propia elección y el resultado de la misma pueden mudarse en armas arrojadizas dentro de las luchas internas por el poder. Una buena elección es sumamente importante, y aunque peque de perogrullada, es así, y hay que decirlo. Las investigaciones muestran, que, en media, incluso los reclutadores más experimentados eligen con acierto a los candidatos sólo en un 50 *por ciento. Los programas informáticos y el reclutamiento electrónico pueden contribuir a conseguir mejores resultados. En este sentido, este capítulo penetra en los entresijos de las organizaciones, en el mundo de la elección de candidatos, de la promoción interna, de la valoración de tareas, de la evaluación del desempeño, de la polivalencia, destacando, en todo momento, la importancia de la comunicación abierta, interna y externa, en una administración que, cada vez más, es con personas y para las personas, donde las barreras de las estructuras jerárquicas o piramidales se derrumban, dando paso a la participación total, a la estructura de la organización en red, en múltiples direcciones: verticales descendentes (jerárquicas), verticales ascendentes (desde los subordinados), horizontales (entre compañeros) o diagonales (interdepartamentales).*

8.1 De administrar el capital humano a la administración con y para las personas

«Esto exige que las personas sean consideradas una cosa deseable: por tanto, el énfasis está en la frase "han de ser necesarias" en lugar de "todavía necesarias". La diferencia entre estos dos enfoques es importante y debe ser claramente entendida. El primero considera a las personas una necesidad; el segundo las considera una cosa complementaria de la tecnología.»
—P. T. KIDD [820] (p. 122)

En Economía, uno de los eminentes fue Adam SMITH (1723-1790) [185]. Su defensa de la libertad de obtención de beneficios por parte del empresario, y su afirmación de que tales acciones de los intereses propios económicos individuales, serían los salvadores de la sociedad, creadores de riqueza, y que por tanto, también apoyarían al bien común, es la falsilla sobre la que se ha escrito el desarrollo económico y la mayoría de las teorías económicas imperantes.

La profusión con que estas ideas —publicadas en su libro *Estudio de la naturaleza y causas de la riqueza de las naciones* de 1776—, han sido tantas veces recordadas por los defensores del capitalismo, hace que nos olvidemos de sus reflexiones sobre la naturaleza humana —publicadas en su libro *La teoría de los sentimientos morales*, en 1759, cuando era catedrático de Filosofía Moral en la Universidad de Glasgow—, que le llevaría a recomendar la definición de un sistema de justicia capaz de refrenar los excesos del interés propio, en pos de una sociedad «amable». En particular, un enorme **NO al monopolio** y otro **NO a la explotación**, en cualquiera de sus formas, se traslucen a partir de esta idea de SMITH.

Una de las grandes contribuciones de Adam SMITH a la teoría económica, fue el análisis de la **división del trabajo**, de manera que se consigue aumentar la producción mediante la *cooperación de las personas* implicadas en la realización de una tarea, concentrándose cada una de ellas en una *subtarea*, esto es, en una parte pequeña de la misma.

A la división del trabajo, han de añadirse, como cimientos sobre los que se ha construido la economía moderna imperante, el desarrollo de **estructuras eficaces de planteamiento** y la toma de **decisiones colectivas**.

En cualquier caso, los trabajadores son personas, y ello exige una gestión impecable. La importancia de una buena Gestión de Recursos Humanos es enorme. Según un estudio de la consultora `Watson Wyatt`, en el que han colaborado 200 empresas europeas —12 de ellas españolas—, una gestión eficaz de personal puede incrementar sumamente el valor de mercado de la compañía —*cfr.* CASAMAYOR [821]—. `Watson Wyatt` ha creado el «Índice de Capital Humano» (*Human Capital Index*, HCI), para mostrar la relación entre la efectividad del factor humano y la creación de valor para el accionista. Aunque no se obtiene como conclusión una relación causa-efecto, sí se concluye su correlación. La gestión eficaz de personal incide en un $7,1$ por ciento en la creación de valor, destacando, con un $2,4$ por ciento el conocimiento aportado (*knowledge workers*), con un $1,5$ por ciento, el acierto en la elección de los mismos, y con un $0,7$ por ciento, la ubicación ideal de los empleados.

Cada vez son más las voces que se alzan en favor de una consideración superior a los trabajadores o empleados, y no como meros instrumentos de producción. Allan GILMOUR, vicepresidente ejecutivo de la `Ford Motor Co.`, afirma que «el recurso clave que tienen la mayoría de las empresas es el cerebro, la energía y la ambición [...] de su gente» —*cfr.* EKINS, HILLMAN y HUTCHISON [180] (p. 54)—. Richard JOLLY [822], director adjunto de UNICEF, sentencia: «el capital humano es un factor más importante para conseguir el crecimiento económico que el capital físico.» Charles HANDY [823], catedrático de la *London Business School*, señala que «las empresas advierten con inquietud que las personas son unos activos capaces de tomar la puerta y marcharse. Ésa sí que es una buena razón para dar muestras de interés verdadero por nuestros empleados.»

Pero, incluso en los países desarrollados, todavía están activos multitud de rescoldos de la industrialización feroz e implacable, para la que las personas, no son personas, sino materias primas de usar y tirar. El uso de expresiones como «recursos humanos» o «capital humano» puede contribuir a fomentar este trato, debido a la connotación de infravaloración que conlleva.

Algunos autores apuntan hacia un **cambio en la terminología**. Por ejemplo, para FILELLA [824] (p. 72), sería mucho más propio decir «personas con recursos» que «recursos humanos», o en todo caso, pudiérase hablar genéricamente del «factor humano» —*cfr.* FILELLA [824] (p. 51).

Como dice LOZANO [137] (p. 266), las personas no son un recurso más, y mucho menos un capital; son algo central en el desarrollo de la organización. Las organizaciones deben reconocer el valor de las personas y a las personas como valor —*cfr.* LOZANO [137] (p. 257).

> *«Puede ser éticamente poco correcto hablar de recursos humanos, porque así se homogeneizan las personas con las cosas, y se habla de las mujeres y los hombres como de una cosa que se tiene. Tampoco me parece muy airoso decir: "El mejor capital (que tenemos) son nuestros hombres", sencillamente porque los hombres no son capital de ninguna clase. Los hombres y las mujeres son personas, y persona es aquello que no se puede tener. Son las personas las que tienen a la empresa, no la empresa la que tiene a las personas.»*
> —A. LLANO [825] (p. 7)

Otros autores razonan su uso, por ejemplo, comenta ARGANDOÑA [826] que «si el trabajador "vende" sus "servicios" laborales en el "mercado", es porque dispone de un "capital" del que se derivan esos servicios: su fuerza de trabajo, su vigor, sus conocimientos, capacidades (manuales e intelectuales) y sus actitudes. [...] Ha hecho, pues, una "inversión" en "capital humano" —*cfr.* BECKER [827]—, y espera que alguien la valore en el

mercado de trabajo».

Por nuestra parte, estamos de acuerdo con EKINS, HILLMAN y HUTCHISON [180] (p. 54), en que lo realmente importante es el hecho de que denominar «capital humano» al papel de las personas en la producción, aporta una perspectiva más rica y más útil, que hace hincapié en la importancia creciente de las personas para la producción.

Pero, además, para la **Economía Verde**, la cuestión del capital humano está ligada inseparablemente a la moralidad, justicia y realización humana, además de a la productividad, a diferencia de lo que representa para la economía convencional: «capacidad productora de los seres humanos, como agentes productores de renta en la economía» (Diccionario de Economía *Palgrave*).

El apelativo de *talento humano*, aparece en la traducción del título del reciente libro Idalberto CHIAVENATO [828] (aunque el título original es «Gestão de pessoas. O novo papel dos recursos humanos nas organizações»). No obstante en el prefacio, Idalberto se refiere a ello, aunque concluye que la tendencia actual va más allá, hacia la **administración con las personas**: «conducir la organización junto con los colaboradores y socios internos que más entienden de ella y de su futuro».

Finalmente, comentar que el papel de la teoría de conjuntos borrosos en Economía ha tardado en ser reconocido, comparativamente con otras áreas —*cfr.* KLIR y YUAN [46]—. Es en la década de los 80 cuando unos pocos economistas, la mayoría franceses, trabajan con conjuntos borrosos en el campo económico. Puede consultarse el trabajo de estos economistas en un monográfico de *Fuzzy Sets and Systems* [829] dedicado a Claude PONSARD (1927-1990), quizás el más importante de ellos. Como ejemplo, su artículo *Fuzzy mathematical models in economics* [830], de 1988, en el que demuestra la significativa contribución de la teoría de conjuntos borrosos a los fundamentos del análisis económico.

En los últimos años, los profesores Jaime GIL ALUJA y Arnold KAUFMANN han contribuido sobremanera a la modelización de muchísimos problemas inherentes a la Administración con Personas, desde el punto de vista de la teoría de los conjuntos borrosos [831, 832]. Reciban desde aquí nuestro reconocimiento y agradecimiento.

8.2 La comunidad de los iguales



«Al fin el Dodo sentenció: "¡Todos hemos ganado y todos recibiremos sendos premios!"»
—Lewis CARROLL [833] (cap. 3, p. 58)

Otrosí, para que se produzcan los máximos beneficios en capital humano, se debe partir de la situación de igualdad de todo ser humano.

Pero la meta de los seres humanos parece ser obtener el máximo beneficio personal, sin pensar en el bienestar colectivo de la sociedad, confiando en esa «mano oculta» que se adivinaba en los argumentos de Adam SMITH, impulsora del bien común a partir del bien individual. Se rigen por **el principio del máximo egoísta**. Lo gemelar se evita anhelosamente[1].

Y es que nuestra educación, pasada y actual, nos lleva a ello. Colaborar, comunicar ideas, discutirlas hasta llegar a un consenso, no se contempla habitualmente en los planes de estudio. Al contrario: «no habléis», «no pasaros ningún mensaje», «no ayudéis al compañero», etc. Interesa, por lo general, la evaluación del rendimiento individual. Y esto no debería ser así. Los estudiantes deberían trabajar en equipo, deberían aprender a explicarse con claridad, a alentar y criticar, a negociar, en definitiva, a ser jugadores cooperativos en el juego de la vida.

El juego de la vida es un juego en equipo, no hay que menospreciar la iniciativa propia, pero hay que promover valores de cooperación, respeto, tolerancia y apertura respecto a la diversidad de opiniones y opciones. En el

[1] Decía Baruch SPINOZA: «¿Qué ocurriría si un hombre no corriera el peligro presente de morir por traidor? [...] Si la razón pudiera recomendar esto, lo recomendaría a todos los hombres.»

juego de la vida sólo hay un equipo, el de todos los seres vivos.

Sin embargo, queda mucho tiempo para que todos los seres humanos formen parte realmente de una comunidad en la que todos sean iguales. La historia de la igualdad entre los diferentes colectivos de seres humanos es la historia de la discriminación entre ellos, en todo caso, siempre injustificada.

Esta historia es la historia de la esclavitud, de las discriminaciones *por motivos racistas, antisemitas u otra clase de discriminación referente a la ideología, religión o creencias, la etnia, raza, o nación a la que pertenezca, su sexo u orientación sexual, o la enfermedad o minusvalía que padezca* (Código Penal Español, art. 22.4). Es la historia de la marginación, de la intolerancia y de la xenofobia. Y es una historia reciente. Es la historia del aborrecible apartheid sudafricano y del execrable holocausto nazi.

8.2.1 El estatus asignado a los blancos

> «La diversidad en la familia humana debería ser la causa de amor y armonía, como es en la música cuando se toca diferentes notas al mismo tiempo, logrando un acorde perfecto.»
> —Abdu'l-Bahá

Los miembros de la población negra eran considerados «animales», en el sentido más despectivo del término, incapaces de tener sentimientos, ni conciencia, ni raciocinio, y ha sido un proceso muy lento el que ha permitido su integración en la comunidad de los iguales. «Es una simple realidad que haber nacido blanco es un honor y un privilegio», dicen en su página de inicio los detestables encapuchados blancos. De hecho, y sin necesidad, por motivos obvios, de nombrar ninguna más en especial, se pueden encontrar diversas páginas *web* en Internet donde se sigue ensalzando la superioridad de la persona blanca a la vez que se compara a la persona negra con los monos. Otro de estos malos ejemplos es aportado por el trato recibido por las comunidades indígenas, a las que se les ha expropiado de sus dominios y se les ha confinado en «reservas». Evidentemente no es un trato de igualdad.

8.2.2 Personas con necesidades diferentes

> *«La selectividad fue otro problema, porque no era posible legalmente realizar dicha prueba fuera del recinto universitario, ya que no hay convenio entre los ministerios de Sanidad y Educación, pero sí entre los ministerios de Educación y Justicia. Esto quiere decir que los reclusos de la cárcel pueden hacer la selectividad y también los estudios universitarios sin necesidad de ir al lugar del examen correspondiente, pero no así los pacientes hospitalizados. Ello es bastante injusto; ya sería hora de solucionar este vacío legal.*
> *Conseguí que me hicieran las pruebas de acceso a la universidad en la clínica, las aprobé con una nota media de 6,7, y empecé a estudiar en la UNED. Estoy muy agradecido de poder estudiar en la UNED, que me da la oportunidad de examinarme en la clínica, ya que ellos están dispuestos a hacerlo (pero no porque estén obligados por ninguna ley educativa). [...] En mis actuales condiciones físicas no me es posible examinarme presencialmente en la universidad.»*
> —Daniel Vilaseca [834] (p. 200); *afectado de distrofia muscular de Duchenne, 29 años, licenciado en Derecho y estudiante de Geografía e Historia (1998)*

Pero con el reconocimiento de la igualdad para los seres humanos, sin importar el color de la piel, no acaba la desigualdad entre los seres humanos. Hasta hace apenas 30 años existían seres humanos cuya igualdad con el resto no era reconocida por ninguna ley, aquéllos que sufrían una discapacidad intelectual[2], aquéllos que seguían siendo niños.

No es hasta 1971 [835], cuando se aprueba una primera declaración de la ONU, que se refuerza y complementa con una segunda declaración en 1975 [836]; declaraciones por las que se considera, al fin, a estas personas iguales al resto de seres humanos (aunque sus derechos deban ser salvaguardados por guardianes humanos no discapacitados intelectualmente). La historia concreta es la siguiente:

- 20 de diciembre de 1971 (XXVI Sesión de la Asamblea General de la ONU), la Organización de las Naciones Unidas aprueba la Resolución 2856 "Declaración de los Derechos de las Personas con retraso mental" (*General Assembly Official Records Suppl.* 29 [A/8429], Naciones Unidas, New York, 1972).

[2] Actualmente parece que la denominación políticamente correcta es «seres humanos con necesidades (intelectuales) especiales», insistiéndose en hablar de la diversidad humana y de nuestras diferencias, lo que, si bien en algunos casos supone un trato diferenciado, éste siempre tendrá como meta el rompimiento de cualquier posible barrera, o sea, la igualdad de todos y para con todos.

- 9 de diciembre de 1975 (XXX Sesión de la Asamblea General de la ONU), la Organización de las Naciones Unidas aprueba la Resolución "Declaración sobre los Derechos de las Personas discapacitadas" (*General Assembly Official Records Suppl.* 34 [A/10034], Naciones Unidas, New York, 1976).
- 17 de junio de 1988 (D.O.C. 187, de 18-7-1988, pág. 236), el parlamento europeo reconoce el derecho de las personas sordas a utilizar la lengua de signos como lengua propia.
- 9 de diciembre de 1989, en el punto 26 de la Carta Comunitaria de los derechos fundamentales de los trabajadores, el parlamento europeo reconoce el derecho de las personas con minusvalías al beneficio de medidas adicionales concretas para favorecer su integración profesional y social.
- 29 de junio de 1992 (D.O.C. 248, de 2 -11-92, pág. 35), el parlamento europeo reconoce los derechos de las personas disminuidas mentalmente (*mentally handicapped people*).
- 14 de diciembre de 1995 (D.O.C. 17, de 22-1-1996, pág. 141), el parlamento europeo reconoce los derechos de las personas minusválidas (*disabled people*).

Nos vemos en la obligación de mencionar, a la vez que valorar muy positivamente, el esfuerzo de algunas Administraciones para conseguir una educación en igualdad para las niñas y los niños españoles, con necesidades especiales. En particular de la comunidad sorda. Quizás ello haya sido consecuencia de diversos trabajos —*cfr. v. gr.* Marchesi [837]; Marchesi, Alonso, Paniagua y Valmaseda [838]; Palacios, Marchesi y Coll [839]; Fernández Viader [840]—, incidentes en las posibilidades de la lengua de signos para el desarrollo cognitivo y lingüístico de los niños sordos. Por ejemplo, en el ya aprobado Proyecto de Ley de Solidaridad en la Educación de la Presidencia del Parlamento de Andalucía del 17 de febrero de 1999 encontramos un claro ejemplo de la atención que desde las administraciones se está despertando por la inclusión de la Lengua de Signos en el entorno educativo de los niños y niñas sordos/as: Artículo 11, punto 1: «La Administración educativa favorecerá el estudio y la utilización de la lengua de signos en los centros docentes que escolaricen alumnado con necesidades educativas especiales asociadas a una discapacidad auditiva en grado severo o profundo.»

8.2.3 El menosprecio a la mujer

«51. Ya tomarás con presteza el huzo, la tablilla para tejer y el agua, el metate y el molcajete, el canasto; no sólo te andes cargando de cosas, no se llenen de ellas tus manos. Y cuando contraigas matrimonio con quien es águila, ocelote, no ante él, encima de él andes. Cuando algo te pregunte, te encomiende, te avise, luego bien lo obedecerás, oirás con alegría su palabra; no luego la tomarás con enojo, no luego te molestarás, no serás respondona, no contra él te vuelvas. Si algo así te molesta tampoco allí se lo recordarás, no así lo despreciarás, no te harás la voluntariosa, aunque sea una persona humilde.»
—Anónimo [127] (p. 83)

Igual que mencionábamos la existencia de páginas *web* contra los seres humanos que no son blancos, existen otras contra las personas con escasos recursos económicos, contra los pueblos indígenas, contra la mujer, etc.

Tantas tribus han sido desposeídas, esclavizadas y exterminadas, que se pierde la cuenta. Los indios de América del Norte, deportados, confinados en «reservas»; los aborígenes australianos, cazados por los británicos; la población india brasileña, diezmada. Dos ejemplos de supervivencia indígena son los dayaks de Sarawak y los yanomami de Brasil.

«1. En grave empeño me pongo. No es ya solo un vulgo ignorante con quien entro en la contienda: defender a todas las mujeres, viene a ser los mismo que ofender a casi todos los hombres: pues raro hay que no se interese en la precedencia de su sexo con desestimación de el otro. A tanto se ha extendido la opinión común en vilipendio de las mujeres, que apenas admite en ellas cosa buena. En lo moral las llena de defectos, y en lo físico de imperfecciones. Pero donde más fuerza hace, es en la limitación de sus entendimientos. Por esta razón, después de defenderlas con alguna brevedad sobre otros capítulos, discurriré más largamente sobre su aptitud para todo género [326] de ciencias, y conocimientos sublimes.
40. Sin embargo, la práctica común de las Naciones es [340] más conforme a la razón, como correspondiente al divino Decreto, notificado a nuestra primera madre en el Paraíso, donde a ella, y a todas sus hijas en su nombre se les intimó la sujeción a los hombres. Solo (sic) se debe corregir la impaciencia con que muchas veces llevan los Pueblos el gobierno mujeril, cuando según las leyes se les debe obedecer; y aquella propasada estimación de nuestro sexo, que tal vez ha preferido para el régimen un niño incapaz a una mujer hecha; en que excedieron tan ridículamente los antiguos Persas, que en ocasión de quedar la viuda de uno de sus Reyes en cinta (sic), siendo avisados de sus Magos que la concepción era varonil, le coronaron a la Reina

el vientre, y proclamaron por Rey suyo el feto, dándole el nombre de Sapor antes de haber nacido.»
—Benito Jerónimo FEIJOO Y MONTENEGRO [841]

Pero es innecesario tal remonte en el tiempo. Las mujeres siguen marginadas en muchos lugares del planeta. No hace tanto, por ejemplo, que se aprobó en Alemania su posibilidad de nombramiento para cargos públicos. Otro ejemplo: en España, no es hasta 1966, cuando se permite a la mujer ser jueza. La primera mujer juez, Concepción Carmen VENERO, fue nombrada en 1971 juez del Tribunal de Menores, cargo, según el Diario de Madrid de entonces, que «entra de lleno en las características, cualidades y aptitudes con que la feminidad ha sido milenariamente adornada» —*cfr.* IGLESIAS DE USSEL y RUÍZ RICO [842] (Cap. VIII, p. 160)—. Claro que en estas afirmaciones ya notamos el «progreso» hacia la igualdad, pues no hay más que remontarse a 1568, año en el que se publica en Sevilla, *La filosofía vulgar* de Juan de MAL LARA, en el que aparecen mil refranes recopilados por su maestro en Salamanca, el comendador Hernán NÚÑEZ. Un ejemplo: «El asno y la mujer a palos se han de vencer» (196r; IV, 22) —*via* PINTOS [843] (p. 80). La teoría psicoanalista de Erik ERIKSON afirma que en la mujer, la identidad se forma y expresa en «la búsqueda selectiva de un tipo de hombre por el que ella desearía ser solicitada». O sea, que la mujer carece de identidad. Pero esta idea también es de FREUD. Éste define la líbido (que según él, es el origen de toda posible conducta humana) como propiamente masculina, pues caracterizó a la mujer por carecer de líbido: «la niña se percibe a sí misma carente de algo, como castrada, de ahí su sentimiento de inferioridad, de ahí su mayor tendencia al masoquismo. [...] El masoquismo es precisamente la aceptación y el disfrute del dolor para complacer a otros. Es la pérdida de la libertad, de la creatividad a cambio de que otros decidan, soporten y confieran una identidad alienada al masoquista.» —*cfr.* FERNÁNDEZ VILLANUEVA [844] (p. 83)—. Todo ello, según FREUD, justifica la situación de la mujer, ya que es su situación natural, debida a su naturaleza *per se*.

La **desigualdad en el trabajo** entre hombres y mujeres, tanto en el **acceso** como en su **desempeño**, es más que patente, y eso ocurre en todos los países. El futuro del trabajo pasa por considerar la perspectiva de las mujeres —*cfr.* Arantxa RODRÍGUEZ, Begoña GOÑI y Gurutze MAGUREGI [845] (*passim*).

«En definitiva, la posición de la mujer en el empleo, no es en absoluto tan elevada como correspondería a su peso en la población activa y a su papel en el crecimiento de la misma.»
—Arantxa RODRÍGUEZ, Begoña GOÑI y Gurutze MAGUREGI [845] (p. 70)

Aunque creamos a Jean ONIMUS —*cfr.* §8.19.1— y a tantos otros, cuando afirman que en el futuro no habrá que trabajar, o al menos muy poco, al haber conseguido que todas las tareas rutinarias sean realizadas por máquinas. Aún así, llegar a ello pasa por la igualdad efectiva de la mujer al hombre[3].

La riqueza básica que generan las familias en las sociedades, suele producirse, con demasiada frecuencia, en condiciones que Marilyn WARING [846] (pp. 18-19) califica de **esclavitud**. La vital importancia de las funciones que realiza la mujer hace que la decadencia de la familia, observada en multitud de países, sea algo verdaderamente preocupante.

Pero «marginadas» es un término muy suave. En muchas sociedades, las reglas que rigen la familia son profundamente patriarcales, con prácticas como:

- **asesinato de neonatas**, debido a la pobreza de la «familia» donde tuvo la desgracia de nacer y a que al ser niña, en un futuro, su casamiento deberá ir acompañado de dote;
- **asesinatos por dote** (las muertes «accidentales» de esposas que no pagaron la dote que prometieron);
- **asesinato mediante lapidación**, por haber mantenido relaciones sexuales fuera del matrimonio (aunque ella esté soltera);
- **asesinato por «adúltera»** —el «famoso» decreto de 1990 de Iraq, por el que «ningún iraquí que mate [...] a su propia madre, hija, hermana, tía, sobrina o prima por adúltera será perseguido por la justicia»;
- **sentencias de ejecución de violación múltiple**, por adulterio cometido por algún familiar varón;

[3] En general, por lo que conozco de la empresa privada, a igualdad de competencias de especialización entre una mujer y un hombre, las empresas se predisponen hacia la mujer. Reconocen que pueden lograr un esfuerzo mayor, una capacidad de trabajar en equipo, también mayor, pero, en general, se valora a *la* mujer pero no a *una* mujer. Se reconoce el sexo, pero no el sujeto. Es como si te dijesen: si esta mujer fuese un hombre, contratada sin pensarlo. La empresa sigue pensando en el papel de «ama de casa» que la mujer debe asumir, cuando regrese a su hogar. Desde los oteros, la «conciliación de la vida laboral y familiar» —*work life balance*, es la expresión oída en EE.UU.— y la «gestión de las diferencias» —*diversity management*— tratan de acomodar a mujeres y hombres en el trabajo.

- la ordenanza Hudood, en Pakistán, que declara a **las mujeres violadas, culpables de fornicación**, condenándolas a ser flageladas y encarceladas;
- **sumisión sexual forzosa**;
- **circuncisión femenina**;
- **matrimonios contratados por los padres**, incluso desde antes de nacer;
- **prohibición de enamorarse** sin permiso de los padres o de la tribu.

A todo ello hay que unir su **discriminación** y su **explotación**.

Parece que se olvida que la mujer es una «pieza» imprescindible sin la cual no existiríamos.



Todo el mundo tiene una madre, aunque algunos lo han olvidado.

Todo el mundo tiene una madre. No hay úteros artificiales. Sin las mujeres no hay niños. Sin las mujeres no existe el futuro. Porque sin niños no hay futuro. Quizás en el futuro proliferen los úteros artificiales —y yo que me alegraré, porque bastante sufren las mujeres en el parto, además de los peligros que conlleva—. Pero actualmente no es así.

8.2.4 Los responsables somos nosotros

Y toda esta historia, no se nos olvide, es nuestra historia.

Permítasenos recordar el «imperativo categórico» de Immanuel KANT: uno debe actuar sólo de acuerdo con principios de los que se pueda desear que lleguen a ser leyes universales. Es decir, aplicables a uno mismo. Conclusión: no desees para el otro, lo que no quieras para ti.

Pero falta mucho para que esté completo el marco institucional mundial necesario para una sociedad mundial justa. Paul STREETEN, economista experto en desarrollo, destaca las siguientes innovaciones institucionales [847]:

- un banco internacional, encargado de coordinar los mercados financieros y la liquidez internacional;
- un servicio de deuda nacional, para resolver la crisis de deuda del Tercer Mundo;
- un cuerpo coordinador de las inversiones a gran escala duraderas;
- un fondo internacional de inversiones, encargado de canalizar los excedentes de los países ricos hacia los países pobres, de manera que sea beneficioso para ambas partes;
- un foro de la energía, con la participación de productores y consumidores, a la búsqueda de una estructura estable de precios;
- un organismo de protección mundial del medio ambiente;
- un sistema de estabilización de los precios de los bienes;
- una entidad mundial que limite los monopolios y las prácticas restrictivas;
- un impuesto internacional sobre la renta o sobre el consumo, para su redistribución hacia los países pobres;
- un organismo internacional e independiente que garantice la eficacia de esta ayuda;
- un sistema de derecho internacional más desarrollado y más vinculante.

Claro que por pensar, en realidad, de lo que se trataría, es de que al igual que somos tolerantes olvidando bastante de nuestra individualidad para vivir en sociedad, también lo seamos con las demás especies, y, rechazando de una vez por todas nuestra vil arrogancia, sin sentido ni fundamento alguno, consigamos la gran meta de vivir en sociedad con el resto de los seres vivos.

Pero seamos realistas: pretender ampliar esta comunidad a los grandes primates, como defienden en su libro, Paola Cavalieri y Peter Singer [51] —*cfr.* Apéndice C: «*La comunidad moral de los iguales*»—, es un objetivo a largo plazo, a muy largo plazo; y pretender ampliarla a otros seres vivos, es, sencillamente, una utopía.

Pero la justicia, como la estabilidad y el equilibrio, sólo es una cuestión de tiempo.



El egoísmo forma parte de nuestra visión actual del mundo. Muy pocos desprendidos lo son del todo. Forma parte de nuestro ser, del misterio de los misterios[4], de nuestra evolución como individuos y como sociedad.

Como decía el escritor francés Jean René Houguenin, «la vida es trágica, no porque debamos morir, sino porque hay momentos en los que no amamos.»

Es nuestro deber oponernos al proceso de desarrollo viciado. Seamos egoístas. Los efectos de la discriminación, explotación y opresión de las mujeres, repercuten en los niños, el capital humano futuro. Ya que todavía son las madres las que tienden a responsabilizarse mucho más que los padres de su educación y desarrollo, sobre todo en los primeros años, la edad de la impronta, nuestro egoísmo debería conducirnos a la lucha por la igualdad.

> *«El objetivo es más bien la "equidad", noción mucho más vaga [que la de igualdad], difícil, si no imposible, de definir con precisión. "Partes equitativas para todos" es el lema moderno que ha reemplazado al de Karl Marx, "de cada uno según sus posibilidades, a cada uno según sus necesidades".*
> *Este concepto de igualdad [de resultados] difiere radicalmente de los otros dos [igualdad ante Dios e igualdad de oportunidades]. Las medidas estatales que apoyan la igualdad personal o la de oportunidades aumentan la libertad; las medidas estatales que pretenden lograr "partes equitativas para todos" reducen la libertad. Si las personas han de estar determinadas por la "equidad", ¿a quién toca decidir qué es lo "equitativo"? [...] Los que toman e imponen tales decisiones, ¿son iguales a aquellos para quienes deciden? ¿No estaremos en el caso de ‹Rebelión en la granja›, de George Orwell, donde "todos los animales son iguales, pero algunos animales son más iguales que otros"?»*
> —Milton Friedman y Rose Friedman [848] (p. 193)

8.3 La administración con y para las personas

> *«Rodolfo Marqués, director de Recursos Humanos en el pomposo organigrama del Elitebanc, bostezaba ante una pila de expedientes alineados sobre la mesa. Ni siquiera los había abierto. Reclinado perezosamente en su sillón anatómico, no tenía la menor gana de ponerse a la tarea. Estaba bloqueado por la lenta digestión de una comida casera rica en grasas e hidratos de carbono (alubias con chorizo, chuleta de cerdo y de postre arroz con leche). Su cuello acabó cediendo al declinar de la cabeza, y Marqués se dejó vencer por el amodorramiento.»*
> —Julio García Castillo [849] (p. 33)

En el marco general de la Organización y Administración de Empresas —*cfr.* Bueno [850]; Cuervo [851]— se encuadra la llamada Gestión de Recursos Humanos —*cfr.* Chiavenato [852]; De Cenzo y Robbins [853]; Fernández [854]; Besseyre des Horts [855]; Beer, Spector, Lawrence, Mills y Walton [856]; Louart

[4] «*El misterio de los misterios ¿Es la evolución una construcción social?*», título de un maravilloso libro del filósofo e historiador Michael Ruse [7], que a su vez cita John F. W. Herschel, filósofo y astrónomo, en una carta a Charles Lyell, geólogo, fechada el 20 de febrero de 1836: «El misterio de los misterios, que unas especies reemplacen a otras extinguidas.»

[857]; LATTMANN y GARCÍA [858]—, denominación fruto de un proceso de transformación: «jefe de personal», «administración de personal», «dirección de las relaciones sociales o industriales», «dirección de las relaciones humanas», «dirección de los asuntos sociales», «dirección del desarrollo social», «dirección de los recursos humanos», etc., claramente influenciados por la sociedad, impulsora de los diversos cambios en la cultura y estrategias empresariales —*cfr.* TROUVÉ [859]; BESSEYRE DES HORTS [860]; WEISS [861].

Según Luis PUCHOL [129] (pp. 65-66), la expresión «Personal» suena menos actual que «Recursos Humanos», apareciendo la Dirección de Personal como «*algo administrativo, microorganizacional, estático y transaccional. [..] los ciclos de su actividad son a corto plazo y su orientación es de carácter táctico*», mientras que la Dirección de Recursos Humanos «*se caracteriza como una función eminentemente directiva, macroorganizacional, dinámica y en constante transformación. [..] sus ciclos de actividad son a largo plazo y su orientación es de carácter estratégico*».

Luis PUCHOL [129] (p. 66), propone utilizar para el conjunto de todas las actividades relacionadas con Recursos Humanos el término *Dirección y Gestión de Recursos Humanos* (DGRH), englobando la misma a tres subdirecciones, la *Administración de Personal*, la de *Relaciones Laborales* y la de *Gestión de Recursos Humanos*:

Dirección y Gestión de Recursos Humanos

- **Administración de Personal**: Aspectos burocráticos, Altas y Bajas, Seguridad Social; Nóminas; Disciplina laboral; Control de absentismo, ...
- **Relaciones Laborales**: Tratamiento del conflicto individual y colectivo. Relaciones con Sindicatos. Contenciosos laborales.
- **Gestión de Recursos Humanos**: Función de empleo: Selección, promoción interna; procesos sustractivos. F+D. Formación. Desarrollo. Planes de carreras. Compensación. Evaluación del Desempeño. Clima y motivación. Servicios Sociales ...

La DGRH debe descubrir los talentos ocultos, aquellas capacidades y recursos que las personas poseen pero que no manifiestan, sea porque el ritmo de trabajo no permite la reflexión y el autoanálisis, sea porque la monotonía, apatía y aburrimiento no mueven a ello, sea porque son casi meros autómatas a las órdenes de la organización, etc.

Por desgracia, es frecuente que los gerentes se valoren a sí mismos en la medida en que tienen (o creen tener) las organizaciones bajo su control y consideran que dedicar tiempo a la reflexión es una incomodidad o una pérdida de tiempo —*cfr.* GARRAT [862]—. «La mayoría de los *managers* considera la indagación colectiva como una amenaza inherente. [...] La consecuencia es lo que ARGYRIS [863, 864] denomina **incompetencia calificada**: equipos llenos de gente increiblemente apta para cerrarse al aprendizaje» —*cfr.* SENGE [865] (p. 37).

8.3.1 En red

> *«Lejos del sabio renacentista aislado en su taller, con el transcurrir de los años el enfoque pluridisciplinar de la investigación ha encontrado su reflejo lógico en la multiplicación de redes organizativas al margen de cualquier organigrama y, a menudo, encubiertas por ellos, de colevtivos apasionados en el desarrollo de un proyecto común.»*
> —Eduard PUNSET [866]

Para el desarrollo de la organización «es necesario contribuir al desarrollo profesional de los trabajadores, tanto en el plano individual como colectivo» —*cfr.* BELET [867].

Este nuevo enfoque de la estructura y proceso empresariales ya recibe un nombre: **en red**. Aunque no es más que una aplicación espléndida de la Teoría de Sistemas. Se persigue «una transformación doble: del trabajo con elementos individuales al trabajo con sistemas y del trabajo en cadena lineal al trabajo como parte de una red» —*cfr. Informe Fast* [868] (p. 12)—, en la que «cada uno aprenda de los demás, horizontalmente, donde cada cual represente un recurso para las otras personas y reciba apoyo y ayuda procedente de múltiples direcciones diferentes» —*cfr.* NAISBITT y ABURDENE [869] (*cfr.* Fig. 8.1).

Se defiende pues el rompimiento de la estructura jerárquica, pseudojerárquica, piramidal, trapezoidal, burocrática (Max WEBER), tradicional, en favor de la participación total. [...] concebir a la empresa como un sistema, como una estructura celular, como una red. Una red celular, con múltiples vías de comunicación, debe

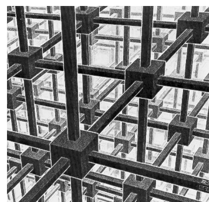


Figura 8.1: *Aunque la primera impresión sea de una estructura en red, no lo es. Como nosotros la entendemos, en la red, todo nodo está conectado con todo nodo. No se satisface pues, la «segunda parte» de la definición de* NAISBITT *y* ABURDENE *[869]: [...] donde cada cual represente un recurso para las otras personas y reciba apoyo y ayuda procedente de múltiples direcciones diferentes.» El dibujo es de Maurits Cornelis* ESCHER.
— *Fuente:* Bruno ERNST [870].

sustituir a la pirámide taylorista, centralizada.» —*cfr.* VÁSQUEZ BRONFMAN [871]. No debe olvidarse que los recursos humanos de una empresa son un *«stakeholder»*[5] fundamental de la misma.

> *«Este paso de la jerarquía a las redes es relevante porque asumirlo comporta tener que pensar nuevas necesidades y exigencias, que son constitutivas de las organizaciones y que ya no se pueden abordar con las herramientas conceptuales convencionales: compartir objetivos, experiencias, trabajo, toma de decisiones, tiempo, prioridades, responsabilidad y reconocimiento (Rockart y Short, 1991) [875]; cooperación organizativa (incluyendo la cooperación entre empresas competidoras), protagonismo de los actores (Solé y Bramanti, 1991) [876]; creación de una comunidad de personas que trabajan de manera cooperativa y descentralizada con conciencia de interdependencia y de compartir finalidades (García-Ramos, 1990) [877]; reducción de la autoridad a partir de la información compartida (Quinn, 1992) [878]; perspectiva más horizontal e igualitaria que vertical, dado que adquieren más importancia la competencia y la personalidad (Toffler, 1990) [879]; centralidad del individuo a partir de la centralidad de la comunicación (Naisbitt, 1983) [880].»*
> —Josep María LOZANO [137] (p. 261)

Un ejemplo menos reciente, pero del mismo sabor, es la **teoría de la gestión participativa** (*participative management*) de Rensis LIKERT [881, 882]: la percepción de una mayor libertad hará que los empleados cambien su manera de pensar en relación a cómo esperan ser tratados; tales expectativas se manifestarán en grados más altos de participación, iniciativa y autonomía.

> *«Todas las personas en la organización deben ser escuchadas y tener una autonomía suficiente dentro de su trabajo como para tomar decisiones que le atañen directamente, con las cuales pueden mejorar su propio trabajo y sentirse satisfechos.»*
> —Andrés SENLLE [110] (p. 36)

El *System 5* de LIKERT [883], propone sustituir la organización jerárquica por un sistema recíproco de influencia y participación, de manera que el mapa de la organización se pareciese más a una red que a una pirámide. Esta superposición de entre los miembros de varios grupos («*link pins*») facilitaría, ante la aparición de conflictos, la cooperación necesaria para alcanzar una solución consensuada. Propugnaba la desaparición de los tratamientos formales, por el mero hecho del cargo, en la organización y la utilización del término asociado en vez de empleado. Decía, que ello favorecería el surgimiento del liderazgo desde sentimientos de individualidad pero a través de un propósito compartido.

A propósito del miedo que sufren muchos directivos ante el hecho de compartir tomas de decisiones, ironiza Tomas J. PETERS [884]: «se trata de que ahora los trabajadores puedan decidir desplazar un armario un metro porque siempre ha estorbado».

[5] El término *stakeholder* apareció por vez primera en 1963 en un informe interno del *Stanford Research Institute* —*cfr.* WANG y DEWHIRST [872] (p. 115)—. Originariamente, *stakeholder* designaba a las personas o grupos de ellas que apuestan algo por la organización y su viabilidad, como una extensión del simple accionista (*stockholder* o *shareholder*). Posteriormente, el significado del término se ha ido expandiendo, siendo muy difícil su precisión —*cfr.* FREEMAN y REED [873]—. Aunque se han propuesto muchas definiciones —*cfr.* LOZANO [137] (pp. 115-140)—, quizás la ya tomada como clásica sea la de FREEMAN [874] (p. 54): un *stakeholder* en una organización es (por definición) cualquier grupo o individuo que puede afectar a la consecución de los objetivos de la organización o que puede ser afectado por dicha consecución.

García-Ramos [877] propone la siguiente comparativa entre las perspectivas tradicional (burocrática) y la reciente (en red):

En cuanto a la Estructura:

- **Burocracia**: Tareas especializadas con dependencia mutua; toma de decisiones y control centralizados; pautas y políticas únicas; liderazgo único; énfasis en las entidades que activan las relaciones.
- **Red**: Los miembros son autónomos y funciona a la vez de manera completa e independiente; poder y responsabilidad compartidos; estimulan perspectivas diversas sobre objetivos y recursos; liderazgo con facetas múltiples; enfatiza las relaciones.

En cuanto a la Proceso:

- **Burocracia**: Relaciones precisas y cuantificables; partes internas y fronteras externas claras; defensa de las propias tareas especializadas; importancia superior de la organización social; vínculos mediante recompensas y castigos.
- **Red**: Relaciones abstractas y cualitativas; pocas divisiones internas y fronteras precisables; los miembros hacen diversos papeles de comunicación; importancia ecuánime tanto al individuo como al grupo; cohesión mediante valores compartidos.

Observe el lector que bajo esta perspectiva, habría que evaluar la red (o sea, hacer una auditoría de la estructura y proceso de la empresa).

8.3.2 Tecnología

> *«El tecnócrata es resultado de que un autócrata o burócrata se "modernice" o se sienta "científico" ("hagámoslo con calculadoras electrónicas"). El tecnócrata también puede ser alguien que abriga la esperanza de que rehuirá los problemas humanos escondiéndose detrás de procedimientos "científicos" impersonales.»*
> —Charles A. Dailey y Frederick C. Dyer [138] (p. 166)

Otro factor a tener en cuenta es el tecnológico. «El indudable papel que las nuevas tecnologías desempeñan en el desarrollo humano se subraya cuando éstas constituyen una herramienta que acrecienta la dignidad humana y cuando suponen un incremento en cotas de libertad y bienestar», afirma Juan Manuel Suárez del Toro [885], presidente de la Federación Internacional de Sociedades de la Cruz Roja y de la Media Luna Roja.

> *«"La innovación tecnológica, ¿es buena o mala?" A lo que se responde habitualmente: "Depende del uso que se haga de ésta". Una pregunta mal formulada sólo puede ser contestada con una mala respuesta.»*
> —Luis Nuño [886] (p. 6)

Parece obvio que «en el centro de toda organización se encuentra la tarea desempeñada y la tecnología utilizada para desempeñarla» —*cfr.* Hampton [887] (p. 119)—. La tecnología conforma los puestos de trabajo, predispone los patrones de conducta de los trabajadores, determina las habilidades y técnicas adecuadas requeridas para el desempeño de los diferentes puestos, generando diversos grados de satisfacción en el trabajo —*cfr.* Benavides [888] (p. 44-45)—, siendo la producción artesanal la que proporciona mayor satisfacción, la producción en masa, la que menos y la producción por proceso un nivel intermedio —según la tipología acuñada por Joan Woodward [889] (léase también a Hampton [887], p. 119)—. Joan Woodward [890] fue pionera en el estudio del impacto de la tecnología sobre la estructura organizativa de la empresa, convirtiendo a aquélla en una variable destacable en el diseño de la organización.

> *«Un ejemplo de todo esto se puede encontrar en la historia de la mecanización industrial durante el siglo XIX. Hacia 1885 se instalaron en la planta de fabricación de segadoras Cyrus McCormick de Chicago modernas máquinas neumáticas de forja, una innovación reciente y con su eficacia aún por probar, con unos costes estimados de 500.000 dólares. En la interpretación económica tradicional de tal suceso se esperaría que esta decisión hubiese modernizado la fábrica y logrado el tipo de eficacia que generalmente implica la mecanización. Pero el historiador Robert Ozanne ha mostrado por qué este desarrollo debe contemplarse en un contexto más amplio. Precisamente en ese momento, Cyrus McCormick II se hallaba envuelto en una lucha contra el sindicato nacional de forjadores. En realidad, él veía la utilización de esas nuevas máquinas como una forma de "arrancar de raíz los elementos subversivos entre sus trabajadores", es decir,*

*los trabajadores especializados que habían organizado el sindicato local de forjadores en Chicago (*OZANNE, *1967 [891]). La nuevas máquinas, manipuladas por trabajadores no especializados, realmente producían resultados de peor calidad a costes más altos que los primitivos procesos. Tras tres años de utilización, las máquinas fueron simplemente eliminadas, pero para entonces ya habían cumplido su misión: la destrucción del sindicato. De esta manera, la historia de estos desarrollos técnicos en la fábrica McCormick no pueden entenderse adecuadamente sin hacer referencia a los intentos de organización de los trabajadores, la política de represión de los movimientos sindicales en Chicago durante aquel periodo y los sucesos relacionados con el atentado con bomba en Haymarket Square. La historia de la tecnología y la historia de la política norteamericana se entrelazan firmemente en este caso.»*
—Langdon WINNER [892]

Mucho esfuerzo se ha dedicado desde entonces al estudio de la «intervención» de la tecnología en la organización. Por ejemplo, Charles PERROW [893] (p. 80) mantiene que «las organizaciones intencional o no intencionalmente buscan maximizar la congruencia entre su tecnología y la estructura». Pero no sólo es necesaria esta congruencia entre la tecnología y la estructura organizativa; el propio sistema tecnológico exige una coherencia interna entre todas sus tecnologías componentes. AÏT EL HADJ [894] (pp. 29-30) establece una taxonomía: tecnologías fundamentales (transformación de la materia, muy próximas a la ciencia, por ejemplo, la electrónica), tecnologías genéricas (subconjuntos homogéneos de las tecnologías fundamentales, por ejemplo, el tratamiento electrónico de la información), tecnologías de aplicación (proyección específica de las tecnologías genéricas, por ejemplo, informática, robótica, ofimática, etc.). Y las tecnologías componentes no permanecen estáticas, sino que están sujetas a un proceso de cambio y renovación, «de destrucción creadora de tecnologías anteriores, pero también de recuperación-regeneración» —*cfr.* AÏT EL HADJ [894] (pp. 111-112)— (ver Figura 8.2).

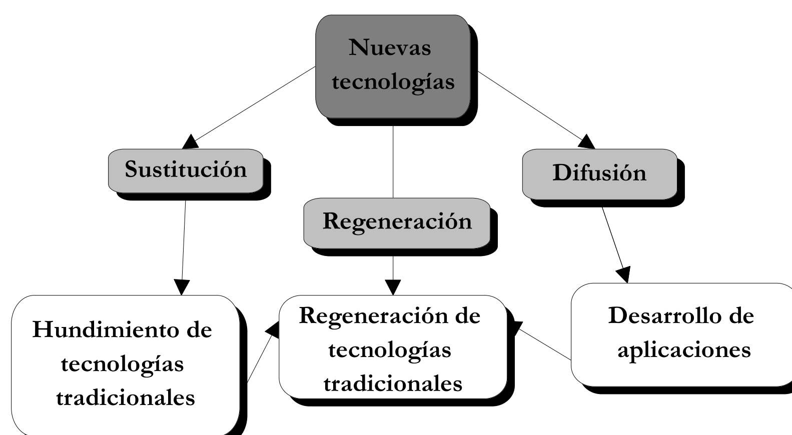


Figura 8.2: *Relaciones intertecnológicas.*
— *Fuente:* BENAVIDES VELASCO [888] (p. 63), a partir de AÏT EL HADJ [894] (p. 113)

Sin lugar a dudas, una muy buena fuente de conocimiento dentro de nuestra comunidad científica sobre las diferentes interrelaciones entre tecnología y organización, con multitud de referencias es la obra de Carlos BENAVIDES VELASCO [888]. También debería leerse a NAVAS LÓPEZ [895] y a VEGARA CARRIÓ [896].

«El experimento es la primera modificación de la naturaleza, y la máquina es el resultado, la cristalización de una serie de experimentos afortunados. El entusiasmo con que el hombre se lanzó a esta conquista, a esta posesión física de la naturaleza, ha hecho posible nuestra ciencia y nuestra técnica actual: hacemos por arte, por artificio, cosas tal como ellas se producirían por naturaleza. O como ha expresado con más exactitud Zubiri, "nuestra técnica produce artificialmente entes naturales", "lo que para un griego constituiría la más inadmisible paradoja".»
—Carlos FERNÁNDEZ CASADO [897] (p. 196)

8.4 La elección de candidatos

«El proceso de selección se reduce a las dos cuestiones siguientes: (A) ¿Sé qué es lo que estoy buscando?,

y (B) ¿Soy capaz de reconocerlo en cuanto lo veo?»
—John Munro Fraser [898]

«¿La mejor decisión posible para quién? [...] Pero la pregunta no es banal ni, mucho menos, irrelevante. Equivale a preguntarse si hay sólo una mejor decisión posible o varias decisiones mejores. Tantas "mejores decisiones" cuantos sean los grupos de interese a los que éstas van referidas, y que se dan cita objetivamente y con suficiente poder, en el interior real de la empresa.»
—Antonio Marzal [899] (p. 27)

Dentro de todo el campo abarcado por estos temas de administración con las personas, nos centramos en esta sección en el problema de la elección[6], tanto de aspirantes por parte de las organizaciones como de organizaciones por parte de los aspirantes, situaciones ambas frecuentes, debido a las constantes fluctuaciones del mercado laboral —*cfr.* Gil [900].

Por *elección de personal* (*selección*, dicen otros) entendemos el proceso que obtiene como resultado la elección del aspirante más apropiado para el trabajo más adecuado. Queremos decir: desde la perspectiva del aspirante, el trabajo es el más adecuado para él, y desde la perspectiva de la organización, el aspirante es el más apropiado para dicho trabajo. La elección es pues un proceso de decisión.

Una decisión que habrá de ser tomada por uno o varios **expertos**, y que obviamente se basa en la confianza depositada por la organización en ellos. Esta confianza se basa en el contenido de conocimiento y pericia que posee el experto. Pero esto, ¿cómo se mide? ¿Cómo de experto es un experto? Helmer [901] discute este problema. Churchman [81] dice que «sólo conocemos lo que una persona conoce observando la elección y conociendo el procedimiento de elección». Un problema añadido es que lo que una persona conoce puede ser sólo lo que cree —*cfr.* White [79] (p. 89)—, o aún peor, lo que cree conocer.

Cuando una organización se enfrenta al acometimiento de una tarea, debe hacer, como mínimo, tres análisis: un **análisis técnico**, un **análisis de la organización** y un **análisis de personal**. El primero, que en general se refiere a cosas, intentará proporcionar una respuesta a la pregunta: ¿es necesario llevar a cabo esa tarea? Mediante el segundo, se intenta determinar el departamento, la área, en definitiva, el lugar de la estructura de la organización más adecuado para realizar la acometida de la tarea, con todo lo que ello supone en materia de coordinación y comunicación. Una vez determinado si ha de realizarse la tarea, cómo y quiénes pueden realizarlo (simplemente por su posición en el organigrama de la organización), es hora de concretar este quién. Un análisis de los talentos humanos permite dar una respuesta concreta en referencia a un trabajador, candidato o grupo o equipo de personas, determinado: ¿Será fulano, o serán fulano, mengano y zutano, capaces de desempeñar adecuadamente la tarea en estudio? Un análisis puramente técnico referente al trabajo o a las cualificaciones de las personas, donde no se valore ninguna característica humana, está condenado al fracaso.

Hay que poner un precio a las cualidades que se desean —*cfr.* Dailey y Dyer [138] (p. 47).

«Supongamos que estas características se pueden comprar en cualquier cantidad, a diez centavos de dólar cada una. Tenemos 10 dólares para gastar. ¿Cómo las exigiremos? ¿Cuánto gastaremos en cada una de las características que estimemos importantes?
Una vez hecho esto, repasemos la lista que hayamos elaborado. Si decidimos gastar 2,50 dólares en "conocimientos técnicos" y 1,25 dólares en "habilidad administrativa", pensémoslo con detenimiento. Lo que estamos diciendo es que estimamos dos veces más importante el conocimiento técnico que la habilidad administrativa. ¿De veras lo creemos así? Posiblemente así es, pero una de las ventajas fundamentales de asociar valores es que se abre la oportunidad de estudiar sobre una base común, factores no relacionados entre sí. Esto puede conducir a mejorar las decisiones que se toman.»
—Joseph G. Mason [902]

Charles A. Dailey y Frederick C. Dyer [138] (pp. 48-56) recomiendan analizar, en todo análisis de personal, como mínimo, los cuatro factores siguientes: **inteligencia** (conocimiento de la organización, conocimientos técnicos ajenos a su especialidad, capacidad de aprendizaje, capacidad de síntesis, visión de lo que necesita un cliente, etc.), **energía, acometividad y persistencia** (consecución de las tareas, energía y empeño que demuestra en ello, ambiciones, etc.), **capacidad de persuasión y para las relaciones interpersonales** (si es calmado o nervioso, si es neutral o favorecedor, cómo les parece a los demás, etc.), y **personalidad, madurez emocional** (seguridad en sí, actitud ante la presión, estabilidad emocional, vida familiar y entorno de amistades, etc.).

[6] Recordemos al lector —ante su posible extrañeza, después de haber leído en tantas ocasiones en esta Tesis, elección, y haber leído en tantas otras, fuera de ella, selección, y pareciendo referirse a los mismos problemas—, que muchas veces —*cfr.* White [79]— se distingue entre **selección** y **elección** para acentuar la diferencia entre seres humanos y máquinas: los primeros pueden elegir y seleccionar, mientras que, actualmente, las máquinas sólo seleccionan —*cfr.* §1.3.

Claro que todo depende del empleador. Por ejemplo, los alfa entre los alfa que siempre busca Bill GATES, **los superinteligentes** (la expresión que él usa), se caracterizan por no ser marginalmente mejores que los simplemente buenos, sino que son mejores en todo un orden de magnitud medido con cualquier criterio que se desee utilizar: creatividad conceptual, velocidad (capacidad «relámpago», en «tiempo real», de asimilación de conocimiento nuevo), capacidad de generar preguntas agudas de modo inmediato, capacidad de percibir las conexiones existentes entre ámbitos dispares del conocimiento, ingenio de diseño o capacidad para solucionar problemas, o las más específicas como: poseer tal familiaridad con las estructuras de programación que un vistazo rápido sea suficiente para comprender una larga impresión de código, pensar obsesivamente en el código, incluso cuando conduce o come, poder de concentración intenso, poseer una memoria fotográfica del código. Según Bill GATES, «hay que favorecer la inteligencia sobre cualquier otra cosa, incluso sobre la experiencia» —*cfr.* STROSS [903] (cap. 2).

Este proceder de búsqueda de satisfacer cualidades, es válido igualmente para la **evaluación del desempeño** o rendimiento de un trabajador en su puesto de trabajo —*cfr.* BAZINET [904]; DUNNETTE [905]—. Seguramente, la prognosis del desempeño futuro, requiera de la valoración del desempeño pasado y presente. El comportamiento de los seres humanos suele ser repetitivo —ya se sabe, tropezar con la misma piedra, en el mismo sitio—, para nuestra homeostasis es fundamental la monotonía, la estabilidad de ciertos factores. No podríamos vivir si todo lo que nos influyera estuviese en perpetuo cambio.

8.5 Personas y puestos: unidades vagamente perfiladas en el sistema

> *«Su aspecto no podría imaginárselo nadie. A las mujeres, en general, de muy poco sirve intentar describirlas, y encima yo, para las descripciones no tengo talento. Pero algo hay que hacer; es necesario que el resto del mundo se entere de la existencia de este país.»*
> —Charlotte PERKINS GILMAN [906] (p. 29)

Analizaremos dos maneras de proceder: elección por comparación de perfiles y elección por valoración. No obstante, ambas suponen que las personas (la primera, además, los puestos) pueden ser identificadas con un perfil de atributos, propiedades o descriptores, y que además, la comisión de evaluación tiene la capacidad de poder y saber asignar una puntuación a cada uno de los descriptores, para cada una de las personas (y en el primer caso, también para cada uno de los puestos). La primera corresponde a comparar cada persona con el puesto, y la segunda, a comparar las personas entre sí.

La **elección por comparación de perfiles** se basa en comparar los requisitos del puesto con las características de las personas interesadas, con respecto a tales requisitos. Como hipótesis asumimos la existencia de un perfil psicoprofesiográfico **ideal** del puesto, generalmente definido mediante un conjunto de características, que son interpretadas como capacidades o cualidades y en definitiva exigencias, que los posibles candidatos o trabajadores deben satisfacer en mayor o menor grado, y que han sido proporcionadas por un proceso de análisis y descripción del puesto. El procedimiento consiste en asignar unos grados de satisfacción ideales, de manera que, por ejemplo, el problema de encontrar el mejor candidato para un trabajo puede resolverse mediante un **juicio por comparación** entre el perfil asignado al candidato (el **ejemplar**) y el perfil del puesto de trabajo ofertado (el *ideal*)[7].

En el caso de la **elección por valoración** no hay un psicoprofesiograma ideal para el puesto de trabajo; sólo hay factores que se evaluarán (positivamente) y se elegirá al candidato al que la comisión de expertos asigne una mayor puntuación.

Para ambas formas de proceder usaremos el modelo general de **solución de problemas** de SIMON[8] —*cfr.* SIMON [910, 911]—, cuyas etapas son básicamente:

1. *Fase inteligente*: comprender y diagnosticar el entorno de resolución del problema. En nuestro caso,

[7] En realidad, ambos perfiles son «ideales». El **perfil ideal de un candidato** puede determinarse como una agregación de la información aportada por diferentes perfiles: un perfil individual elaborado por el propio candidato (auto-evaluación), un perfil resultante de agregar o promediar las evaluaciones hechas por los colegas de trabajo del candidato, un perfil aportado por sus jefes, un perfil aportado por unos expertos (ajenos a la empresa), etc. El **perfil del puesto de trabajo ofertado** usualmente es aportado por una serie de expertos (antiguos trabajadores, etc.); es lo que se conoce como **proceso de análisis y descripción del cargo**.

[8] El **modelo de Simon** es un modelo genérico de resolución de problemas, que se aplica igualmente en otros muchos ámbitos. Por citar un ejemplo, en *Ingeniería de Sistemas* —*cfr.* ARBONES [907]; PRESSMAN [908]—, siendo frecuente la representación del proceso de decisión mediante *árboles de decisión* —*cfr.* BOEHM [909].

establecer objetivos (perfil psicoprofesiográfico del puesto o puestos de trabajos ofertados en el caso de elección por comparación de perfiles e identificación de factores a evaluar en el caso de un proceso de elección por valoración).

2. *Diseño*: entre estas actividades se encuentran la creación, diseño y modificación de soluciones alternativas. En definitiva, identificar las estrategias, que en el caso de la elección de personal, serían los candidatos.

3. *Fase de elección*: Elegir la estrategia óptima (el candidato óptimo para cada puesto ofertado).

Los grados de satisfacción que se asignan a las diferentes cualidades exigidas, pueden ser representados en lógicas multivaluadas —*cfr.* Tabla 8.1—, o con conjuntos de valores (casi-intervalos) —*cfr.* Tabla 8.2—. Estos grados permiten calificar diferentes frases evaluadoras —*cfr. v. gr.* Tabla 8.3.

Grado	Significado
A	«Se aplica la frase adecuadamente al desempeño de los empleados»
B	«Se aplica la frase muy bien al desempeño de los empleados»
C	«Se aplica la frase bien al desempeño de los empleados»
D	«Se aplica la frase razonablemente al desempeño de los empleados»
E	«Se aplica la frase inadecuadamente al desempeño de los empleados»

Tabla 8.1: *Significado de cinco grados de satisfacción que permitirán evaluar afirmaciones.*
—*Fuente:* CHIAVENATO [852].

Grado	Significado y Asignación de valores
A	«Excelente» $\equiv \{10\}$
B	«Por encima del promedio» $\equiv \{7, 8, 9\}$
C	«En el promedio» $\equiv \{4, 5, 6\}$
D	«Por debajo del promedio» $\equiv \{1, 2, 3\}$
E	«Nulo» $\equiv \{0\}$

Tabla 8.2: *Significado, con asignación de valores o conjuntos de valores numéricos, de cinco grados de satisfacción que permitirán evaluar afirmaciones.*
—*Fuente:* CHIAVENATO [852] (p. 332).

Frases representativas de las cualidades x_j	E	D	C	B	A
x_1 =«Tiene mucho interés en aprender»			✓		
x_2 =«Es celoso con el material bajo su cuidado»	✓				
x_3 =«Trabajo con mucha rapidez»				✓	
x_4 =«Desempeña bien las tareas minuciosas»					✓
x_5 =«Tiene espíritu de iniciativa»		✓			
x_6 =«Resuelve solo problemas de trabajo»			✓		
x_7 =«Ejecuta trabajos de excelente calidad»					✓
x_8 =«Cumple correctamente las determinaciones»		✓			
x_9 =«Tiene facilidad para expresarse»	✓				
x_{10} =«Demuestra bastante control emocional»	✓				
x_{11} =«Muy escrupuloso en todas las tareas»				✓	
x_{12} =«Se impone con facilidad en el grupo»			✓		

Tabla 8.3: *Posible evaluación penta-valorada de ciertas cualidades desarrolladas por un trabajador, durante su estancia en la empresa*
—*Fuente:* CHIAVENATO [852] (p. 320).

Penta- es también el caso del método de especificación y valoración quíntuple «de los cinco factores» de John MUNRO FRASER [898]:

Factor 1: Impacto sobre los demás (tipo de respuesta que suscita en los demás la apariencia, la conversación y los modales del individuo);

Factor 2: Cualificación y experiencia (conocimientos y formación que exige cada tipo de trabajo);

Factor 3: Capacidades innatas (rapidez y precisión con que trabaja la mente del individuo);

Factor 4: Motivación (clase de trabajo que interesa a una persona y la cantidad de esfuerzo que ésta está dispuesta a aplicar);

Factor 5: Equilibrio emocional (cantidad de tensión que implica el convivir y trabajar con otras personas).

MUNRO FRASER [898] trabaja suponiendo que la distribución de cualquiera de los factores es una normal discretizada sobre cinco intervalos de clase —*cfr.* Fig. 8.3.

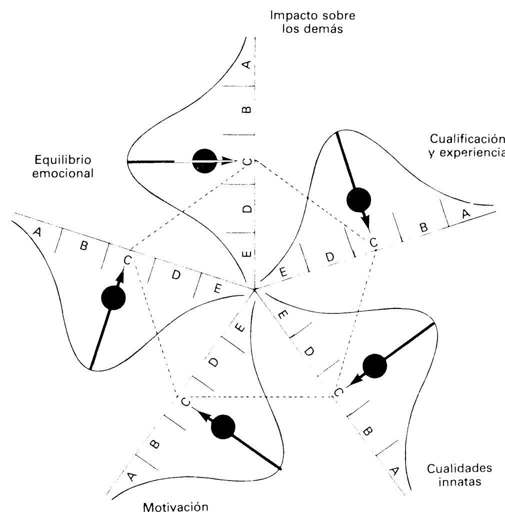


Figura 8.3: *El sistema de los cinco factores*
— *Fuente:* MUNRO FRASER [898].

En vez de una lógica penta-evaluada —*cfr.* §4.3—, como la anterior, podríamos usar lógica borrosa. En los últimos años, bastantes problemas pertenecientes a la Administración con Personas, han sido modelados en términos de problemas borrosos —*cfr.* GIL ALUJA [831]; KAUFMANN y GIL ALUJA [832]—. La Fig. 8.4 muestra un ejemplo de **diferencial semántico** del tipo de los propuestos por OSGOOD, SUCI y TANNENBAUM [912]: puede ser interpretado en una lógica hepta-evaluada o en una lógica borrosa (introduciendo el usuario su estado mediante el control activo).

Todo ello también sería aplicable a cuestionarios de respuestas, en principio, cualitativas, como por ejemplo el *cuestionario de diagnóstico de la resistencia al cambio* de CASTRESANA y BLANCO [914] (p. 84) —versión de BENAVIDES [888] (p. 134)— (*cfr.* Tabla 8.4). Este cuestionario trata de evaluar la resistencia al cambio de los trabajadores. Está pensada para que el ejecutivo se ponga en lugar de ellos y la cumplimente. Originalmente, por cada pregunta que parezca importante para el cambio propuesto se asignará un signo positivo cuando se prevea que este factor aumentará la aceptación, un signo negativo cuando se estime que fomentará la resistencia y una interrogación en los casos de duda —*cfr.* BENAVIDES [888] (pp. 134-135)—; es decir, la forma de evaluación estándar consiste en utilizar una lógica de tres valores. Esta idea es general para el caso de respuestas cualitativas: basta definir un concepto de utilidad o de satisfacción —en nuestro ejemplo, la aceptación del cambio— y valorar según una escala normalizada de valores.

Otros tratamientos se basan, por ejemplo, en la *teoría de la utilidad* —*cfr.* THORNDIKE [915] (Cap. 11)—, el *análisis factorial de componentes* —*cfr.* MEILI [916]; AGELL FERRER y SEGARRA [917] (pp. 168ss.)—, el *análisis factorial de correspondencias* (valoración de los atributos en escala nominal) —*cfr.* AGELL FERRER y SEGARRA [917] (pp. 192ss.)—, el *escalado múltiple dimensional* (atributos no especificados *a priori*, trabajándose con juicios de valor entre pares) —*cfr.* AGELL FERRER y SEGARRA [917] (pp. 213ss.)—, las *redes de neuronas artificiales* —*cfr.* WILKINS y SANDS [918, 919], la combinación de *redes de neuronas artificiales* y *algoritmos genéticos* —*cfr.* GARGANO, MAROSE y VON KLEECK [920, 921]—, o los *sistemas expertos híbridos borrosos* (reglas/marcos), basados en redes de PETRI coloreadas y «tokens» de estados controlados (*controlled state tokens*, CST) —*cfr.* SHIU, LIU y YEUNG [922].

La elección no termina con el contrato del candidato. Es necesario un plan de respaldo para asegurar que la persona obtenga la preparación y condiciones adecuadas para lograr los resultados deseados (plan que puede concretarse en cursos de formación, no sólo «técnicos», sino también de relaciones interpersonales, de

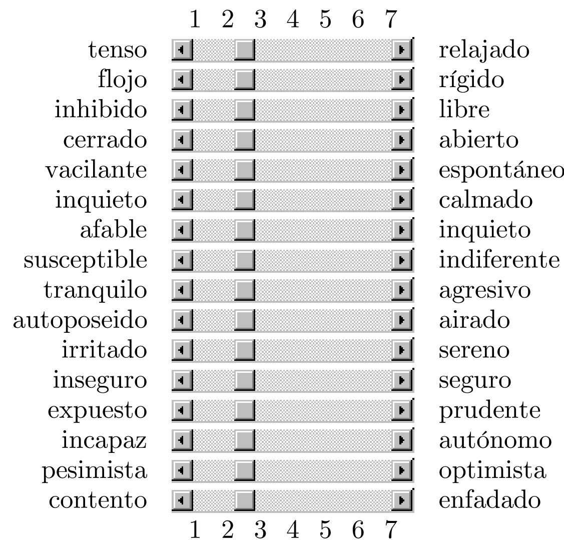


Figura 8.4: *Ejemplo de escala diferencial «tipo Osgood»—cfr.* OSGOOD, SUCI y TANNENBAUM [912]—, *usada en este caso para valorar determinadas reacciones emotivas típicas ante situaciones específicas.*
— *Fuente:* Elaboración propia (la terminología proviene de HUBER [913], p. 102).

comunicación; en poner a su disposición, como asistente personal, algún técnico experto, etc.) —*cfr.* DAILEY y DYER [138] (p. 66).

> *«Hoy en día, los buenos directivos son, también, educadores, formadores de su gente, llevan a cabo, realmente, una labor pedagógica enseñan, muestran cómo se han de hacer las cosas. A veces bajo el epígrafe de coaching, otras de mentorship, las más de las ocasiones debería ser, ante todo y en primer lugar, a través del ejemplo. Han de ser ejemplares, coged la doble intención.»*
> —Carlos M. MORENO-PÉREZ [923]

La Tabla 8.5 muestra un esquema del proceso clásico de elección (selección, según Luis PUCHOL).

8.6 La importancia de una buena elección

> *«Steve Finkel, destacado conferenciante en el tema de la búsqueda de talentos, relata la historia de una empresa que debía llenar un importante cargo. La empresa lo anunció en el Wall Street Journal con un aviso sin identificación, pero la respuesta dejó mucho que desear. Después, una eminente firma de búsqueda de personal convenció a esta pobre gente de que la tarea era tan difícil que se necesitaba un honorario de 25.000 dólares distribuidos a lo largo de cuatro meses. No se prometían resultados, sólo realizar el mayor esfuerzo. La firma de búsqueda de personal cumplió su tarea en el tiempo asignado, y la recomendación fue aceptada sumisamente: la empresa debía promover al ayudante del cargo vacante, asignándole el puesto. Pagar 25.000 dólares para recibir la noticia de que uno empleó hace dos años a la persona conveniente es una lección un tanto embarazosa.»*
> —Martin John YATE [924] (p. 27)



Fuente: HAUENSTEIN [925].

Aspectos relacionados con uno mismo: ¿Cómo cambiará ...
... la satisfacción de mis necesidades básicas?
... la satisfacción de mis necesidades de orden superior?
... mi salario?
... mis posibilidades de promoción?
... mi opinión sobre mí mismo?
... mi influencia informal (poder)?
... mi influencia formal (autoridad)?
... mi futuro en esta organización?
... mi escala de valores anterior?
... mis sentimientos?
Aspectos relacionados con el trabajo: ¿Cómo cambiará ...
... la cantidad de trabajo que hago?
... mi competencia en el trabajo?
... mi interés por el trabajo?
... la importancia de mi trabajo?
... las presiones del trabajo (estrés)?
... mi entorno físico?
... mi horario de trabajo?
Otros aspectos: ¿Como cambiarán ...
... mis relaciones con los directivos colaterales?
... mis relaciones con mi superior?
... mis relaciones con mis subordinados?
... mis relaciones con mi familia?
... mis relaciones con mis amigos?

Tabla 8.4: *Cuestionario de diagnóstico de la resistencia al cambio de* Castresana y Blanco [914] (p. 84)
—*Fuente:* Benavides [888] (p. 134)

Fases previas
— Descripción de las funciones. Elaboración del perfil psicoprofesiográfico.
— Reclutamiento de candidatos.
— Preselección por el currículum o formulario de solicitud.
Fases centrales
— Pruebas (profesionales, psicotécnicas, etc.)
— Primera entrevista.
— Segunda entrevista.
— Comprobación de referencias.
— Toma de decisión.
Fases finales
— Contratación.
— Adscripción al puesto de trabajo.
— Reconocimiento médico.
— Entrenamiento.
— Seguimiento del período de prueba.

Tabla 8.5: *Esquema del proceso de selección.*
—*Fuente:* Puchol [129] (p. 95).

Aunque peque de perogrullada, es así, y hay que decirlo. Las investigaciones muestran, que, en media, incluso los reclutadores más experimentados eligen con acierto a los candidatos en un 50 por ciento —*cfr.* FISHER [926]; SMART [927]—. Se ha probado que ver la contratación de empleados como un gasto en vez de como una inversión, constituye una significante pérdida de recursos, a la vez que no ayuda en absoluto a cultivar un ambiente de alto rendimiento —*cfr.* TAYLOR [928].

Diferentes estudios identifican el movimiento o rotación externa —(*turnover*), personas que abandonan la organización voluntariamente— de empleados como uno de los problemas más costosos en las organizaciones. Una buena elección ayuda a prevenir y reducir este problema de movimiento. La mejora del «ajuste» inicial entre un individuo y un puesto de trabajo, tiene un gran impacto sobre el movimiento —*cfr.* HAUENSTEIN [929]—. Un estudio reciente elaborado en la Universidad de Harvard, muestra que el 80 por ciento del movimiento de empleados se debe a errores en la elección —*cfr.* HIRSCHMAN [930]—. No sólo debe preocupar atraer candidatos hacia la organización, sino también aumentar la posibilidad de que éstos permanezcan en la misma una vez que hayan sido contratados —*cfr.* DOLAN, SCHULER y VALLE CABRERA [931].

Los estudios también demuestran que los nuevos contratados cuyos valores se ajustan bien con la cultura de la organización, tienden a integrarse más rápidamente, se sienten más satisfechos, e intentan permanecer en la organización por más tiempo —*cfr.* O'REILLY, CHATMAN y CALDWELL [932]—. A diferencia de esto, y como parece intuitivamente lógico, un ajuste inicial más pobre entre candidato y puesto, conlleva la no satisfacción en el trabajo, mayores niveles de stress relacionado con el trabajo, y por supuesto, continuos intentos de abandonar la organización, en definitiva, muchos conflictos —*cfr.* LOVELACE y ROSEN [933]; LEBOEUF [934].

Bavendam Research Inc. [935] identifica cinco factores. Según sus grados, los trabajadores desearán quedarse o marcharse. Cuando son bajos, los trabajadores quieren marcharse. Cuando son elevados, quieren quedarse: *Entrega* (*commitment*, cuando los trabajadores están orgullosos de la organización y comparten sus ideales y valores, quieren quedarse), *prospectiva a largo plazo*, *satisfacción en el trabajo*, *estrés* (si es alto significa que está atrapado por su trabajo, sin embargo, bajos grados de estrés pueden ocasionar la marcha del trabajador), e *imparcialidad*.

8.7 ¿Inundado de solicitudes?: Piense en el «reclutamiento electrónico»



Ya es corriente hablar de **reclutamiento electrónico** (*e-recruiting*). María Paz ANDRÉS REINA y Dolores TOUS ZAMORA [936] (pp. 2-4) relacionan **algunas ventajas** de éste:

- Mayor cobertura y amplitud de alcance.
- Ofrece una mayor cantidad de información sobre el puesto y la organización.
- Presencia incrementada (mayor duración de la publicidad).
- Acceso e información 24-7-365 (24 horas al día, 7 días a la semana, 365 días por año).
- Comunicación instantánea entre empresa y candidatos.
- Ahorro en tiempo.
- Ahorro en costes.
- Versatilidad (actualización de la información).
- Igualdad en el campo de juego (PYMES frente a grandes organizaciones).
- Valoración de la empleabilidad.

- Mejores candidatos (mínimo de habilidades tecnológicas si son capaces de acceder al reclutamiento electrónico).
- Gran segmentación inicial.
- Confidencialidad.
- Disminución del «ruido» (número de perfiles no aceptables que llegan) y del «aire» (número de perfiles aceptables que no llegan).

y también **algunas desventajas** —*cfr.* Andrés Reina y Tous Zamora [936] (p. 4); *cfr. item v. gr.* Navarro [937]; Rico [938]:

- La falta de contacto humano entre la empresa y los candidatos.
- La sobrecarga de currículums en la red.
- La dificultad de segmentación del público.
- El riesgo de realizar procesos de elección discriminatorios.
- El respeto a la privacidad de los datos de los candidatos disponibles en la red.
- El aún limitado, pero exponencialmente creciente, número de usuarios de la red.
- No todos los usuarios utilizan la red para buscar trabajo.
- El perfil de los usuarios que se valen de la red para buscar trabajo, principalmente jóvenes, sin experiencia y con conocimientos de nuevas tecnologías, limitan el tipo de puestos de trabajo que se pueden ofrecer por ella.
- Los departamentos de recursos humanos y los sistemas de información de la empresas aún no están dotados de personal ni medios capaces de aprovechar las oportunidades que les ofrece Internet.

Pero quizás el problema más grave si se usa Internet es que se genere una base enorme de candidatos, entre los cuales habrá que buscar el mejor (el *killer* o *top applicant*, como a veces aparece denominado en la literatura en inglés).

Tradicionalmente, los programas de ayuda a los reclutadores se guiaban por palabras, frases o conceptos claves. Pero esto ha mostrado ser ineficaz, pues se encontraban candidatos inadecuados (*falsos positivos*), mientras que algunos cualificados eran eliminados (*falsos negativos*). Por cierto, diversos expertos, entre tantos de ellos Patrick Hauenstein, presidente de `Advantage Hiring`, insisten en la conveniencia y grandes ventajas de estructurar la información de los candidatos y los puestos, mediante **perfiles**, para poder así compararlos —*cfr.* Hauenstein [925]—. Ya existen en la red múltiples tecnologías que ofrecen baterías de tests técnicos con el propósito de identificar las habilidades de los sujetos en estudio (*v. gr.* `ReviewNet.com` o `Brainbench.com`). La empresa `Advantage Hiring` defiende y promueve el uso de las **entrevistas de respuestas cerradas** —*cfr.* Hauenstein [925]—, que igualmente permiten definir los perfiles psico-profesionales de los candidatos y del puesto. En cualquier caso, los candidatos no tienen más que contestar a unas pocas cuestiones acerca de las habilidades requeridas para desempeñar eficientemente el trabajo. El software es capaz de ordenar automáticamente a los candidatos, según sus respuestas. El empleador puede acceder, si así lo desea, a los perfiles individuales de los candidatos. Diferentes mecanismos de comparación, como las propuestas que desarrollamos en estas páginas, se sitúan en la trastienda.

8.8 Hay que sincerarse con los candidatos

> *«Cuando se dijo que Annie Besant, la sabia dama, había exclamado: "Acepto el universo", Emerson comentó: "¡Por Dios, más vale!" Igualmente, cuando un gerente dice: "Tengo que trabajar con personas", la respuesta manifiesta es "¿Con quién, si no?"»*
> —Charles A. Dailey y Frederick C. Dyer [138] (p. 160)

Que yo sepa, la complaciencia y la ufanía son características humanas. Que un trabajador se sienta satisfecho con su trabajo lo torna en el mejor garante de la senda hacia el éxito de la empresa.

Como afirma Ruth MOSKOWITZ [939], un buen ajuste significa que la persona no sólo estará satisfecha con el trabajo (medido por sus características más internas), sino también con el ambiente de trabajo (o sea, con la organización) y con otras condiciones de oportunidad en el trabajo (*v. gr.* localización, salario, promoción, etc.) Así que parece que las organizaciones debieran sincerarse con sus potenciales trabajadores. Una propuesta es el que las organizaciones aporten a los candidatos información realista, pertinente y no distorsionada, sobre el puesto de trabajo, una **propuesta de trabajo realista** (PTR) —*realistic job preview* (RJP)—. Una PTR podría incluir —*cfr.* MOSKOWITZ [940]:

- Describir un día típico en el trabajo.
- La visión de la organización y sus valores.
- Aspectos del trabajo en los que otros han tenido dificultad.
- Aspectos del trabajo gratificantes para otros.
- Oportunidades de desarrollo y promoción profesional.
- Compensación y beneficios.
- Requisitos: viajes, demandas físicas, turnos, horas extras, disponibilidad fuera de turno, reclamaciones de los clientes.
- Reorganizaciones pendientes.
- Pasos en el proceso de elección.

Con las PTR, la realidad del trabajo es fiel a sus expectativas —al menos, en teoría—. De aquí, que la satisfacción futura del trabajador sea mayor, la entrega, el compromiso del trabajador con la organización sea más fuerte, y el movimiento sea menor —*cfr.* WANOUS [941]; BREAUGH [942]; DEAN y WANOUS [943]—. De hecho, PREMACK y WANOUS [944] estiman que el uso de las PTR puede conseguir reducir el movimiento voluntario de personal entre el 10 y el 15 por ciento.

Quizás todo esto cobre una mayor importancia en el «submundo» de la oferta y demanda de puestos tecnológicos, donde la especialización está a la orden del día, y por tanto los candidatos son escasos. En este caso, además de tener las organizaciones que sincerarse con ellos, deberán tener cuidado de no aburrirlos con largos procesos de elección —*cfr.* HAUENSTEIN [945].

8.9 Programas de referencia de empleados

«Una hora de conversación vale más que cincuenta cartas.»
—Marie de RABUTIN-CHANTAL (marquesa de SÉVIGNÉ) <Cartas> (sus más de 1500 cartas son consideradas una joya de la literatura francesa)

¿Y qué mejor forma de dar a conocer la organización que a través de sus empleados? Son cada vez más las empresas que desarrollan y ejecutan un programa de referencia de empleados (*refer-a-friend*) —también denominado *Employee Referral Program* (ERP)—. Según José Luis ARDANZA [946], actualmente, el 70 por ciento de los empleos se encuentran mediante conocidos.

La red de contactos (*networking*) de un individuo, se entiende como el resultado dinámico del continuo crear, diseminar y ampliar el círculo de sus conexiones e influencias —*cfr.* BOWES [947] (p. 38) *via* CRESPO SÁNCHEZ y TOLEDANO GARRIDO [948] (p. 391)—, cuidando incesantemente las relaciones sociales.

A la hora de elegir, los encargados prefieren a personas recomendadas a desconocidos, aunque estos últimos tengan un buen curriculum —*cfr.* CRESPO SÁNCHEZ y TOLEDANO GARRIDO [948] (p. 393)—. La realidad es que los candidatos procedentes de las redes de contactos poseen una perspectiva más realista de la organización, pues sus «padrinos» les han proporcionado información interna de la empresa, información «íntima», que la organización nunca consideraría incluir en una propuesta de trabajo realista (PTR), ya sea porque piense que no es relevante, ya sea por desconocimiento por parte de la ejecutiva —*cfr.* WANOUS [941].

Por ello las organizaciones deben esmerarse en «cuidar» a sus empleados, porque ellos son los principales difusores de las «intimidades» de la organización. Si se pretende que los empleados sean referentes de la

organización, debe velarse por las relaciones con ellos y con los sindicatos, so pena de verse mermada la cantidad y calidad de los referentes —*cfr.* French [949] (p. 249) *via* Crespo Sánchez y Toledano Garrido [948] (p. 390).

El esfuerzo que, sin duda, supone convencer a un amigo para que preste sus servicios a la organización, hace que esta última recompense al padrino, o bien en especie, o bien económicamente. En esto hay mucha variabilidad; por ejemplo, entre 601 y 6.010,1 euros, ofrece Nortel Network, en función del puesto a cubrir, y entre 5.305,3 y 13.258,3 euros, IBM Global Service, según el número de referencias aportadas por el empleado (desde la primera a la cuarta) —*cfr.* Crespo Sánchez y Toledano Garrido [948] (p. 389).

Cabe comentar en este punto que no debe confundirse la referencia de empleados con ningún tipo de manipulación. Los manipuleos a los que hacíamos referencia en §1.9, al igual que el acoso psicológico en el trabajo —si éste tiene como propósito que el acosado se marche para dar entrada a un nuevo empleado—, son malintencionados y usualmente persiguen beneficios personales (el fin no es el beneficio de la organización, sino el individual). Para evitar, en cierta medida, suspicacias, varias organizaciones prohíben que puedan presentar candidatos a los miembros del departamento de personal, así como a las personas directamente implicadas en el proceso de elección —*cfr.* Crespo Sánchez y Toledano Garrido [948] (p. 388).

8.10 ¿Me ayudas a elegir un puesto?

Pero, por otro lado, no podemos ni debemos olvidarnos de que existen mercados de trabajo en los que la **oferta de puestos es superior a la demanda** (por ejemplo, debido a la escasez de profesionales en el sector). En estos escenarios, el candidato es quien tiene la última palabra, es quien va a elegir a la empresa en la que desea trabajar —*cfr.* §13.3 (pág. 368).

En estos ambientes, lo ideal sería disponer de aplicaciones software, de manera que **el candidato pueda evaluar las diferentes oportunidades de trabajo** que se le presentan, pero evaluarlas «a distancia» (con espacio) y con tranquilidad (con tiempo). Las empresas y los empleadores deberían «presentarse en sociedad», casi hasta sus secretos mejor guardados. No hay nada mejor que conocer con quienes vas a trabajar, sus curricula, sus trayectorias profesionales, pero también sus gustos, sus hobbies, sus «otros» intereses.

Las **propuestas de trabajo realista** (PTR) comentadas anteriormente, deberían ser públicas.

De manera más concreta, las empresas deberían explicitar los conocimientos que requieren, ofreciendo pruebas, vía software, que permitan al candidato, mediante su realización, saber su grado de conocimiento de las materias solicitadas por la empresa, así como determinar sus necesidades de desarrollo para posteriores intentos de acceder a ese puesto de trabajo.

Deberían ser públicos, de manera anónima, todos los curricula de los candidatos y todas las pruebas que hayan sido completadas. Todas. Esto quiere decir que podríamos seguir la evolución de las personas, su ritmo de superación. De esta manera, un candidato sabría «a qué atenerse». No hay nada mejor para superarte que conocer a tus competidores, y cómo evolucionan. ¿O quizás te avergüenzas de tu propia evolución? Si es así, si no te sientes contento contigo mismo, es que no te conoces, y por tanto, debes cambiar. **Conocer a los demás**, te ayudará.

Por supuesto que todo ello debería publicarse en un formato de almacenamiento de datos que permitiese un fácil tratamiento posterior de éstos mediante cualquier hoja de cálculo o programa con herramientas predictivas.

Sin información sólo se llega al desconocimiento. Todo lo aquí dicho revitalizaría el mercado de trabajo, animaría a las empresas a superarse, al conocer mejor a las demás empresas y a los candidatos, contribuyendo a transformar los canales de información, constituyentes de Internet, en canales de conocimiento, los flujos de datos, en **flujos de conocimientos**.

8.11 ¿Qué son las competencias?

> *«No se gestionan personas. La tarea es liderar personas. Y la meta es sacar provecho de las facultades y conocimientos de cada individuo.»*
> —Peter Drucker [950] (pp. 21-22)

David C. McClelland [951] argumenta que las pruebas psicotécnicas tradicionales se ven sumamente afectadas por un sesgo cultural capaz de discriminar en función de raza, sexo o posición socioeconómica. Como alternativa, él defiende un tipo de entrevista con enfoque conductual («*Behavioral Event Interviews*») donde los factores a tener en cuenta son una combinación de comportamientos, habilidades, conocimientos y atributos

personales, que denomina **competencias** —*cfr. Canadian Council of Human Resource Associations* (CCHRA) [952]—, y que son definibles, observables y mensurables —*cfr.* PUCHOL [129] (p. 318)—, y susceptibles de ser consideradas en toda profesión, incluidas la de gestor o director de recursos humanos —*cfr.* BREWSTER, FARNDALE y OMMEREN [953].

Un autor muy referenciado en esto de las competencias, es Richard BOYATZIS, quien las define como características subyacentes de una persona que repercuten en que el rendimiento en un trabajo sea superior o más efectivo —*cfr.* BOYATZIS [954]—. Este autor también proporciona en este libro una metodología para definirlas operacionalmente.

Las competencias individuales dentro de la organización en su conjunto son más importantes que las competencias para un trabajo determinado —*cfr.* BREWSTER, FARNDALE y OMMEREN [953] (p. 25)—. Ello hace, según PORTER [955], que los individuos sean determinantes para el éxito de una organización.

De todos modos, la palabra «competencia» está sujeta a múltiples interpretaciones. Una diferencia fundamental en su interpretación depende de si se ve una competencia como un constructo personal (un rasgo) o como un aspecto observable del desempeño (actividades y comportamiento requeridos); otra tiene que ver con que la competencia se interprete como un requisito para un desempeño satisfactorio o como un requisito para alcanzar la excelencia —*cfr.* HAUENSTEIN [956]—. Pensamos que ninguna de estas interpretaciones es del todo válida en un proceso de elección. Más bien habría de trabajarse con una combinación de ellas.

Para Patrick HAUENSTEIN [956], en el día a día, una competencia se define como una categoría o grupo de actividades o comportamientos relacionados, tipos de conocimiento, habilidades técnicas, o motivaciones. Ellas representan los requisitos técnicos, de comportamiento y de motivación para un desempeño satisfactorio de un trabajo.

BREWSTER, FARNDALE y OMMEREN [953] (p. 24) usan tres términos intercambiables: **competencias**, **capacidades** y **habilidades** (conocimiento, cualidades y otras características). Según KOCHANSKI [957] (p. 4) las competencias son los factores de éxito que posibilitan los procesos de evaluación, retroalimentación, desarrollo y remuneración de los individuos. Según BROCKBANK [958], las competencias son conjuntos de habilidades técnicas y culturales. HOLMES [959] observa que las cualificaciones basadas en la competencia ofrecen información sobre lo que una persona es capaz de hacer y no sobre lo que ha hecho en el pasado. «Calibrar la competencia no significa calibrar el grado de desempeño conforme a un estándar, es decir, lo que una persona hace realmente, sino medir lo que una persona es capaz de hacer. Se trata de una medida anticipada del desempeño que se deduce del desempeño pasado, a menudo basándose en la observación. La definición de competencia se basa también, fundamentalmente, en la definición de desempeño *superior*, en lugar de en los niveles medios de desempeño» —*cfr.* BREWSTER, FARNDALE y OMMEREN [953] (p. 25).

Una competencia muestra, pues, lo que un sujeto puede llegar a hacer si se le facilitan las condiciones adecuadas para la realización de una determinada tarea. El aspecto observable de la competencia es la ejecución. La **ejecución** muestra lo que un individuo es capaz de hacer normalmente. Ambos conceptos, competencia y ejecución, están íntimamente ligados con el de zona de desarrollo potencial de VYGOTSKI[9]. La teoría de VYGOTSKI sobre el aprendizaje se basa en la noción de **zona de desarrollo potencial** o *zona de desarrollo próximo* (ZDP), que define como —*cfr. item* VYGOTSKI [963] (p. 86): «la distancia entre el grado de desarrollo actual determinado por cómo soluciona problemas independientemente y el grado de desarrollo potencial determinado por cómo soluciona problemas ayudado por un adulto o por compañeros más capaces.» —*cfr. item* MARÍN GRACIA [964]; ROMÁN PÉREZ y DÍEZ LÓPEZ [965]; RIVIÈRE [966]. La ZDP indica las posibilidades a conseguir por el sujeto con la ayuda de los demás, mientras que la zona o nivel de desarrollo real (ZDR) supone lo ya alcanzado por el individuo[10].

---

[9] Algunos conceptos análogos al de *zona de desarrollo potencial* son: el **próximo paso** de SIEGLER y RICHARDS [960], el **andamiaje** de WOOD [961] y el **potencial de aprendizaje** de FEUERSTEIN, RAND y HOFFMAN [962].

[10] Pueden diferenciarse tres etapas en el estudio de la **inteligencia** en Psicopedagogía —*cfr.* ROMÁN PÉREZ y DÍEZ LÓPEZ [965]: en la primera, y a partir del libro *El Genio Hereditario* de Francis GALTON [967], se pensó que la inteligencia se heredaba por lo que resultaba imposible su modificación o desarrollo; la segunda está dominada por el **conductismo** (*behavorism*) —*cfr.* WATSON [968]—, por el concepto «estímulo-respuesta» (S-R), negando cualquier capacidad de reacción del organismo —los **neoconductistas** defienden el modelo «estímulo-organismo-respuesta» (S-O-R); el **interaccionismo** trata del modelo «estímulo-mediador-organismo-respuesta» (S-H-O-R)—. En esta etapa se crean muchísimos programas de educación «compensatoria», sobre todo en EE. UU. Actualmente, con la teoría genética en revisión, y con las ideas de VYGOTSKI en alza, la inteligencia es vista como un producto social, modificable en función de diversas variables (edad, ambiente), de la *situación* —*cfr.* WERTSCH [969]— y del *contexto* —*cfr.* STERNBERG [970, 971, 972]—, y cambiable, sobre todo, mediante un *entrenamiento dirigido* —*cfr.* PINILLOS [973]; WEBER [974]—. Las personas que rodean a un niño intervienen en su proceso de maduración y en el desarrollo de su aprendizaje e inteligencia —*cfr.* VYGOTSKI [975]—. La diferencia entre la ZDP y la ZDR es patente.

El interés de la **teoría de Vygotski** y en general, de cualquier modelo que explore la inteligencia de forma dinámica se centra en aquellas potencialidades que están ocultas pero que pueden salir a la luz con ayuda. Dos de estos modelos de exploración dinámica son el **modelo de integración de la información** de DAS, KIRBY y JARMAN [976, 977] —*cfr.* MARÍN GRACIA [964] (pp. 14ss. *et passim*)—, desarrollado a partir de las ideas de [978], y el **modelo de evaluación del potencial de aprendizaje** de FEUERSTEIN,

No está de más recordar algo de lo que la *International Organization for Standardization* (ISO) nos recomienda. Por ejemplo, en la norma ISO 9001:2000 (*Quality management systems - Requirements*), en el apartado 6.2.2., indica un número de acciones a emprender, de manera que el personal participe y se comprometa con la calidad, la satisfacción del cliente y el logro de resultados —*cfr. v. gr.* Senlle [110] (pp. 21-22):

1. Determinar las competencias necesarias para cada cargo y función.
2. Proporcionar formación para satisfacer las carencias encontradas en los perfiles de competencias.
3. Evaluar las acciones tomadas.
4. Asegurarse de que el personal está lo suficientemente formado como para cumplir con todas sus funciones y el logro de los objetivos.
5. Mantener las fichas de funciones, perfiles de competencias, evaluación del desempeño y registros de formación, para asegurarnos de que marchamos con la mejora continua por el camino de la calidad.

Por otro lado, la norma ISO 9004:2000 (*Quality management systems - Guidelines for performance improvements*) (apartado 6.2.2.2.) añade que las necesidades de formación deberán tener en cuenta los cambios en los procesos con el objetivo de proporcionar al personal los conocimientos y habilidades que, junto con la experiencia, mejoran su competencia.

Las Figuras 8.5 (pág. 246) e 8.6 (pág. 247) muestran las descripciones de las 22 competencias del modelo para RR. HH. propuesto por la IPMA-HR (*International Public Management Association for Human Resources*). Como ejemplo, tres definiciones son:

Socio (*Business Partner*): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 19;

Gestor de los cambios (*Change Agent*)[11]: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20;

Dirección (HR *Leader*)[12]: 5, 6, 8, 12, 14, 17, 21, 22.

Chris Brewster, Elaine Farndale y Jos van Ommeren [953] (Anexo 5, p. 124), identifican las siguientes competencias en recursos humanos en la bibliografía consultada en el estudio que realizan:

ESTILO: Credibilidad personal, Complejidad y rapidez cognitiva, Asertividad, Eficacia en relaciones interpersonales, Gestión de uno mismo, Orientación a las relaciones, Aprendizaje continuo, Tolerancia al estrés, al cambio y a la ambigüedad, Adaptación al cambio, Enfoque creativo y capacidad analítica para la resolución de problemas, Incentivo empresarial, Adaptabilidad, Orientación a los resultados, Compromiso con un equipo.

LIDERAZGO: Facilitación o creación de relaciones (gestores, empleados o sindicatos), Gestión de proyectos, Gestión del talento, Facilitador de las relaciones en grupo, Gestión de la información, Respuesta a los agentes afectados, Fomento de la innovación, Planificación de acciones, Gestión de activos y control de costes, Gestión de la ampliación, Orientación hacia la calidad, Creación de valor en los consumidores, Desarrollo de la diversidad cultural y la sensibilidad entre culturas, Análisis del entorno, Autorización a gestores para la Gestión de Recursos Humanos.

IMPLICACIÓN ORGANIZATIVA: Conocimiento empresarial y orientación y conocimiento de mercado, Gestión del cambio y de la cultura, Agente del cambio, Liderazgo, Conciencia de organización, Capacidad de evaluar el impacto empresarial, Perspectiva empresarial estratégica (elaboración de estrategias empresariales), Planificación e implantación empresarial (vincular los recursos humanos a los procesos empresariales y de

Rand y Hoffman [962] —*cfr.* Marín Gracia [964] (pp. 20ss. *et passim*)—. Para este último, conocer la **modificabilidad** del individuo se convierte en un criterio crucial de la capacidad del individuo. La evaluación del grado de modificabilidad de un individuo, es otra forma de acercarse al estudio de las posibilidades de aprendizaje, de la ***educabilidad*** en palabras de Rey [979] —citado por Marín Gracia [964] (p. 9). Por ejemplo, Feuerstein, Rand y Hoffman [962] defienden el estudio de las respuestas «semicorrectas» para determinar el potencial de aprendizaje oculto del individuo. Las **respuestas semicorrectas** son aquellas en las que el sujeto aplica el razonamiento adecuado pero sin atender a todos los elementos, a todas las premisas, por lo que su respuesta es correcta pero no es la más correcta. Por ejemplo, para completar la analogía «océano: barco: desierto: X», hay que elegir como X, entre: arena, caravana (vehículos que marchan juntos, uno detrás de otro) o camello. Las tres son respuestas semicorrectas. Quien elige «arena» entiende la relación «B en A»; quien elige «caravana», además, descubre la relación «medio de transporte»; finalmente, quien elige «camello» se daría cuenta de la singularidad de barco y de la multiplicidad de caravana. Feuerstein, Rand y Hoffman [962] (p. 304) —citado por Marín Gracia [964] (p. 55)— proponen «camello» como la respuesta más correcta. El inconveniente que vemos nosotros es que en «arena», también están presentes la relación de multiplicidad (muchos granos) y la de transporte (ayudados por el viento, en los granos pueden viajar ciertos seres vivos), y en general, que uno puede imaginar otro tipo de relaciones; de esto toma uno conciencia cuando le rodean niños o cuando en su familia y entre sus amigos tiene uno la fortuna de contar con personas de «**pensamiento divergente**» —*cfr.* nota a pie nº12 (pág. 11).

[11] La administración con y para las personas promueve cambios en la organización para incrementar su competitividad. Se hace necesario un gestor.

[12] Además de asumir el propio papel de lider, se encarga de descubrir y formar líderes.

planificación organizativa), Diseño y gestión de procesos empresariales, Comunicación e influencia, Desarrollo de una organización de aprendizaje.

TÉCNICAS: Conocimiento y práctica de la gestión de recursos humanos tradicional (remuneración o compensación, relaciones laborales, formación y desarrollo, diseño y eficacia organizativa, contratación y retención, gestión del desempeño, comunicación, aprendizaje organizativo, salud y seguridad, sistemas de información, quejas y disciplina), Aplicación y explotación de tecnologías de la información, Tareas administrativas, Habilidades para la evaluación, Cumplimiento con la cantidad creciente de legislación compleja, Formación, consultoría y desarrollo de los demás, Contratación estratégica, Flexibilidad funcional, Establecimiento claro de objetivos, Responsabilidad en recursos humanos.

8.12 ¿Y qué son los roles de trabajo?



[...] cuando se produce un ascenso en Semco imprimimos tarjetas en blanco y decimos a quien acaba de ascender: "Piense en un cargo que represente, para el exterior, su área de operación y su responsabilidad, y hágalo imprimir." Si a la persona le gusta "Gerente de Compras", bien. Si quiere algo más elegante, puede imprimir tarjetas que digan "Primer Faraón Encargado del Suministro a sus Majestades Reales". Lo que quiera. Pero dentro de la empresa, hay sólo cuatro opciones. (De cualquier modo, casi todos optan por imprimir sólo sus nombres).»
—Ricardo SEMLER [980] (pp. 211-212)

La diferencia con las competencias —según Patrick HAUENSTEIN [981]—, es operacional: los roles de trabajo representan agrupaciones (*clusters*) de desafíos situacionales que ocurren de manera natural en el mundo del trabajo, mientras que las competencias son agrupaciones de comportamientos de los trabajadores.

Una **especificación de un rol de trabajo** incluye: una definición breve, una descripción de diferentes grados de rendimiento, de cumplimiento del rol, y una descripción de los diferentes **desafíos situacionales** que comprende el rol. Por ejemplo, la especificación del rol de trabajo «Líder de proyectos» —*cfr.* HAUENSTEIN [981]:

- Definición breve: Planificación, ejecución y evaluación de proyectos.
- Niveles de cumplimiento:
  - Maestro: El rol requiere dirigir proyectos muy complejos (planificar y coordinar múltiples actividades concurrentes), lo que supone gestionar una cantidad considerable de recursos y presupuesto, por lo que sus consecuencias son grandes para la organización.
  - Experto: El rol requiere dirigir proyectos muy complejos (planificar y coordinar múltiples actividades concurrentes), lo que supone gestionar una cantidad moderada de recursos y presupuesto, por lo que sus consecuencias son importantes para la organización.
  - Oficial: El rol requiere dirigir proyectos moderadamente complejos, y supone gestionar una cantidad moderada de recursos y presupuesto, y son importantes para un departamento o unidad particular dentro de la organización.
  - Novato: El rol requiere dirigir proyectos moderadamente complejos, con un modesto presupuesto o una modesta cantidad de recursos, que son importantes para un departamento o unidad particular dentro de la organización.
  - Aprendiz: El rol requiere dirigir proyectos simples, con un modesto presupuesto o una modesta cantidad de recursos, que son importantes para una área específica dentro de un departamento o unidad.

- Desafíos situacionales:
  - Crear planes de proyectos: Preparar un plan formal donde se aprecien los logros, avances y posibles hitos a conseguir con el proyecto, la distribución de tiempos para su consecución y los recursos requeridos.
  - Determinar y gestionar los recursos humanos necesarios: Determinar los requisitos que debe satisfacer el personal del proyecto y asegurar que los individuos posean la cualificación necesaria y suficiente para desarrollar el proyecto, además de asegurar su disponibilidad.
  - Facilitar el progreso: Ayudar a los equipos o individuos partícipes en el proyecto a superar los obtáculos, derribando barreras, encontrando la información o los recursos requeridos, y obteniendo a tiempo, aprobaciones, subvenciones y demás decisiones vinculantes.
  - Vigilar el estado del proyecto: Crear y utilizar medidas y sistemas apropiados para determinar el progreso del proyecto en diferentes instantes del desarrollo del mismo.
  - Evaluar proyectos: Recolectar e interpretar la información que sea relevante para determinar diferentes asuntos a partir de los resultados finales o consecuencias de un proyecto.

La Tabla 8.6 muestra los requisitos de competencias y los de roles para dos puestos de trabajo. Apreciamos cómo los trabajos necesitan menos roles que competencias para ser descritos. Además, observamos un *menor solapamiento* en la caracterización de los puestos si usamos un modelo de roles de trabajo —sólo hay uno en común, frente a seis competencias comunes (lo común, en tipografía *itálica*).

Supervisor de primer nivel		**Profesional «de cuello dorado»**	
Competencias	**Roles**	**Competencias**	**Roles**
Análisis	Trabajador motivado	*Análisis*	Trabajador con conocimiento
Juicio	Entrenador, preparador	*Juicio*	Miembro de equipo
Liderazgo individual	Director	*Iniciativa*	Consultor
Adiestrador	*Líder de proyectos*	Conocimiento técnico	Comunicador
Planificación y organización		Trabajo en equipo	*Líder de proyectos*
Iniciativa		*Estándares de trabajo*	
Estándares de trabajo		*Planificación y organización*	
Persuasivo		*Comunicación*	
Desarrollo de talento organizativo		*Persuasivo*	
Liderazgo en las reuniones		Adaptabilidad	
Comunicación		Habilidad para aprender	
Delegación			

Tabla 8.6: *Comparación de los requisitos de competencia frente a los de roles de trabajo para dos puestos.*
—*Fuente:* Hauenstein [981].

Los roles de trabajo pueden ser medidos, por ejemplo, mediante entrevistas, en las que se indague, por ejemplo —*cfr.* Hauenstein [981]—, la experiencia en los roles que interesen (vida laboral específica), los comportamientos mostrados en esas situaciones (comportamientos pasados), los comportamientos en situaciones hipotéticas basadas en los roles para los que el candidato sea apto (comportamientos futuros), los errores cometidos durante el desempeño de los roles bajo estudio en actividades pasadas y conclusiones que dedujo de tales vivencias (¿aprende de sus errores?).

En cuanto a ventajas y desventajas de un modelo basado en roles de trabajo frente a uno basado en competencias, podemos afirmar que:

- Los roles de trabajo son concretos (en oposición a la abstracción que parecen poseer las competencias). Debido a esto, son más sencillos de entender que las competencias, que requieren explicaciones adicionales para rebajar su grado de abstracción. El lenguaje empleado en la denominación de los roles de trabajo es natural en las organizaciones (en contra, el de las competencias sigue necesitando de formación para entenderlo).

- El modelo de roles de trabajo presenta enlaces directos con el trabajo, con los puestos, así como con tareas específicas dentro del ámbito de la formación, preparación o entrenamiento. En el modelo de competencias, estos enlaces son indirectos.

Observación 142 *Supongo que no hay ningún inconveniente para que consideremos nuevos roles de trabajo los ítems «supervisor de primer nivel» y «profesional de cuello dorado». Obsérvese que han sido definidos de dos*

maneras: a partir de competencias, y a partir de ***roles «primitivos» de trabajo****. Por tanto, la cualificación profesional, que muchas veces se interpreta como una especificación «oficial» de las competencias que se precisan para desempeñar un rol de trabajo, también podría interpretarse como una especificación «oficial» de los roles de trabajo —de menor nivel, más primitivos— que se precisan para desempeñar un rol de trabajo. Parece pues, en principio, que un grafo consigue representar la estructura relacional del conjunto de roles de trabajo de un espacio laboral determinado.*

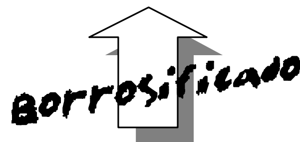
8.13 Representación vaga de las competencias o roles de trabajo

> *«El principio de Peter, según el cual existen individuos geniales en un determinado nivel de eficacia que se convierten en un auténtico desastre cuando se les asciende al grado inmediatamente superior, es en este caso válido por completo, puesto que el mundo se encuentra plagado de mediocres abogados, médicos o arquitectos que hubieran podido ser excepcionales creativos publicitarios, fotógrafos o diseñadores de muebles.»*
> —Alberto Vázquez-Figueroa [982] (p. 46)

Tanto para las competencias como para los roles de trabajo, la diferencia con respecto al proceder de comparar los perfiles con el ideal, estriba en la **máxima de su mejora**. Este principio significa que no se establece un perfil ideal para un puesto; sólo hay factores que se evaluarán (positivamente) y se elegirá la persona a la que la comisión de expertos asigne una mayor puntuación. Al no referirse al mismo concepto los criterios usados, bajo la hipótesis de su medibilidad y seguramente usar diferentes reglas de medida, arbitrariamente situamos la perfección (la perfecta maestría en una competencia) en 1, considerando normalizada su representación numérica en el intervalo $[0, 1]$, como extensión borrosa de la bivalencia $\{0, 1\} = \{\text{incompetente}, \text{competente}\}$, y recurriendo a expresiones naturales como no demasiado incompetente.

Es decir, como comentábamos en §2.3, representamos las personas y los puestos, nuestras unidades vagamente perfiladas, mediante conjuntos borrosos. Las expresiones lingüísticas calificativas son elementos de un conjunto prefijado de términos lingüísticos, donde el mínimo sería incompetente y el máximo competente:

$$[0, 1] \leftarrow \mathcal{L} = \{\text{incompetente, ..., competente}\}$$



$$\{0, 1\} \rightleftarrows \{\text{incompetente}, \text{competente}\}$$

El perfil de competencias de una persona o de un puesto, o un rol de trabajo de este último, admite pues una representación sencilla como subconjunto Φ_1-borroso (esto es, el intervalo asociado a cada referente $u \in \mathcal{U}$ es de la forma $[a_u, 1]$), y una menos sencilla, pero quizás más real, como subconjunto borroso de tipo 2 —o sea, asignando a cada referente $u \in \mathcal{U}$, un subconjunto borroso A_u semi-abierto hacia la derecha (es decir, $\lim_{x\to 1} A_u(x) = 1$)—. Los grados borrosos de este conjunto borroso de tipo 2, es decir las etiquetas lingüísticas asociadas a cada referente serían elementos de un conjunto de términos $\mathcal{L}$ previamente elegido.

8.14 Ejemplo ilustrativo: Valoración de tareas: un problema multi-criterio, multi-subcriterio y multi-experto

> *«La única manera de conseguir más es producir más»*
> —Anónimo, pero americano, *via* Manuel Pérez Sabat [983] (p. 1124)

Planteemos un supuesto de valoración de tareas. Una *meta*-tarea de vital importancia para cualquier organización.

Supóngase que la empresa RIPIÑOS decide valorar ciertas tareas. Como factores[13] *y subfactores de referencia elige los explicitados en la Tabla 8.7 —cfr.* Aguirre de Mena, Andrés Reina, Rodríguez Rodríguez *y* Tous Zamora *[984] (p. 273)—. En principio, los factores se consideran de igual relevancia. La meta es definir un orden en las tareas, según su importancia relativa. Esto se hará en base a la valoración de las tareas que haga un grupo de expertos. Aunque según muchos autores, el método más popular para valorar tareas es el de valoración por puntos —cfr. v. gr.* Aguirre de Mena *et alii [984] (pp. 270-274), se piensa usar valores lingüísticos. Para ello se dispone de un conjunto de siete etiquetas lingüísticas que pueden ser interpretadas como grados para cada subfactor:* $\mathcal{L}([0,1]) = \{$*ninguna, escasa, mejorable, normal, notable, sobresaliente, óptima*$\}$.

Factores pertinentes para la valoración de tareas	
Habilidad (F_1)	**Esfuerzo** (F_3)
Formación	Físico
Experiencia	Mental
Iniciativa e ingenio	
Responsabilidad (F_2)	**Condiciones** (F_4)
Equipo y proceso	Trabajo
Material o producto	Riesgos inevitables
Seguridad de otros	

Tabla 8.7: *Factores y subfactores de valoración positiva para la tarea de valorar tareas.*
—Fuente: Aguirre de Mena, Andrés Reina, Rodríguez Rodríguez y Tous Zamora [984] (p. 273).

Observemos que cada factor es un subconjunto borroso de tipo 2 del conjunto de sus subfactores. Así, por ejemplo, para una tarea t, la valoración proporcionada por un experto ϵ puede haber sido el que se muestra en la Tabla 8.8, o abreviadamente:

$$\textsc{Habilidad}(t)\,|\epsilon = \textsf{mejorable}\diagup\textsc{Formación} + \textsf{notable}\diagup\textsc{Experiencia} + \textsf{normal}\diagup\textsc{Iniciativa}$$

De este modo podemos comparar las tareas por factores (comparación de conjuntos borrosos de tipo 2).

Para cada experto ϵ, la valoración de una tarea t se define como un subconjunto borroso $\textsc{Valoración}(t)\,|\epsilon$ de tipo 2, porque el valor asignado a cada referente es lingüístico: e_L, e'_L, e''_L y e'''_L. Ahora bien, estos referentes (*v. gr.* Habilidad) son a su vez conjuntos borrosos de tipo 2; por ello, el conjunto borroso de tipo 2 $\textsc{Valoración}(t)\,|\epsilon$ que representa la valoración de una tarea t por cada experto ϵ, es, a la vez, un subconjunto borroso de nivel 2.

$$\textsc{Valoración}(t)\,|\epsilon = e_L\diagup\textsc{Habilidad} + e'_L\diagup\textsc{Responsabilidad} + e''_L\diagup\textsc{Esfuerzo} + e'''_L\diagup\textsc{Condiciones}$$

[13] «El sistema de Kimmel, por ejemplo, toma en consideración dieciséis factores: 1) Educación, asignando el valor 10 al puesto que requiera el conocimiento de matemáticas superiores, y el valor 2 al que sólo requiera saber leer y escribir. 2) Experiencia, asignando el valor 30 cuando la que se requiere en ese puesto ha de ser superior al año, y el valor 6 cuando ha de ser mínima. 3) Aprendizaje necesario. 4) Esfuerzo mental que requiere el puesto. 5) Esfuerzo físico, dividiéndolo en diversos grados y puntuándolos convenientemente. 6) Condiciones generales de trabajo, entre las que distingue temperaturas anormales, humedad excesiva, deslumbramiento, suciedad, ruido, nocturnidad, etc., valorándolos según su condición. 7) Riesgo, graduándolo entre muy elevado y bajo. 8) Responsabilidad sobre los equipos industriales con que cuenta el puesto, graduándola con arreglo al valor intrínseco de aquéllos. 9) Responsabilidad sobre el material, graduándola según el importe o valor de la pieza o pedido que se perdería si se realizara un trabajo defectuoso. 10) Responsabilidad de mando, valorándola con arreglo al número de hombres que dependen del puesto de trabajo. 11) Complejidad de la función a realizar. 12) Efecto o repercusión que esta función tiene sobre las inmediatas. 13) Necesidad de atención a las instrucciones, teniendo en cuenta si basta con que sean verbales, o si deben interpretarse planos, fichas de trabajo, etc. 14) Necesidad de conocer las operaciones de los puestos de trabajo contiguos. 15) Habilidad manual. 16) Necesidad de actuar en coordinación con otros puestos.» —*cfr.* Pérez Sabat [983] (p.1124).

	HABILIDAD$(t)\,|\epsilon$		
	FORMACIÓN	EXPERIENCIA	INICIATIVA E INGENIO
ninguna	0	0	0
escasa	0	0	0
mejorable	1	0	0
normal	0	0	1
notable	0	1	0
sobresaliente	0	0	0
óptima	0	0	0

Tabla 8.8: *El conjunto borroso* HABILIDAD, *de tipo 2.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

Al considerar múltiples expertos, y como cada experto asigna a cada subfactor, una única etiqueta —equivalente a un subconjunto nítido unitario de $\mathcal{L}([0,1])$—, entonces, para la totalidad de los expertos se genera un subconjunto probabilístico de $\mathcal{L}([0,1])$. Podemos trabajar, en este caso, con la función de pertenencia valor medio normalizada, viendo así como la totalidad de expertos asigna a cada subfactor, un subconjunto borroso de $\mathcal{L}([0,1])$ —*cfr.* Tabla 8.9—. La realidad es, pues, que los subfactores son subconjuntos borrosos de $\mathcal{L}([0,1])$, por lo que cada factor, además de ser un subconjunto borroso de tipo 2 de los subbfactores, es también un subconjunto de nivel 2 de ellos.

	HABILIDAD$(t)\,|\epsilon$		
	FORMACIÓN	EXPERIENCIA	INICIATIVA E INGENIO
ninguna	.1	0	0
escasa	.5	.1	.1
mejorable	1	.3	.4
normal	.7	.8	1
notable	.2	1	.9
sobresaliente	0	.3	.3
óptima	0	0	0

Tabla 8.9: *Usando subconjuntos borrosos de* $\mathcal{L}([0,1])$.
—*Fuente:* Elaboración propia.

Obviamente, puede que al evaluar el desempeño de un individuo, un experto, en vez de utilizar una etiqueta lingüística —equivalente a un subconjunto nítido unitario de $\mathcal{L}([0,1])$—, prefiera usar un subconjunto borroso de $\mathcal{L}([0,1])$ —*cfr.* Tabla 8.9.

Es clásica la introducción de pesos indicadores de la importancia relativa de los factores. Por ejemplo, una encuesta en Estados Unidos de la *National Industrial Conference Board* proporcionó los siguientes: HABILIDAD (0.5), RESPONSABILIDAD (0.25), ESFUERZO (0.15) y CONDICIONES (0.1) —*cfr.* AGUIRRE DE MENA, ANDRÉS REINA, RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ y TOUS ZAMORA [984] (p. 272).

8.15 Ejemplo ilustrativo: Elección de *Xs*: un problema multi-criterio, multi-subcriterio, multi-experto y multi-*X*

[...] un trabajo específico de distinción que el nuevo intelectual va a sentir como una necesidad, al estar obligado a luchar por la apropiación de los "signos distintivos" de su profesión. Es decir, a disputar el poder de clasificar, de distribuir y de dividir —en una palabra, de ver y hacer ver el mundo—, mediante la valoración de su competencia técnica y la estimación de la práctica que ejerce y de su objeto de estudio.»
—Pierre BOURDIEU [985] (pp. 271-287), *via* Antonio SERRANO GONZÁLEZ [986] (p. 64)

Según George J. KLIR y Bo YUAN [46], la aproximación más frecuente para resolver un problema multicriterio borroso es mediante su conversión en un problema de decisión borroso con un solo criterio. Tras explorar dos vías: reducción de muchos criterio a uno y reducción de muchos expertos a uno, concluiremos con nuestra propuesta de algoritmo de elección del X mejor valorado.

8.15.1 De muchos criterios a uno: alternativas borrosas y ponderaciones numéricas

Supongamos que cada alternativa A se describe como un subconjunto borroso del conjunto $\mathcal{C}$ de criterios. Supongamos que son conocidas las prioridades entre criterios, esto es, sus importancias relativas[14], y que vienen dadas por valores numéricos $w_C \in \mathbb{R}$. Ronald R. YAGER [987] propone calcular la puntuación unitaria correspondiente a la alternativa A como:

$$\mathrm{PU}(A) = \min_{C \in \mathcal{C}} \{(A(C))^{w_C}\} \tag{8.1}$$

donde w_C es la importancia relativa o prioridad correspondiente al criterio C.

En 1994, YAGER [989] generaliza la propuesta anterior (que data de 1978). Si Aggr es una operación de agregación —*cfr.* §69—, y $A(C)$ indica el grado en el que A satisface el criterio C, entonces la agregación ponderada es:

$$\underset{C \in \mathcal{C}}{\mathrm{Aggr}}(g(w_C, A(C))) \tag{8.2}$$

donde $g(w,x)$ es monótona creciente en x, monótona en w, $g(0,x) = id_{\mathrm{Aggr}}$ y $g(1,x) = x$, siendo id_{Aggr} un elemento identidad para la operación agregación, esto es, si lo agregamos junto a nuestros agregados, el resultado no cambia.

El caso anterior es evidentemente $g(w,x) = x^w$.

8.15.2 De muchos criterios a uno: caso de alternativas borrosas de tipo 2 y ponderación borrosa

Supongamos que cada alternativa A se describe como un subconjunto borroso de tipo 2 del conjunto $\mathcal{C}$ de criterios. Supongamos que son conocidas las prioridades entre criterios, esto es, sus importancias relativas, y que vienen dadas por valores lingüísticos w_C pertenecientes a un cierto conjunto de términos.

En este caso, YAGER [990] define la puntuación unitaria (*unit score*) para cada alternativa y cada experto como:

$$\mathrm{PU}(A)\,|\epsilon = \min_{C \in \mathcal{C}} \{\mathcal{N}(w_C) \vee A(C)\} \tag{8.3}$$

donde w_C indica la importancia del criterio C.

$\mathrm{PU}(A)\,|\epsilon$ puede interpretarse como una medida del grado en que la alternativa A satisface la afirmación: «Se satisfacen todos los criterios que se consideran importantes»[15]. Usualmente —en la propuesta original de YAGER es así—, w_C es una etiqueta lingüística de un conjunto de términos establecido, por lo que la acción de la negación $\mathcal{N}(w_C)$ origina su opuesta en la escala. Por ejemplo, si:

$$\mathcal{L}([0,1]) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ninguna (N),} \\ \text{Muy Baja (MB),} \\ \text{Baja (B),} \\ \text{Media (M),} \\ \text{Alta (A),} \\ \text{Muy Alta (MA),} \\ \text{Excelente (E)} \end{array} \right\} \tag{8.4}$$

[14]Ronald R. YAGER [987] sugiere aproximar estas importancias relativas (o prioridades) de los factores, agregando las opiniones de los expertos, mediante el **método de jerarquía analítica** (*Analytic Hierarchy Process* –AHP) de Thomas L. SAATY [988].

[15]La idea que subyace en esta interpretación de $\mathrm{PU}(A)\,|\epsilon$ es la misma que en la definición del indicador de inclusión de Isabelle BLOCH —*cfr.* Ec. 4.81—, del conjunto borroso w_C en el conjunto borroso A, a saber, el concepto, clásico y borroso, de implicación como inclusión. Recuérdese, además, la tautología bien conocida de la lógica bivalente: $p \to q \equiv \neg p \vee q$. La propuesta de YAGER expresa el grado en que la alternativa A satisface dicha afirmación, en cuanto satisface, para cada criterio, que «si, para todo criterio C, w_C es importante entonces A se satisface», o dicho de otro modo, «los criterios no son importantes o se satisface».

entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathsf{N}) &= \mathsf{E}\\ \mathcal{N}(\mathsf{MB}) &= \mathsf{MA}\\ \mathcal{N}(\mathsf{B}) &= \mathsf{A}\\ \mathcal{N}(\mathsf{M}) &= \mathsf{M}\\ \mathcal{N}(\mathsf{A}) &= \mathsf{B}\\ \mathcal{N}(\mathsf{MA}) &= \mathsf{MB}\\ \mathcal{N}(\mathsf{E}) &= \mathsf{N}\end{aligned}$$

siendo bastante frecuente indicar por una etiqueta numérica su posición; por ejemplo, $L_1 = \mathsf{N}$, $L_2 = \mathsf{MB}$, $L_3 = \mathsf{B}$, $L_4 = \mathsf{M}$, $L_5 = \mathsf{A}$, $L_6 = \mathsf{MA}$ y $L_7 = \mathsf{E}$.

Ejemplo 143 *Consideremos el perfil del candidato anónimo A_1 —cfr. Tabla 8.10—, elaborado por el experto ϵ. La importancia de cada criterio w_{C_k} es la misma para todos los expertos.*

Candidato: Anónimo A_1; Experto: ϵ		
Criterios	Importancia (w_{C_k})	Valoración ($A_1(C_k)$)
Experiencia (C_1)	MA	M
Factores intelectuales (C_2)	A	MA
Aptitudes específicas (C_3)	MA	E
Factores de personalidad (C_4)	M	B
Comportamiento social (C_5)	B	B

Tabla 8.10: *Ejemplo de perfil asignado por un experto concreto a un candidato determinado.*
—Fuente: Elaboración propia.

La puntuación unitaria del candidato A_1, según el experto ϵ, es:

$$\begin{aligned}\mathrm{PU}(A_1)\,|\epsilon &= \min\{\mathcal{N}(\mathsf{MA}) \vee \mathsf{M},\ \mathcal{N}(\mathsf{A}) \vee \mathsf{MA},\ \mathcal{N}(\mathsf{MA}) \vee \mathsf{E},\ \mathcal{N}(\mathsf{M}) \vee \mathsf{B},\ \mathcal{N}(\mathsf{B}) \vee \mathsf{B}\}\\ &= \min\{\mathsf{MB} \vee \mathsf{M},\ \mathsf{B} \vee \mathsf{MA},\ \mathsf{MB} \vee \mathsf{E},\ \mathsf{M} \vee \mathsf{B},\ \mathsf{A} \vee \mathsf{B}\}\\ &= \min\{\mathsf{M},\ \mathsf{MA},\ \mathsf{E},\ \mathsf{M},\ \mathsf{A}\}\\ &= \mathsf{M}\end{aligned}$$

La valoración de una alternativa A se representa como el conjunto de puntuaciones unitarias de los expertos:

$$\mathrm{PU}(A) = \{\mathrm{PU}(A)\,|\epsilon : \epsilon \in \mathcal{E}\} \tag{8.5}$$

por lo que el problema ha quedado reducido a uno de un sólo criterio bajo múltiples expertos.

8.15.3 Agregación de las opiniones de diferentes expertos de similar relevancia

Para cada alternativa, la agregación de las opiniones de todos los expertos podría efectuarse mediante un operador OWA —*cfr. supra* Def. 70—. Previamente debe elegirse una operación de agregación Q —*cfr. supra* Def. 69—, donde, para todo $k = 0, 1, ..., |\mathcal{E}|$, $Q(k; A)$ sea indicadora de la satisfacción global conseguida al estar k expertos satisfechos con la alternativa A.[16]

Por ejemplo, si q es el cardinal de $\mathcal{L}([0, 1])$ y r el del conjunto de expertos $\mathcal{E}$, entonces, dada la alternativa A, la función que emula la media es:

$$Q_{\mathrm{med}}(k; A) = L_{b(k)} \tag{8.6}$$

[16] Tal función Q debería verificar:

- ser creciente, esto es, a mayor número de expertos satisfechos, mayor satisfacción global;
- alcanzar el máximo en $|\mathcal{E}|$, o sea cuando estén satisfechos todos los expertos;
- si se requiere que al menos n expertos estén satisfechos, entonces: $Q(i; A) = \{\mathsf{nada},\ \text{si } i < n;\ \mathsf{óptima},\ \text{si } i \geq n\}$.

donde $b(k) = \lceil 1 + \frac{k}{r}(q-1) \rceil$, para $k = 0, 1, ..., r$. Obsérvese que independientemente de q y r, $Q_{\text{med}}(0; A) = L_1$ y $Q_{\text{med}}(r; A) = L_q$.

Una vez elegida la operación de agregación Q, podrá utilizarse OWA. Los elementos de $\text{PU}(A)$ se disponen en orden decreciente, y si notamos B_k el k-ésimo elemento en el orden, entonces, la valoración global de un aspirante al puesto se define por:

$$\text{Valoración}(A) \,|\mathcal{E} = \max\{Q(k; A) \wedge B_k : k = 0, 1, ..., r\}\ . \tag{8.7}$$

Como se ve, el resultado es una etiqueta lingüística, $\text{Valoración}(A) \,|\mathcal{E} \in \mathcal{L}([0,1])$, por lo que el orden viene dado de una forma natural por su significado.

Ejemplo 144 *Supongamos que 5 expertos han proporcionado las siguientes puntuaciones unitarias, según lo expuesto en el apartado anterior §8.15.2, para el candidato anónimo A_1:*

$$\text{PU}(A_1 \,|\, \mathcal{E}) = \{\mathsf{M},\ \mathsf{MA},\ \mathsf{A},\ \mathsf{M},\ \mathsf{A}\}$$

entonces:

$$\begin{aligned} B_1(A_1 \,|\, \mathcal{E}) &= \mathsf{MA} \\ B_2(A_1 \,|\, \mathcal{E}) &= \mathsf{A} \\ B_3(A_1 \,|\, \mathcal{E}) &= \mathsf{A} \\ B_4(A_1 \,|\, \mathcal{E}) &= \mathsf{M} \\ B_5(A_1 \,|\, \mathcal{E}) &= \mathsf{M} \end{aligned}$$

Suponiendo que la función de agregación elegida sea Q_{med}, entonces, como $r = 5$ y $q = 7$, obtenemos:

$$\begin{aligned} Q_{\text{med}}(1 \,|\, A_1, \mathcal{E}) &= L_3 = \mathsf{B} \\ Q_{\text{med}}(2 \,|\, A_1, \mathcal{E}) &= L_4 = \mathsf{M} \\ Q_{\text{med}}(3 \,|\, A_1, \mathcal{E}) &= L_5 = \mathsf{A} \\ Q_{\text{med}}(4 \,|\, A_1, \mathcal{E}) &= L_6 = \mathsf{MA} \\ Q_{\text{med}}(5 \,|\, A_1, \mathcal{E}) &= L_7 = \mathsf{E} \end{aligned}$$

De manera que el candidato anónimo A_1 obtiene una valoración Alta (A), por la comisión de expertos $\mathcal{E}$, usando la función de agregación Q_{med}:

$$\begin{aligned} \text{Valoración}(A_1 \,|\, \mathcal{E}, Q_{\text{med}}) &= \max\{\mathsf{B} \wedge \mathsf{MA}, \mathsf{M} \wedge \mathsf{A}, \mathsf{A} \wedge \mathsf{A}, \mathsf{MA} \wedge \mathsf{M}, \mathsf{E} \wedge \mathsf{M}\} \\ &= \max\{\mathsf{B}, \mathsf{M}, \mathsf{A}, \mathsf{M}, \mathsf{M}\} \\ &= \mathsf{A} \end{aligned}$$

8.15.4 Una propuesta de algoritmo de estimación del X mejor valorado

Sobre teoría de la decisión borrosa multicriterio pueden consultarse las monografías de Ching-Lai Hwang y Paul Yoon [991], Chen y Hwang [992], Slowinski y Teghem [993], y János C. Fodor y Marc Roubens [994]. Según Klir y Yuan [46], la aproximación más frecuente para resolver un problema multicriterio borroso es mediante su conversión en un problema de decisión borroso con un solo criterio. En la propuesta que hacemos, éste es el último paso, pues es previa la agregación de la información de los diferentes expertos. La razón es que debemos hacer que la entropía de un sistema caiga cuanto más tarde mejor. Entropía como información; en otras palabras, los cálculos siempre han de hacerse con la mayor información disponible. Pensamos que podemos considerar que la información que aportan diferentes expertos, sobre un mismo tema, es más similar que la información que aportan los diferentes criterios. Por ello, primero «perdemos» la pluralidad de la información procedente de los expertos, y posteriormente la relativa a los criterios.

Una noción previa que debemos conocer para entender las etapas finales del método que proponemos, es el concepto de valor puntual de un conjunto borroso.

Definición 145 *Sea $\mathcal{U}$ un universo finito de discurso no vacío, numérico, que sirva como espacio de valoración (appraisal space) y sea $A \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$. Ronald R. Yager [995](II) define el **valor puntual** de A como:*

$$\text{PV}(A) = \frac{1}{A_{\max}} \sum_{l=1}^{L} (\alpha_l - \alpha_{l-1})\, M(^{\alpha}A) \tag{8.8}$$

donde $A_{\max}$ denota el mayor valor de pertenencia de A, o sea, $A_{\max} = \max\{A(u) : u \in \mathcal{U}\}$, L es el cardinal de $\Lambda(A)$ —cfr. Def. 4.22—, $\alpha_0 = 0$ y $M(^{\alpha}A)$ es el valor medio de los elementos de $^{\alpha}A$, calculado como su media aritmética.

El **algoritmo de estimación del X mejor valorado** que proponemos consta de los pasos siguientes:

Paso 1: Agregar los subfactores hallando la función de pertenencia valor medio, esto es, el *conjunto borroso medio* —*cfr.* §4.4— respecto de todos los $\epsilon \in \mathcal{E}$. Este sería pues el estimador que elegimos para $\textsc{Habilidad}(t)\,|\mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de expertos. Las nuevas etiquetas lingüísticas se definen como el *conjunto borroso medio*, esto es, sea cual sea $e_L \in \mathcal{L}([0,1])$, y dados los expertos $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} e_L(\{\epsilon_1,\epsilon_2\})(u) &= \left(\frac{e_L(\epsilon_1)+e_L(\epsilon_2)}{2}\right)(u) \\ &= \frac{e_L(\epsilon_1)(u)+e_L(\epsilon_2)(u)}{2} \end{aligned} \tag{8.9}$$

Por ejemplo, dados los expertos $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathcal{E}$, si $\textsc{Habilidad}(t)\,|\epsilon_1 = \mathsf{escasa}/\textsc{Formación}+$ y $\textsc{Habilidad}(t)\,|\epsilon_2 = \mathsf{normal}/\textsc{Formación}+$, entonces, $\textsc{Habilidad}(t)\,|\{\epsilon_1,\epsilon_2\}$ es el conjunto borroso de tipo 2:

$$\textsc{Habilidad}(t)\,|\{\epsilon_1,\epsilon_2\} = \left(\frac{\mathsf{escasa}+\mathsf{normal}}{2}\right)/\textsc{Formación} + \ldots$$

Paso2: Dada una tarea t, su valoración por un experto $\textsc{Valoración}(t)\,|\epsilon$ es un conjunto borroso, por lo que podemos agregar todas las valoraciones, procedentes de los diferentes expertos, también mediante la función de pertenencia valor medio, esto es, el **conjunto borroso medio** —*cfr.* §4.4— respecto de todos los $\epsilon \in \mathcal{E}$. Este sería pues el estimador que elegimos para $\textsc{Valoración}(t)\,|\mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de expertos. Por ejemplo, dados los expertos $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathcal{E}$, si:

$$\begin{aligned} \textsc{Valoración}(t)\,|\epsilon_1 &= e_L(\epsilon_1)/\textsc{Habilidad}(t)\,|\epsilon_1 \\ &+ e'_L(\epsilon_1)/\textsc{Responsabilidad}(t)\,|\epsilon_1 \\ &+ e''_L(\epsilon_1)/\textsc{Esfuerzo}(t)\,|\epsilon_1 \\ &+ e'''_L(\epsilon_1)/\textsc{Condiciones}(t)\,|\epsilon_1 \end{aligned}$$

y:

$$\begin{aligned} \textsc{Valoración}(t)\,|\epsilon_2 &= e_L(\epsilon_2)/\textsc{Habilidad}(t)\,|\epsilon_2 \\ &+ e'_L(\epsilon_2)/\textsc{Responsabilidad}(t)\,|\epsilon_2 \\ &+ e''_L(\epsilon_2)/\textsc{Esfuerzo}(t)\,|\epsilon_2 \\ &+ e'''_L(\epsilon_2)/\textsc{Condiciones}(t)\,|\epsilon_2 \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \textsc{Valoración}(t)\,|\{\epsilon_1,\epsilon_2\} &= e_L(\{\epsilon_1,\epsilon_2\})/\textsc{Habilidad}(t)\,|\{\epsilon_1,\epsilon_2\} \\ &+ e'_L(\{\epsilon_1,\epsilon_2\})/\textsc{Responsabilidad}(t)\,|\{\epsilon_1,\epsilon_2\} \\ &+ e''_L(\{\epsilon_1,\epsilon_2\})/\textsc{Esfuerzo}(t)\,|\{\epsilon_1,\epsilon_2\} \\ &+ e'''_L(\{\epsilon_1,\epsilon_2\})/\textsc{Condiciones}(t)\,|\{\epsilon_1,\epsilon_2\} \end{aligned}$$

Así, Valoración también cae dentro de la categoría de conjuntos borrosos de nivel 2, pues sus referentes, *v. gr.* Habilidad, son subconjuntos borrosos (de tipo 2).

Los siguientes pasos del algoritmo se encargarán de eliminar la borrosidad procedente de la multiplicidad de criterios.

Paso 3: Para cada factor, calcular los valores puntuales de sus valores borrosos de pertenencia;

Paso 4: Calcular el valor puntual de cada factor;

Paso 5: Calcular los valores puntuales: $\mathrm{PV}(e_L), \mathrm{PV}(e'_L), \mathrm{PV}(e''_L), \mathrm{PV}(e'''_L) \in \mathcal{L}([0,1])$, convirtiendo así $\textsc{Valoración}(t)\,|\mathcal{E}$ en un conjunto borroso de nivel 2 —que notaremos $\textsc{Valoración}_{\mathrm{PV}}(t)\,|\mathcal{E}$— definido sobre referentes que son conjuntos borrosos (de tipo 2);

Paso 6: Calcular el valor puntual de $\text{Valoración}_{\text{PV}}(t)\,|\mathcal{E}$. Obtendremos un valor numérico (asociado a la tarea t y al conjunto de expertos $\mathcal{E}$).

Paso 7: Estimar la tarea con una mayor valoración como:

$$\hat{t} = \arg\max_{t} \text{PV}(\text{Valoración}(t)\,|\mathcal{E}\,) \tag{8.10}$$

Observación 146 ***(Expertos de desigual relevancia)*** *En nuestra propuesta, la posible distinta relevancia, experiencia, consideración o confianza en los expertos, puede expresarse mediante una distribución no uniforme de índices ponderales sobre el conjunto $\mathcal{E}$ de expertos. Respecto del esquema que hemos propuesto, la diferencia estriba en que, en vez de usar el conjunto borroso medio, se implementaría usando el* ***conjunto borroso medio ponderado****:*

$$e_L(\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\})(u) = \lambda_1 e_L(\epsilon_1)(u) + ... + \lambda_n e_L(\epsilon_n)(u) \tag{8.11}$$

con $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$.

8.16 Estudio ilustrativo: Comunicación del resultado de la evaluación



El proceso de elección de candidatos debe ser transparente. Debemos potenciar la comunicación abierta, interna y externa, de modo que sea prácticamente imposible justificar lo injustificable o diseñar procedimientos para justificar lo que ansiamos justificar. Esta comunicación debe ser en red, esto es, en múltiples direcciones, sean las clásicas verticales descendentes (jerárquicas), verticales ascendentes (desde los subordinados), horizontales (entre compañeros) y diagonales (interdepartamentales). En esta sección, hablamos de actos de comunicación interpersonal y de los espacios de intersubjetividad que ellos originan, centrándonos en los correspondientes a la comunicación del resultado de la evaluación.

8.16.1 Algo sobre comunicación

«"Comunicar" es equivalente a "transmitir", pero en toda transmisión cabe distinguir un contenido informativo y una intención persuasiva acompañante de dicha información. Por consiguiente, en la finalidad de toda comunicación está implícito el deseo de influir. La comunicación se presenta, pues, distinta de la mera información, dado que incluye la idea de cambio (Bullaude, 1968: 94).»
—Jaime Sarramona [996] (pp. 139-140). Se refiere a J. Bullaude [997]

No es posible negar que un proceso de elección de un candidato es un proceso de interacción personal, inmerso en un ámbito de comunicación. La administración no sólo es para las personas, sino administración con personas.

Aunque usaremos la palabra comunicación en un sentido muy amplio, de forma que incluya todos los procesos por los cuales una mente puede afectar a otra, nos centraremos en la comunicación del lenguaje, tanto oral como escrito.

En comunicación se pueden distinguir problemas a tres niveles: *técnico*, *semántico* y *de influencia o efectividad*.

Los **problemas técnicos** se refieren a la exactitud de la transmisión de la información del emisor al receptor. Son inherentes a todas las formas de comunicación.

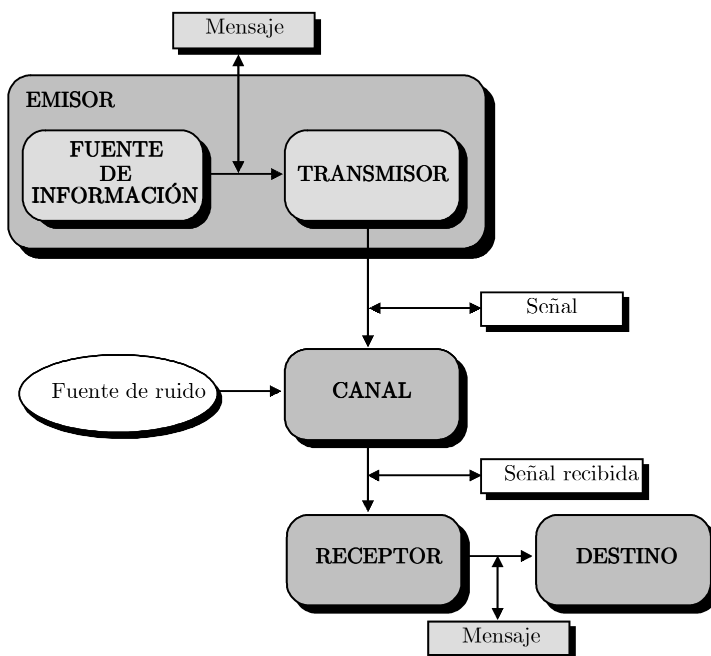
Los **problemas semánticos** se refieren a la interpretación del significado por el receptor, en cuanto que este significado se compara con el pretendido por el emisor. Esto es una situación muy profunda y complicada, incluso cuando se trata solamente de los problemas, aparentemente simples, de la comunicación a través del lenguaje. Por ejemplo, si B sospecha que no entiende lo que A dice, entonces, no es posible, haciendo que A no haga otra cosa mas que hablar con B, clarificar esta situación en un tiempo finito. Si A dice: «¿Me entiende ahora?», y B dice: «Sí.», no quiere decir que se haya logrado el entendimiento. El sujeto B, simplemente, puede haber «creído entenderlo». Esta dificultad de entendimiento, en el lenguaje, puede reducirse a un tamaño tolerable, pero nunca puede eliminarse completamente mediante «explicaciones» —*cfr.* Weaver[998].

Los **problemas de influencia o efectividad** se refieren al éxito con el cual se transmite el significado al receptor y que conduce al comportamiento deseado por su parte. Es evidente que, aunque pueda parecer en principio indeseablemente estricto el propósito de que toda comunicación consista en influir sobre la conducta del receptor, es precisamente nuestro caso. La meta de la comunicación organización–candidato es ésa. La organización tratará de influir en el candidato y viceversa, el candidato tratará de influir en la organización.

* * *

Se pueden distinguir **cinco elementos** básicos en todo acto de comunicación: *emisor*, *receptor*, *lenguaje*, *mensaje* y *canal*. El papel básico de emisor tras un proceso de elección, lo asume la organización, y decimos básico, porque puede que la respuesta del candidato, tras conocer el resultado, sorprenda a la organización, pasando ésta al papel de receptor, o creándose la posibilidad de un diálogo.

De este modo, según W. Weaver [998], todo sistema de comunicación se puede esquematizar, básicamente, como muestra la siguiente figura:



Sistema de comunicación. Presenta los cinco elementos básicos en todo acto de comunicación: emisor, receptor, lenguaje, mensaje y canal. —*Fuente:* Weaver [998]

Expliquemos sucintamente dicho esquema. La *fuente de información*, el cerebro de la persona que comunica, elige un *mensaje* deseado entre un conjunto de mensajes posibles. El *transmisor* —sistema vocal—, transforma este mensaje en una *señal* que se envía, a través del *canal* de comunicación —aire—, al *receptor* —sistema auditivo—. Este es una especie de transmisor invertido que transforma la *señal recibida* de nuevo, convirtiéndola en un mensaje y entregando este mensaje a su *destino* —cerebro del oyente.

La *fuente de ruido*, a la que hace referencia el esquema, corresponde, en el caso de la comunicación del lenguaje, a un «ruido semántico», esto es, las posibles distorsiones de significado introducidas por la fuente de información, que no son pretendidas, pero que sin embargo, afectan al destinatario.

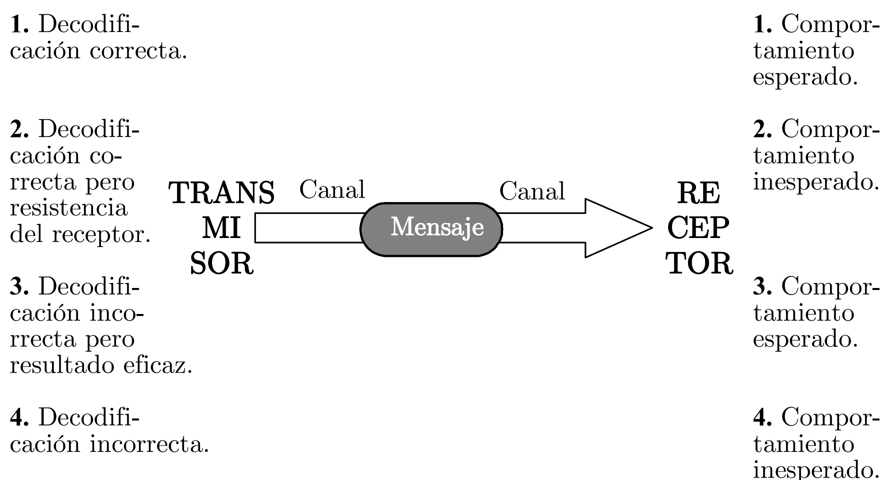
Hay que añadir, que al igual que existe ese «ruido semántico», también ha de tenerse en cuenta al «receptor semántico». Esto es, el cerebro del oyente somete al mensaje, ya descifrado por su sistema auditivo, a un segundo desciframiento, requiriéndose en este caso que haya de compararse las características semánticas del mensaje con la capacidad semántica de la totalidad de receptores que constituye la audiencia a la que uno desea influir —caso de una comunicación abierta a todos los candidatos o a toda la organización—. En otras palabras, el nivel con que el comunicante transmite su mensaje debe adaptarse al nivel de sus oyentes. De aquí, que como decíamos al hablar de la fuente de información, la elección del mensaje es fundamental para conseguir el entendimiento mutuo.

Por otro lado, todo mensaje es un conjunto de símbolos, que tendrán un significado propio por sí mismos, o por grupos dependientes o independientes. No hay que olvidar, pues, que el receptor posee «memoria», de tal forma, que el desciframiento de cada símbolo está condicionado por el desciframiento de los símbolos anteriores en el mensaje, aun más, por el desciframiento de los mismos símbolos en comunicaciones precedentes.

Otro factor a tener en cuenta en la comunicación, lo sugiere el hecho de que el error y la confusión surgen y la fidelidad decrece cuando se intenta transmitir una gran cantidad de información en un mismo mensaje. Puede que estemos sobrevalorando la capacidad de la audiencia.

* * *

Una vez constatados los resultados de la comunicación, pueden resultar cuatro situaciones diferentes —*cfr.* Mallas [999], *via* Sarramona [996] (p. 142)—, según la decodificación del mensaje sea correcta o incorrecta; las muestra la siguiente figura:



El receptor puede presentar un comportamiento esperado o inesperado, tanto si la decodificación del mensaje ha sido correcta como si ha sido incorrecta.
—*Fuente:* Mallas [999]

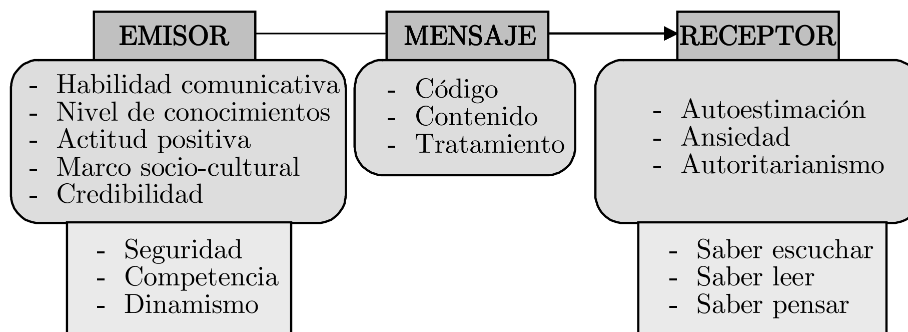
Para advertir la eficacia de la comunicación, es preciso añadir algún tipo de control, que compare los logros con los significados pretendidos. Puede que tal control no se limite a la constatación de los resultados sino que condicione acciones posteriores del emisor, retroalimentando el sistema.

En esta línea se sitúa el supuesto de respuesta que proponemos en la Sección §8.16.3, cuando el candidato elegido —el receptor— duda y solicita tiempo para pensarlo. La organización deberá contestar —acción posterior del emisor— a esta duda. En la Sección §8.16.4, estudiamos el caso en que emisor y receptor se conozcan previamente y dispongan de información a priori. En ambos supuestos, extendemos las ideas de Ronald R. Yager al caso de respuestas Φ-borrosas, mediante aritmética de intervalos —*cfr.* §3.5—, considerando la extensión natural a intervalos de funciones reales factorizables —*cfr.* §3.6—. Por no extendernos en demasía, lo ilustramos con dos ejemplos —*cfr.* Ejemplos 147 y 148.

8.16.2 Actos de comunicación

El esquema que aparece en la siguiente figura, muestra los puntos fundamentales que destacan autores como David K. Berlo, James B. Lemert y Robert J. Mertz [1000] y Ronald L. Applbaum *et alii* (*vide infra*) [1001], en las conductas del emisor y del receptor, así como los factores que primordialmente influyen en la fidelidad

del mensaje —aplíquelo el lector, por ejemplo, a relaciones entre organización y trabajadores o candidatos a puestos, profesores y alumnos, o viceversa (permuta de papeles emisor–receptor), según crea oportuno.



Puntos fundamentales en las conductas del emisor y del receptor en todo acto de comunicación, así como los factores que influyen fundamentalmente en la fidelidad del mensaje.
—*Fuente:* Elaborado a partir de Berlo [1002], Berlo, Lemert y Mertz [1000] y Applbaum y otros [1001]

Según David K. Berlo [1002], el emisor debe disponer de:

a) Una *habilidad comunicativa* que le permita despertar el interés y fijar la atención de los receptores hacia el mensaje, el cuál debe ser adaptado al grado cultural o de conocimientos de los mismos.

En términos psicológicos, esto se entiende como habilidad para «sintonizar» con los demás. Parece ser que esto es advertido como una cualidad de primer orden por los receptores. No obstante la valoración definitiva de la habilidad comunicativa estará en función de la consecución o no de los propósitos iniciales de la comunicación, captación y entendimiento del mensaje.

b) Un *nivel de conocimientos* adecuado a lo que pretende comunicar: no se puede transmitir lo que no se sabe.

No obstante, no se puede olvidar que la importancia de los contenidos o de la forma de transmisión depende sobremanera de las características del receptor.

c) Una *actitud positiva* ante la comunicación; ésto puede traducirse en que el emisor debe sentir una satisfacción personal, pues de lo contrario puede proyectar en el acto de comunicación su propia insatisfacción.

La aceptación de sí mismo como emisor es el primer paso para lograr un equilibrio personal que permita desarrollar esta función con eficacia. Por tanto, otro punto a considerar es la imagen del emisor, tanto la que tiene de sí mismo, como la que pudiera tener un receptor de él.

No hay que olvidar que cuando por vez primera se encuentran un emisor y un receptor, éste lo que hace es, sobre todo, observar, consiguiendo así una serie de hipótesis sobre el «tipo» de emisor; más tarde, comprobará sus hipótesis. El receptor empleará los resultados de esta comprobación para orientar sus actitudes, comportamientos futuros y posibles respuestas a mensajes o propuestas del emisor.

El emisor debe ser realista, debe estar preparado para admitir que no siempre conoce las respuestas. Esto evitará dificultades, y ayudará a crear un ambiente aplaciente, de una especie de orden negociado, en pos de una relación de trabajo.

Habrá receptores inmaduros, incapaces de distinguir, de evaluar a una persona. Así, el emisor será para ellos duro o blando. De los receptores maduros, procurará el emisor que le vean como una persona que en realidad intenta ayudarles. Pero deberá tener en cuenta que el comportamiento de la masa suele ser, a veces, pueril —aunque no lo sean los de los individuos.

No se puede ser un «pelele» en manos del receptor. Pero tampoco puede pretender el emisor que los receptores sean marionetas en las suyas. Es necesario establecer una relación basada en el respeto mutuo, pudiéndose conseguir, de este modo, que emisores y receptores llegasen a construir significados compartidos, organicen las reglas, y aprendan a vivir en un mundo unido, comprometiéndose en acciones de unidad.

Ese orden negociado que rige en la comunicación, no debiera verse alterado, sino por situaciones extremadamente puntuales. Tanto el emisor como el receptor deben admitir que están bajo una situación gobernada por unas reglas racionales y comprensibles, y que por tanto deben ser acatadas. Existen la educación, las buenas maneras y el sentido común.

d) *Referencia al marco socio-cultural.* No podemos olvidar que el ser humano es un ser social. Los actos de comunicación condicionan al hombre con la realidad socio-cultural en la que vive, y viceversa. De lo contrario, todo puede virar improvisada e infortunadamente para uno.

e) *Credibilidad* con la cual el emisor transmite su mensaje: [...] el efecto de la comunicación está influido por indicios acerca de las intenciones del emisor, experiencia y sinceridad. El mismo mensaje es juzgado más favorablemente cuando es comunicado por una persona de alta credibilidad que cuando lo hace una de baja credibilidad. No es realmente posible separar estos factores esenciales de credibilidad. Ellos aparecen interactuando y el producto de esas interacciones determina el nivel de credibilidad y su efecto en la situación comunicativa.» —*cfr.* APPLBAUM, ANATOL, HAYS, JENSON, PORTER y MANDEL [1001].

Ya hemos comentado antes cómo procuran conocerse ambas partes, emisor y receptor. Parece esencial la adquisición de un cierto carisma por parte del emisor. BERLO, LEMERT y MERTZ [1000] aislaron tres factores básicos del emisor para lograr credibilidad: *seguridad*, *competencia* y *dinamismo*, entendidos siempre como son advertidos por el receptor. De esta forma podríamos tener como cualidades fundamentales del emisor, madurez, competencia y convicción en los propios ideales.

Por otro lado, caben destacar los hábitos de saber escuchar, leer y pensar, que debe poseer el receptor. Ronald L. APPLBAUM *et alii* [1001], destacan tres puntos influyentes en la conducta de los receptores:

- *Autoestima*, es decir, el receptor debe tener confianza en sí mismo a la hora de apoyarse en su base de conocimientos tanto para descifrar cualquier mensaje que provenga del emisor, como para obtener nuevos resultados en su quehacer diario.

- *Ansiedad*, pero no en demasía, por conocer más. En general, esta actitud suele ser negativa y es resultado de un pasado en el que ha existido un profesor, sistema de educación, padres, o jefes, exigentes en demasía.

- *Autoritarianismo*; también es una actitud negativa. Aquí se entiende en el sentido de que el receptor pueda aceptar cuanto proceda de personas «investidas de autoridad», de que sus ideas dependan de las ideas ajenas, pudiendo llegar a anular la creación de ideas propias, por el mero hecho, como ya comentábamos, de creer en todo lo que diga el autorizado.

Una vez analizados el emisor y el receptor, no se puede olvidar el mensaje. Para David K. BERLO [1002], tres son los factores primordiales que condicionan la fidelidad del mismo:

- *El código.* Es la naturaleza del mensaje, la que en principio, condiciona el código a emplear, aunque puedan utilizarse varios a la vez: lingüístico, gráfico, gestual, etcétera. También pueden considerarse varias posibilidades de utilización del idioma, entendiendo ésto por los niveles distintos de utilización del mismo.

- *Contenido.* O sea, «qué transmitir». Por un lado, los contenidos del mensaje dependen directamente de los fines de los actos de comunicación. Por otro, en igualdad de propósitos, los contenidos han de estructurarse de manera adecuada, de modo que sean asequibles a la capacidad e intereses de los receptores. A veces, interesará plantear problemáticamente los contenidos, de modo que surja la crítica reflexiva y la creatividad.

- *Forma de tratamiento*, es decir, ¿cómo transmitir el mensaje? Es evidente que el tratamiento está en función de los objetivos del emisor y las características del receptor. Pensemos, por ejemplo, en la distinta forma de tratamiento que otorga el emisor a los contenidos cuando desea imponerlos sin reflexión (adoctrinamiento) o cuando espera la libre aceptación por parte del receptor.

8.16.3 Un ejemplo de análisis borroso del intercambio de mensajes Φ-borrosos

> *«Por ejemplo, un candidato en una entrevista de trabajo estará interesado en dejar una buena impresión en sus empleadores potenciales. A la par que aporta información a su entrevistador, tratará de detectar el efecto de cada bit de información de manera que presente su mejor imagen.»*
> —Ronald R. YAGER [1003] (p. 310)

Y lo mismo que dice Ronald R. YAGER en esta cita, es aplicable al revés: también se cuidará el representante de la organización de causar una buena impresión a su posible empleado.

En general, como ya hemos tenido oportunidad de comentar, el proceso de comunicación interpersonal consta de un amplio conjunto de señales que un individuo transmite a otro: palabras, tono de voz, posturas corporales, gestos, manera de vestir, etc.).

Los primeros **modelos borrosos** para describir la comunicación interpersonal, que conocemos, son de YAGER [1004, 1003]. La diferencia con los **modelos probabilísticos** —*cfr.* LUCE [1005], CHERRY [1006], RESTLE y GREENO [1007]—, según muchos, es notoria. Dicen que los modelos probabilísticos se basan en la *repetición.* Y este es el argumento principal que esgrimen los defensores a ultranza de la vía borrosa, al aducir la extrañeza de este factor para con la comunicación interpersonal.

Obviando la amplitud de miras de YAGER, nosotros nos centramos a continuación justamente en el **intercambio verbal** que se produce en el momento de comunicar el resultado del proceso de evaluación.

Consideremos la posibilidad de que el aspirante elegido pueda responder «sí», «no», o «déjeme un poco de tiempo para pensarlo». Es decir, que su respuesta sea un subconjunto unitario de $\mathfrak{P}(\mathfrak{a}_{\mathcal{A}})$, donde $\mathfrak{a}_{\mathcal{A}} = \{x_1, x_2, x_3\}$ es un conjunto *referencial de actitudes básicas*, siendo:

$x_1 \equiv$«sí»,

$x_2 \equiv$«no»,

$x_3 \equiv$«déjeme un poco de tiempo para pensarlo».

No obstante, su respuesta puede que no sea tan nítida; quizás responda algo como:

$A \equiv$«en este momento casi que no, ..., casi seguro que no,
aunque quizás si me deja un poco de tiempo para pensarlo, ...»

La incertidumbre presente en tal respuesta es claramente borrosa. Esta respuesta es un ejemplo del efecto *anáfora*, muy difundido en la comunicación interpersonal: las predicaciones poseen una enorme fluencia, influyéndose recíprocamente (reforzándose o debilitándose) —*cfr.* CASTILLA DEL PINO [1008] (p. 74). Observe el lector que nuestro ejemplo de respuesta comparte los efectos anáfora[17] y *catáfora*[18].

A modo de ejemplo —*cfr. infra* Ejemplo 147—, podríamos representar la respuesta A, quizás como un conjunto Φ-borroso:

$$A = [.1, .2]/x_1 + [.8, .9]/x_2 + [.4, .5]/x_3$$

Del mismo modo que el aspirante ha definido su respuesta en base a un referencial $\mathfrak{a}_{\mathcal{A}}$ de actitudes básicas («aceptar», «rechazar», «pedir tiempo para pensarlo»), la empresa, o en su caso el representante responsable del procedimiento de elección o clasificación, puede prever cómo contestar a la respuesta del aspirante, modelizándola como un subconjunto borroso definido en un referencial $\mathfrak{a}_{\mathcal{B}}$ de posibles actitudes básicas, por ejemplo, $\mathfrak{a}_{\mathcal{B}} = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$, con

$y_1 \equiv$«alegría»,

$y_2 \equiv$«pena»,

$y_3 \equiv$«sorpresa»,

$y_4 \equiv$«enojo»,

$y_5 \equiv$«paciencia»,

$y_6 \equiv$«impaciencia»,

$y_7 \equiv$«afecto».

La *fuerza* del mensaje se define —*cfr.* YAGER [1003]— como la altura de $A(x)$. Si $A(x)$ posee un único máximo (core $A = {}^1A$ es un conjunto unitario) se dice —*cfr.* GOGUEN [358]— que el mensaje es *ambiguo.* Cuanto mayor sea el soporte de A, mayor es la *generalidad* del mensaje —*cfr.* GOGUEN [358]—. Una mayor *precisión* del mensaje obviamente corresponde a una mayor fuerza, menor ambiguedad y menor generalidad. La *claridad* del mensaje A se corresponde con la distancia entre $\mathrm{h}(A)$ y el siguiente valor máximo —*cfr.* YAGER [1003].

Podemos definir una relación Φ-borrosa $R \subseteq \mathfrak{F}_\Phi(\mathfrak{a}_{\mathcal{A}} \times \mathfrak{a}_{\mathcal{B}})$, donde $R(y, x)$ indica el *grado de adecuación de la actitud básica* y como componente de una respuesta empresarial $B \in \mathfrak{F}_\Phi(\mathfrak{a}_{\mathcal{B}})$, con respecto a la actitud básica x como componente de una respuesta previa $A \in \mathfrak{F}_\Phi(\mathfrak{a}_{\mathcal{A}})$ dada por el aspirante, tras habérsele comunicado

[17] **Anáfora** (una de sus acepciones). *f.* Figura retórica que consiste en la repetición de una o más palabras al principio de frases, párrafos o versos sucesivos, con fines enfáticos o para procurar la simetría del todo.

[18] **Catáfora**. *f.* Anticipación de lo que va a venir en el discurso, a menudo realizada por medio de un demostrativo.

su elección. De este modo, la contrarrespuesta empresarial $B \in \mathfrak{F}_{\Phi}(\mathfrak{a}_{\mathcal{B}})$, puede ser modelada y «modulada» mediante un operador composicional $\circ$ de R y A [19]:

$$B = R \circ A \tag{8.18}$$

Con el siguiente ejemplo, ilustramos de qué manera extendemos estas ideas de YAGER al caso de respuestas Φ-borrosas, mediante aritmética de intervalos —*cfr.* §3.5—, considerando la extensión natural a intervalos de funciones reales factorizables —*cfr.* §3.6.

Ejemplo 147 *Imaginemos que la respuesta del aspirante ha sido:*
«en este momento casi que no, ...,
casi seguro que no,
aunque quizás si me deja un poco de tiempo para pensarlo, ...»

y que decidimos modelizarla por el conjunto Φ-borroso:

$$M = [.1, .2]/x_1 + [.8, .9]/x_2 + [.4, .5]/x_3 \tag{8.19}$$

Supongamos que la relación entre actitudes viene dada por la Tabla 8.11, entonces, la respuesta «max-min» —cfr. Ec. **??***— de la empresa se muestra en la Tabla 8.13, donde consideramos, como es habitual:*

$$\min(\langle a_0, a_1\rangle, \langle b_0, b_1\rangle) = \langle \min(a_0, b_0), \min(a_1, b_1)\rangle \tag{8.20}$$
$$\max(\langle a_0, a_1\rangle, \langle b_0, b_1\rangle) = \langle \max(a_0, b_0), \max(a_1, b_1)\rangle \tag{8.21}$$

La respuesta de la organización debería mostrar:

- *una* GRAN *«sorpresa»* $(B(y_3) = \langle .8, .9\rangle)$*,*
- BASTANTE *«pena»* $(B(y_2) = \langle .6, .7\rangle)$*,*
- *un* RELATIVO *«enojo»* $(B(y_4) = .5)$*,*

a la vez que algunos signos indicadores de:

- *una* CIERTA *«paciencia»* $(B(y_5) = \langle .4, .5\rangle)$*,*

[19] Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$, tres universos de discurso y $R \in \mathfrak{F}(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$ y $S \in \mathfrak{F}(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$ dos relaciones borrosas. La **composición** de R y S es una nueva relación borrosa, $R \circ S \in \mathfrak{F}(\mathcal{U} \times \mathcal{W})$, que podremos definir de múltiples formas. La «*composición sup-τ*» de R y S, que denotaremos $R \overset{\tau}{\circ} S$, está definida por —*cfr.* ZADEH [413]:

$$(R \overset{\tau}{\circ} S)(u, w) = \sup_{v \in \mathcal{V}} \tau(R(u, v), S(v, w)) \tag{8.12}$$

donde τ denota cualquier t-norma. Dada una relación borrosa $R \in \mathfrak{F}(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$, y un subconjunto borroso $x \in \mathfrak{F}(\mathcal{V})$, la «*regla composicional de inferencia sup-τ*», afirma que el subconjunto borroso $y \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$, inducido por x es —*cfr.* ZADEH [413]:

$$y = R \overset{\tau}{\circ} x \tag{8.13}$$

Si τ es la t-norma mínimo, entonces (8.12) es la «*regla composicional de inferencia de Zadeh*» —*cfr.* ZADEH [404]—. Esto tiene su precedente cuando GOGUEN [358] sugiere como solución general la convolución de R con x, y como solución particular:

$$y(u) = \sup_{v \in \mathcal{V}} (R(u, v) \star x(v)) \tag{8.14}$$

donde $\star$ es una operación binaria distributiva con respecto al supremo.

Con el resto de normas triangulares básicas no parametrizadas, o sea, con los operadores de composición *sup-producto* —*cfr.* KAUFMANN [698]—, *sup-producto_ acotado* y *sup-producto_ drástico* —*cfr.* MIZUMOTO [1009]—, se han obtenido buenos resultados en razonamiento aproximado —*cfr.* MIZUMOTO [1009, 1010].

En nuestro caso, la «composición sup-τ», está definida, para toda $y \in \mathfrak{a}_{\mathcal{B}}$:

$$B(y) = (R \overset{\tau}{\circ} A)(y) = \sup_{x \in \mathfrak{a}_{\mathcal{A}}} \tau(R(y, x), A(x)) \tag{8.15}$$

Citar finalmente, el *operador de composición inf-ω_τ* —*cfr.* KLIR y YUAN [46]:

$$(R \overset{\omega_\tau}{\circ} S)(u, w) = \inf_{v \in \mathcal{V}} \omega_\tau(R(u, v), S(v, w)) \tag{8.16}$$

donde τ es una t-norma continua y para todo $a, b \in [0, 1]$:

$$\omega_\tau = \sup\{x \in [0, 1] : \tau(a, x) \leq b\} \tag{8.17}$$

$R(y,x)$			
	x_1 «sí»	x_2 «no»	x_3 «tiempo para pensar»
y_1 ≡«alegría»	$[.9, 1]$	0	$[.2, .3]$
y_2 ≡«pena»	0	$[.6, .7]$	$[0, .1]$
y_3 ≡«sorpresa»	$[0, .1]$	$[.9, 1]$	$.25$
y_4 ≡«enojo»	0	$.5$	0
y_5 ≡«paciencia»	$[.1, .2]$	0	$[.9, 1]$
y_6 ≡«impaciencia»	0	$[.2, .3]$	$[.1, .2]$
y_7 ≡«afecto»	$[.9, 1]$	0	$[.9, 1]$

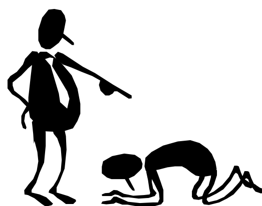
Tabla 8.11: *Ejemplo de relación Φ-borrosa $R \subseteq Y \times X$, donde $R(y,x)$ indica el grado de adecuación de la actitud básica y como componente de la respuesta empresarial, con respecto a la actitud básica x como componente de la respuesta previa dada por el aspirante, al habérsele comunicado su selección. (Es una relación condicionada a la preferencia de la empresa por el candidato.)*

Respuesta max-min de la organización: $B(y)$						
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
$\langle .2, .3\rangle$	$\langle .6, .7\rangle$	$\langle .8, .9\rangle$	$.5$	$\langle .4, .5\rangle$	$\langle .2, .3\rangle$	$\langle .4, .5\rangle$

Tabla 8.12: *Contestación max-min de la organización ante la respuesta del candidato. Los valores indican el grado en que la organización debe mostrar la actitud correspondiente. Por ejemplo, debería mostrar una* GRAN *sorpresa (y_3), pues el valor asignado a ésta es bastante grande: $\langle .8, .9\rangle$.*

- *un* CIERTO *«afecto» ($B(y_7) = \langle .4, .5\rangle$),*
- BASTANTE POCA *«alegría» ($B(y_1) = \langle .2, .3\rangle$), y*
- BASTANTE POCA *«impaciencia» ($B(y_6) = \langle .2, .3\rangle$).*

8.16.4 Conocimiento previo



—*Mire que caérsele una lentilla, ...*
—*Creo que ha caído más allá.*
—*Fuente:* Texto propio, dibujo público.

Si los interlocutores ya se conocen, puede que tengan ideas preconcebidas sobre sus actitudes respectivas en la comunicación. Este conocimiento puede traducirse en forma de probabilidades o posibilidades asociadas a cada actitud del emisor. Si $p(x)$ representa la probabilidad asociada a la actitud $x \in \mathfrak{a}_{\mathcal{A}}$, entonces la probabilidad del suceso borroso —*cfr.* ZADEH [1011]; y Sección §15.2.1 de la presente tesis— de recibir el mensaje A es:

$$p(A) = \sum_{x \in \mathfrak{a}_{\mathcal{A}}} A(x)p(x) \qquad (8.22)$$

Según sea mayor o menor $p(A)$, más o menos **consistente** será el mensaje recibido A con el que se esperaba recibir. Si el mensaje recibido es preciso, entonces, independientemente de su consistencia con el esperado, el receptor deberá responder. No obstante, si es demasiado inconsistente quizás debiera solicitar la repetición o

confirmación del mensaje. De igual modo, si el mensaje recibido A no es preciso, podría solicitar su repetición en caso de inconsistencia.

Alternativamente, se podría modelizar este conocimiento a priori con una distribución de posibilidad —*cfr.* ZADEH [401] y Sección §18.6 de la presente tesis—. Cada $x \in \mathfrak{a}_{\mathcal{A}}$ tiene asociado un número $r(x) \in [0,1]$, indicador de la creencia del receptor acerca de la posibilidad de que la actitud x aparezca en el mensaje. La posibilidad del mensaje A es —*cfr.* ZADEH [401]:

$$r(A) = \max_{x \in \mathfrak{a}_{\mathcal{A}}} \min\{A(x), r(x)\} \tag{8.23}$$

Tras la recepción de A, el mensaje r_0 esperado posibilísticamente al inicio, puede modificarse a:

$$r_1(x) = \min\{r_0^{\alpha}(x), A(x)\} \tag{8.24}$$

donde α indica la relevancia del mensaje anterior en la propia modificación.

La posibilidad del mensaje A indica directamente la consistencia del mensaje con la expectativa posible:

$$\text{con}(A, r) = r(A) \tag{8.25}$$

Si esta consistencia es baja, puede que el receptor decida modificar por sí mismo el mensaje, de forma que a menor consistencia, menor parecido entre el mensaje modificado y el original; por ejemplo según:

$$A'(x) = (A(x))^{\text{con}(A,r)} \tag{8.26}$$

El nuevo mensaje posiblemente esperado es:

$$r_1(x) = \min\{r_0^{1-\text{con}(A,r)}(x), A'(x)\} \tag{8.27}$$

Con el siguiente ejemplo, ilustramos de qué manera extendemos estas ideas de YAGER al caso de respuestas Φ-borrosas, mediante aritmética de intervalos —*cfr.* §3.5—, considerando la extensión natural a intervalos de funciones reales factorizables —*cfr.* §3.6—. Se trata del mismo caso que en el Ejemplo 147, sólo que incorporando información a priori.

Ejemplo 148 *Imaginemos que el evaluador espera que la respuesta del candidato esté representada por la distribución de posibilidad*

$$r_0 = \langle .8, .9\rangle/x_1 + \langle 0, .1\rangle/x_2 + \langle .2, .3\rangle/x_3$$

que podría corresponder a una respuesta del tipo:
«con toda seguridad, ...,
vamos sin lugar a dudas,
además encantadísimo,
porque era lo que quería, ...,
de todos modos déjeme un par de días para ultimar unos detalles, ...»

Supongamos que recibe el mensaje anterior. Supongamos que consideramos su modelización como conjunto Φ-borroso, la misma que en el Ejemplo 147, es decir:

$$M = [.1, .2]/x_1 + [.8, .9]/x_2 + [.4, .5]/x_3$$

La consistencia, según (8.25) es

$$\begin{aligned}\text{con}(A, r_0) &= \max\{\min\{\langle .1, .2\rangle, \langle .8, .9\rangle\}, \min\{\langle .8, .9\rangle, \langle 0, .1\rangle\}, \min\{\langle .4, .5\rangle, \langle .2, .3\rangle\}\} \\ &= \max\{\langle .1, .2\rangle, \langle 0, .1\rangle, \langle .2, .3\rangle\} = \langle .2, .3\rangle\end{aligned}$$

Es decir, la respuesta del candidato no se adecua a las expectativas de la organización. Debido a ello, esta última decide modificar el mensaje escuchado, según (8.26):

$$\begin{aligned}A' &= (A)^{\text{con}(A,r)} \\ &= \langle .1, .2\rangle^{\langle .2, .3\rangle}/x_1 + \langle .8, .9\rangle^{\langle .2, .3\rangle}/x_2 + \langle .4, .5\rangle^{\langle .2, .3\rangle}/x_3 \\ &= \langle 0.50119, 0.72478\rangle/x_1 + \langle 0.935\,25, 0.979\,15\rangle/x_2 + \langle 0.759\,66, 0.870\,55\rangle/x_3\end{aligned}$$

Por ser $\ln x$ *y* e^x *monótonas creciente, tenemos que:*

$$\begin{aligned}\langle a_0, a_1\rangle^{\langle b_0,b_1\rangle} &= e^{\langle b_0,b_1\rangle \ln\langle a_0,a_1\rangle}\\ &= e^{\langle b_0,b_1\rangle\langle \ln a_0,\ln a_1\rangle}\\ &= \langle e^{\min\{b_0\ln a_0, b_0\ln a_1, b_1\ln a_0, b_1\ln a_1\}}, e^{\max\{b_0\ln a_0, b_0\ln a_1, b_1\ln a_0, b_1\ln a_1\}}\rangle\end{aligned}$$

La modificación de la esperanza posibilística a partir de este mensaje A' es, según (8.27):

$$r_1(x) = \min\{r_0^{\langle .7,.8\rangle}(x), A'(x)\}$$

así que:

$$\begin{aligned}r_1 &= \min(\langle 0.83651, 0.9289\rangle, \langle 0.50119, 0.72478\rangle)/x_1\\ &\quad + \min(\langle 0, 0.19953\rangle, \langle 0.935\,25, 0.979\,15\rangle)/x_2\\ &\quad + \min(\langle 0.27595, 0.43051\rangle, \langle 0.759\,66, 0.870\,55\rangle)/x_3\\ &\quad = \langle 0.50119, 0.72478\rangle/x_1 + \langle 0, 0.19953\rangle/x_2 + \langle 0.27595, 0.43051\rangle/x_3\end{aligned}$$

Se observa una disminución de la esperanza posibilística de que la respuesta sea sí, a la vez que aumentan las esperanzas del no y de la petición de tiempo para pensar.

Si hacemos la composición con la relación de la tabla anterior, la respuesta de la empresa debería ser:

Respuesta max-min revisada de la organización: $B(y)$						
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
$\langle 0.50119, 0.72478\rangle$	$\langle .6, .7\rangle$	$\langle .9, .97915\rangle$	$\langle .75966, .87055\rangle$	$\langle .75966, .87055\rangle$	$\langle .2, .3\rangle$	$\langle .75966, .87055\rangle$

Tabla 8.13: *Contestación max-min revisada de la organización ante la respuesta del candidato. La revisión se ha efectuado considerado el conocimiento a priori entre ambos. Los valores indican el grado en que la organización debe mostrar la actitud correspondiente. Por ejemplo, debería mostrar una* ENORME *sorpresa (y_3), pues el valor asignado a ésta es muy alto: $\langle .9, .98\rangle$.*

La respuesta de la organización debería mostrar:

- *una* ENORME *«sorpresa» ($B(y_3) = \langle .90, .98\rangle$),*
- *un* GRAN *«enojo» ($B(y_4) = \langle .76, .87\rangle$),*
- *una* GRAN *«paciencia» ($B(y_5) = \langle .76, .87\rangle$),*
- *un* GRAN *«afecto» ($B(y_7) = \langle .76, .87\rangle$),*
- BASTANTE *«pena» ($B(y_2) = \langle .6, .7\rangle$),*
- *una* MODERADA *«alegría» ($B(y_1) = \langle .50, .72\rangle$),*

a la vez que algún signo indicador de:

- BASTANTE POCA *«impaciencia» ($B(y_6) = \langle .2, .3\rangle$).*

Como podemos apreciar, el marcador de «sorpresa» ha aumentado ($B(y_3)$ ha pasado de $\langle .8, .9\rangle$ a $\langle .90, .98\rangle$); la organización debe mostrar «alegría» por lo positivo que tiene la respuesta (el candidato asegura que se lo pensará) y «pena» por la parte negativa (casi asevera que no), a la par que debe aumentarse el «enojo» (en busca de una posición de fuerza). El aumento de «paciencia» y «afecto» es consecuencia inmediata de la distribución a priori, pues la organización ansía a ese candidato (nótese que r_0(sí) $= \langle .8, .9\rangle$).

8.17 ¡Dichosos perfiles!

«¡Miren al fondo de las cosas!»
—P. MAKOVETSKI [1012]

Aunque en §8.2 hayamos defendido la igualdad, lo cierto es que, como comentábamos en el Preludio: somos diferentes.

La diversidad del ser humano hace que la administración con personas sea más un arte que una ciencia o una técnica —*cfr.* Copeland [1013]—. Pero la dificultad no puede hacernos olvidar la importancia de lo individual: «en determinadas circunstancias, un número reducido de personas pueden hacer que un sistema cambie drásticamente» —*cfr.* Chen, Lin y Kuo [9].

La elección de los perfiles y la elección de los campos, registros o criterios, que deben figurar en cada uno de estos perfiles, así como, cómo valorar cada criterio, son cuestiones muy difíciles.

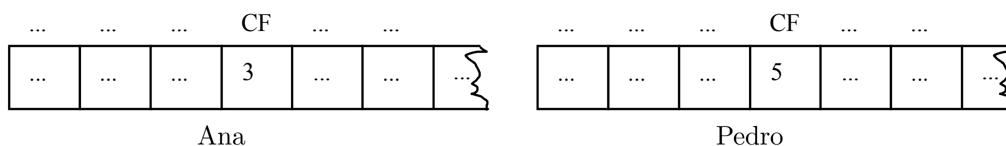
Sobre todo si se trata de personas (*agentes humanos*). Las actividades cognitivas complejas —actualmente— sólo pueden ser observadas indirectamente, por ejemplo, a través del lenguaje o de la conducta. Pero lo más seguro es que éstos no sean medios neutros. Por lo que la incertidumbre estará presente en toda valoración de variables o atributos personales.

El **análisis psicológico** es fundamental. Para ello, un buen punto de partida es la **teoría psicométrica o de los rasgos** —*cfr.* Eysenck y Eysenck [735]; Amelang y Bartussek [1014]; Buss y Poley [1015]; Colom Marañón [1016, 8]; y la pág. 147 de la presente Tesis—. Por ejemplo, se sabe que el rendimiento de las personas introvertidas en tareas de vigilancia es superior al de las extrovertidas, y es indudable que esta información debería ser empleada, por ejemplo, en la **contratación de controladores aéreos** —*cfr.* Colom Marañón [1017] (pp. 38-39).

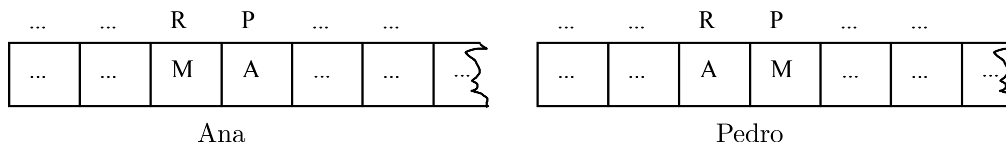
Es bien conocido en Reconocimiento de Patrones, que, a veces, es más robusto usar patrones de referencia «corruptos» que patrones de referencia «depurados» (*clean*). Un ejemplo típico se da en Reconocimiento del Habla —*cfr.* Rabiner y Juang [623] (pp. 309-310)—. De modo parecido, podemos pensar en condiciones de trabajo ideales (a las que más de un científico se referiría como *de laboratorio*), y en condiciones de trabajo *reales*. Ello conllevaría la modificación del máximo de ciertos atributos. Por ejemplo, en condiciones reales, lo mismo interesa más una persona con un atributo de ética de 8 sobre 10, que de 10 sobre 10. El adjetivo corrupto usado en Reconocimiento de Patrones, es del todo adecuado: tal persona posee valores éticos corruptos (aunque sea en un grado pequeño).

Un segundo ejemplo. Imaginemos que Ana y Pedro han seguido un curso de formación y debe evaluarse el resultado. Nada más comenzar el curso, se les hizo pasar un examen para saber sus conocimientos sobre los temas a tratar. Ana obtiene un 1 (sobre 7) y Pedro un 3 (sobre 7). Cuando finaliza el curso, Ana obtiene un 4 (sobre 7) y Pedro un 5 (sobre 7). La cuestión no trivial es: si un evaluador desea incluir en los perfiles de Ana y Pedro esta información, ¿qué sería de mayor utilidad?

¿Debe incluir un único campo CF correspondiente al curso de formación y registrar en el campo la nota?



O quizás, ¿debería incluir dos campos, que informen sobre el rendimiento (R) y progreso (P), y que, por ejemplo, se valoren como mediano (M) y alto (A)?



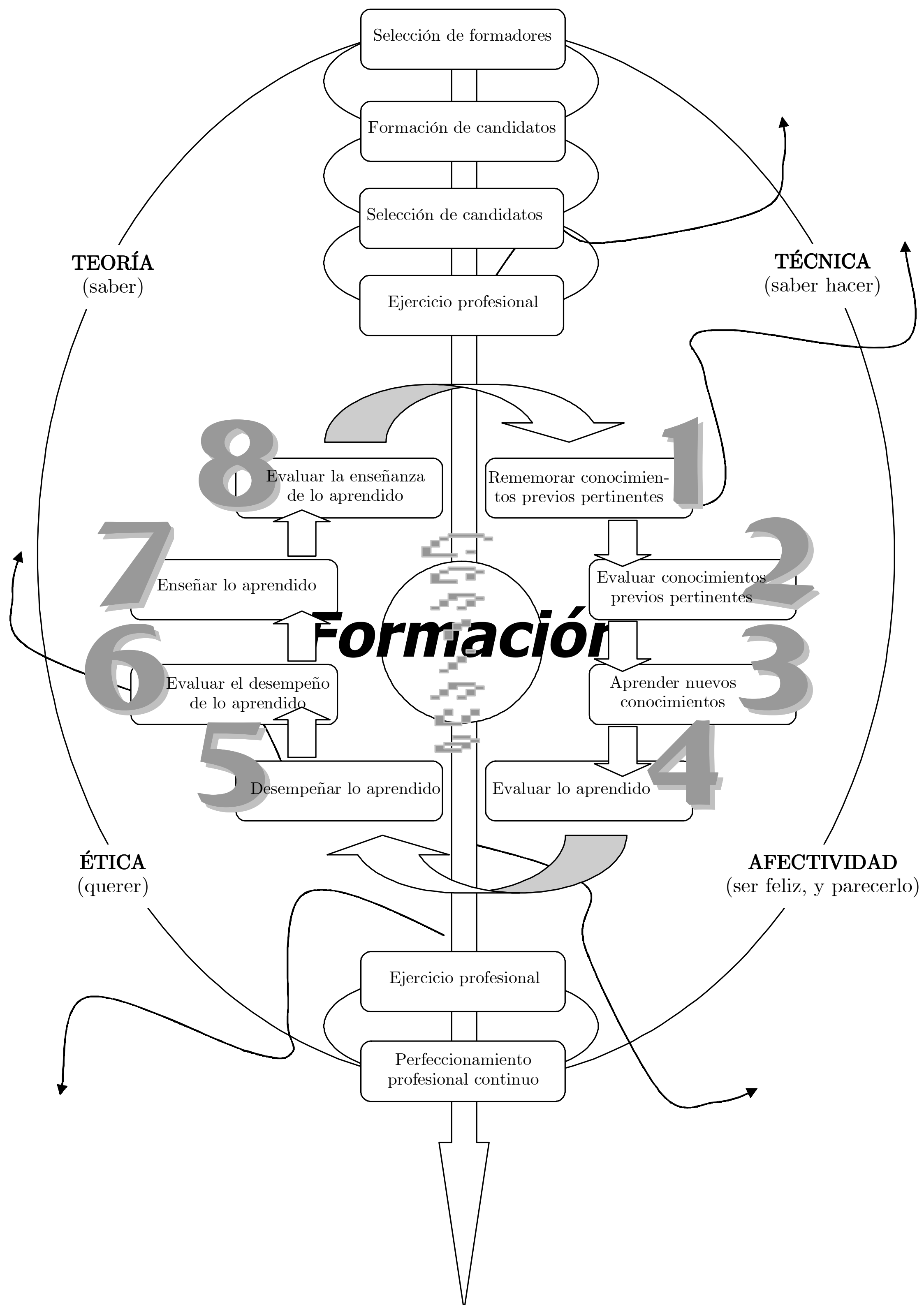
8.18 Líneas de desarrollo personal

> *«La mente no es un vaso que hay que llenar, sino un fuego que hay que encender.»*
> —Plutarco di Cheronea (46-120 d.C.)

Esta cita de Plutarco nos recuerda lo difícil que resulta evaluar los aprendizajes, algo que ya hemos tratado anteriormente. Y aunque también hemos hecho referencia a varias teorías del aprendizaje —*cfr.* §6.22—, no podemos olvidar la **teoría del aprendizaje acumulativo** —*cfr.* Gagné, Briggs y Wager [1018].

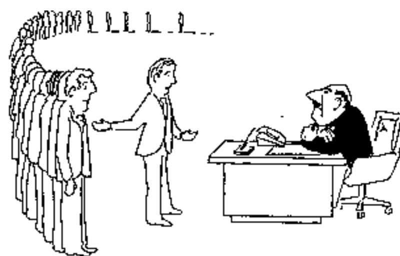
Esta teoría nos inspira hacia la distinción entre varias etapas en todo proceso de formación (continua). Lo mostramos en el siguiente esquema gráfico, con la que tratamos de reflejar lo que creemos que debe ser el proceso de desarrollo profesional de cualquier persona que así lo desee.

Pensamos que el esquema es lo suficientemente auto-explicativo, por lo que no dedicaremos espacio alguno a comentarla. Es más, preferimos que el lector extraiga sus propias conclusiones a partir de su reflexión.



Líneas de crecimiento personal. Incluimos la teoría, técnica, ética y afectividad como inseparables de su crecimiento como persona y de su desarrollo profesional. (*cfr.* Fernández Pérez [22], p. 890)
— *Fuente:* Elaboración propia.

8.19 Ejemplo ilustrativo: Una breve incursión en la polivalencia



— *«Fíjese todos los candidatos que tenemos, y sólo para dos puestos.»*
— *«Bueno hombre, pues a ver si somos capaces de encontrar a uno que sepa hacer las dos cosas, que hay que ahorrar.»*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Sea por recortes presupuestarios, sea por lo que fuere, a veces pueden interesar candidatos polivalentes, es decir, futuros trabajadores capaces de ejecutar las tareas correspondientes a diferentes puestos de trabajo. En la literatura se refiere este asunto, como «problema de la no especialización» o «problema del candidato comodín». Esta sección trata sobre este problema y sobre otro de similar naturaleza, para el caso de grupos de trabajo: evaluar la compatibilidad entre determinados grupos y ciertos conjuntos de tareas, en referencia a la polivalencia que poseen tales grupos para desarrollar cada una de esas colecciones de trabajos o tareas.

8.19.1 Una sociedad de ociosos

Los vaticinios sobre **el fin del trabajo** resuenan en nuestros oídos —*cfr.* Rifkin [1019]—. No es hasta comienzos del siglo XIX, con pensadores como Charles Fourier o Claude Henri de Rouvroy de Saint-Simon, cuando se ensalza el trabajo. Fourier defiende su necesidad psicológica: «el trabajo bien entendido responde a una necesidad y nos realiza como personas». Saint-Simon sentencia que «la nación más feliz es la que cuenta con menos desocupados». Pierre-Joseph Proudhon, Georg Wilhelm Friedrich Hegel y Karl Marx afirman que el trabajo es la esencia del hombre, su principal medio de expresión y realización. Jean Onimus defiende, como ya hicieran Ivan Illich [1020] (p. 63), Herbert Marcuse [1021] (prólogo) o Henri Bergson [1022] (p.252), las actividades libres, la liberación del peso del trabajo, de las tareas más esclavizantes y repetitivas, la liberación de la rutina «metro, curro y sueño» —*cfr.* Onimus [1023] (p. 154)—. Pero Jean Onimus va más allá; en contra de pensamientos tan catastrofistas como los de Pierre Thuillier [1024], defiende la mutación de la sociedad industrial en una sociedad plena de satisfacciones y liberada prácticamente del peso del trabajo, soportado ampliamente por automatismos. Esto ya había sido sostenido en 1950 por Teilhard de Chardin [1025] (p. 222) —citado por Onimus [1023] (p. 61):

> *Nada es más injusto ni más vano que el protestar y luchar contra el paro creciente al que nos conduce inexorablemente la máquina. Sin los múltiples automatismos que se encargan de hacer trabajar «sólo» los diversos órganos de nuestro cuerpo, ninguno de nosotros, evidentemente, tendría tiempo para crear, para amar, para pensar, dado que los cuidados de nuestro «metabolismo» nos absorberían por entero. De la misma forma (y consciente de los problemas relacionados con la utilización de una mano de obra demasiado bruscamente relajada), ¿cómo es posible que no se vea que la industrialización siempre creciente de la Tierra no es más que la forma humana y colectiva de un proceso universal de revitalización que, en éste, como en los otros casos, sólo tiende, si sabemos utilizarlo convenientemente, a interiorizar y a liberar?*

Una **sociedad de ociosos** (desocupados o exentos de obligaciones). ¿O será un mundo sin máquinas, al estilo del *Erewhon* de Samuel Butler [1026] el que dominará? El prestigioso antropólogo Hank Wesselman [1027] (p. 256) nos avisa de su peligro:

> *«Llegué a una ineludible conclusión: una vez perdida nuestra avanzada tecnología, ya nunca volverá a ser descubierta. Sin hierro, las máquinas y la tecnología basada en ellas ya no serán posibles. Sin máquinas y*

sin la tecnología basada en ellas, el hierro ya no podrá obtenerse otra vez. Quienes sobrevivan al colapso de la civilización occidental tal vez tengan que vivir un eterno futuro neopaleolítico. La "era del maquinismo" sólo puede darse una vez, no más ...»

8.19.2 No te emplees, ¡trabaja!

Son varios los tipos de paro que se estudian en Economía: estacional, depresivo, friccional, estructural o cíclico —*cfr.* Fernández Díaz [1028] (p. 26); Appleton [1029] (p. 167ss)—. Dentro de los modelos de equilibrios no «walrasianos», se habla de paro «keynesiano», paro clásico e inflación contenida —*cfr.* Fernández Díaz [1028] (p. 27).

El **paro** no es la ausencia de trabajo. Uno siempre puede plantearse ser útil, ayudando a los demás, trabajando —desinteresadamente— para ellos. El paro es la ausencia de *empleo*.

Olvidémonos de la palabra «paro»; usemos **desempleo**. Los empleos son trabajos, pero no todos los trabajos son empleos, no todo *trabajador* es un *empleado*, y por tanto, no todo desempleado está sin trabajo.

La lucha no consiste en tratar únicamente de *salvar empleos*, sino en *suscitar actividades* nuevas y útiles para la comunidad —*cfr.* Onimus [1023] (p. 80); a propósito, puede verse el libro, en clave de mucho humor, de Manuel Felipe Royo Ubieto [1030].

Nosotros, entenderemos por **oferta**, el conjunto de trabajos en espera de ser ocupados («trabajos en venta»), y por **demanda**, el conjunto de aspirantes a ocuparlos («compradores de trabajos»). La realidad es que el índice de desempleo se muestra como un buen indicador del exceso de demanda.

Resulta obvio que muchos desempleados buscarán en la **economía sumergida**[20] su renta[21] base, o una renta complementaria al subsidio de desempleo que perciban, intentando igualar, como meta, a la renta media que se percibe en el mercado oficial —*cfr.* Fernández Díaz [1028] (p. 49); Giran y Granier [1032] (pp. 199ss.)—. Hay que observar que, de igual manera y como se desprende de nuestros comentarios anteriores, muchos trabajadores, oficialmente ocupados, se sumergirán en esta economía *oculta*.

En la discusión que nos ocupa, quizás más que del pluriempleo, habría que hablar de emolumentos. La realidad es que son muchas las familias que con un solo salario no tienen para llegar a fin de mes. Pero, insistimos, estas disquisiciones están destinadas a otro momento y lugar.

8.19.3 El trabajador multiplicable

Sea por recortes presupuestarios, sea por lo que fuere, a veces pueden interesar candidatos polivalentes, es decir, futuros trabajadores capaces de ejecutar las tareas correspondientes a diferentes puestos de trabajo. En la literatura se refiere este asunto, como **«problema de la no especialización»** o **«problema del candidato comodín»**, fiel ejemplo, del sistema *just in time*: una apuesta por la desespecialización de los trabajadores y su conversión en empleados multifuncionales, ideado por los ingenieros de Toyota, en 1948 —*cfr.* Romero Morante [782] (p. 109).

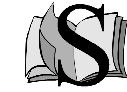
No nos resistimos a citar en este punto a Ramón Buxarrais, que fuera obispo de Málaga desde 1973 a 1991. En su tercera «carta a Valerio» (Málaga, marzo de 1980) [1033] (pp. 20-21), dice:

[...] No estaría mal que también dijéramos algo sobre la injusticia del pluriempleo; los jubilados con trabajos extras; los sueldos escandalosos; los parados "aparentes" acogidos al desempleo; las bajas sin justificación; las "sanguijuelas-sociales" que, sin dar golpe, son los primeros en cobrar mensualidades y exigir revisión de convenios ... [...] Yo creo que en años de "vacas flacas", cuando el paro devora tantos hogares o sitúa en la vía muerta de los sin trabajo a millares de jóvenes, tener dos empleos o más, debería estar totalmente prohibido. Aparte de lo que pueda decir la legislación, el pluriempleo puede llegar a ser un verdadero robo a la sociedad. Alguien los llama "rateros blancos" o "atracadores sin metralleta". Porque en realidad son muchos los miles de pesetas que pueden acumular al cabo de un año.

[20] En vez de usar el término «sumergida» —*underground*, en inglés, *souterraine*, en francés—, algunos utilizan: «subterránea», «oculta», «clandestina», «informal», «paralela»: las famosas «cajas negras» sin las cuales, la mayoría de los empresarios declara que no podría mantener su empresa a flote. En todo caso, la **economía sumergida** incluye la producción no declarada de bienes y servicios legales, o de bienes y servicios ilegales, y los ingresos no declarados, monetarios o en especie —*cfr.* Fernández Díaz [1028] (p. 48).

[21] «La **renta** de una persona es lo que puede consumir durante la semana esperando quedar al final de la semana en tan buena situación como estaba al principio.» O sea, la renta es **sostenible**, pues no es más que aquella parte de la producción que puede consumirse después de haber compensado la depreciación del capital. La definición de renta, con la que comienza esta nota a pie de página, se debe al premio Nobel de Economía (en 1972), John Hicks [1031] (p. 176).

Pero la complejidad de este problema es tal, que una opinión, expresada a la ligera, a lo único que puede conducir es al desatino. Se hacen necesarias algunas cavilaciones, para, precisamente no dejarse atraer por este tipo de cavilosidades.



upóngase que la empresa PAMICOCHI oferta un conjunto de trabajos cuyas tareas no son coincidentes en el tiempo. Desean un trabajador «comodín»; alguien que pueda realizar no sólo cualquiera sino todos los trabajos.

Como habitualmente en esta tesis, supongamos que trabajamos con perfiles descriptores. Sea $\mathcal{J}$ el conjunto de puestos de trabajo ofertados, $\mathcal{A}$ el conjunto de aspirantes y $\mathcal{C}$ el conjunto de cualidades que definen los perfiles profesionales de los trabajos y de los aspirantes. Dos son las soluciones «clásicas» que recoge la literatura. La primera halla el candidato más afín al trabajo «virtual», unión de todos los trabajos.

Primera solución

Considerando el trabajo "virtual" unión de todos ellos:

$$\begin{aligned}\hat{J} &= \bigcup_{J\in\mathcal{J}} J \\ &= \sum\nolimits_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{T}_{J\in\mathcal{J}}[\underline{J}(C), \overline{J}(C)]\big/ C \end{aligned} \qquad (8.28)$$

siendo $\mathcal{T}$ una t-conorma. El candidato más adecuado es:

$$\hat{A} = \arg\min_{A\in\mathcal{A}} \delta(A, \hat{J}) \qquad (8.29)$$

La estrategia de la segunda solución supone extender la expresión de los perfiles de los candidatos y de los trabajos al multiconjunto super-referencial donde cada cualidad C se repite $|\mathcal{J}|$ veces:

$$\hat{\mathcal{C}} = \{C_1, ..., C_{|\mathcal{C}|}, \overset{|\mathcal{J}|}{\ldots\ldots}, C_1, ..., C_{|\mathcal{C}|}\} \qquad (8.30)$$

Segunda solución

Sean los perfiles de los candidatos y trabajos redefinidos en base al super-referencial $\hat{\mathcal{C}}$ (Ec. 8.30):

$$A_{\hat{\mathcal{C}}} = \sum\nolimits_{J\in\mathcal{J}} \sum\nolimits_{C\in\mathcal{C}} [\underline{A}(C), \overline{A}(C)]\big/ C \qquad (8.31)$$

$$J_{\hat{\mathcal{C}}} = \sum\nolimits_{J\in\mathcal{J}} \sum\nolimits_{C\in\mathcal{C}} [\underline{J}(C), \overline{J}(C)]\big/ C \qquad (8.32)$$

Denotemos por $\mathcal{A}_{\hat{\mathcal{C}}}$ y $\mathcal{J}_{\hat{\mathcal{C}}}$ los conjuntos redefinidos de los perfiles de los aspirantes y de los trabajos. El candidato más adecuado es el menos distante, o sea:

$$\hat{A}_{\hat{\mathcal{C}}} = \arg\min_{A_{\hat{\mathcal{C}}}\in\mathcal{A}_{\hat{\mathcal{C}}}} \delta(A_{\hat{\mathcal{C}}}, J_{\hat{\mathcal{C}}}) \qquad (8.33)$$

Obsérvese que la idea subyacente a esta segunda solución también es aplicable cuando se trata de un problema de elección por valoración de candidatos, que, por consiguiente, puede resolverse por una técnica como TOPSIS (la operativa de TOPSIS cuando los perfiles son subconjuntos Φ-borrosos o, en general, subconjuntos borrosos de tipo 2, es la misma que la que relatamos en §10.13, para TOPSIS-0/1).

8.19.4 Meta: el grupo «comodín»

[...] si realmente es cierto que la gente rinde más cuando trabaja con aquellos que prefiere.»
—William H. Knowles [1034] (p. 98)

Sea $\mathfrak{A}$ un universo de trabajadores. Sean $G \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{A})$ una colección de grupos de trabajadores, $\mathcal{A} \subset \mathfrak{A}$ un grupo de trabajadores y $\mathcal{J}$ una colección de tareas. Las soluciones vistas en §8.19.3 pueden extenderse al caso de tener que elegir el grupo de trabajadores más afín a un conjunto de trabajos o tareas.

Por ejemplo, la **extensión de la primera solución** «clásica», podríamos realizarla, al menos, de cuatro formas: *asimétrica orientada hacia los trabajos:* para cada grupo, cada trabajador miembro se compara con el trabajo unión, para posteriormente, agregar los resultados mediante una media, obteniendo así la adecuación media M_{TG} de cada grupo con respecto a todos los trabajos (el trabajo unión); *asimétrica orientada hacia los trabajadores:* cada trabajo se compara con el trabajador unión de cada grupo, el representante virtual del grupo, para, a continuación, agregar los resultados mediante una media, obteniendo así la adecuación media M_{GT} de todos los trabajos con respecto a cada grupo; *simétrica respecto a resultados:* para cada grupo, se calcula la media entre M_{TG} y M_{GT}; a adecuación media los dos resultados anteriores; y *simétrica respecto a ambas uniones*: o sea, reduciendo el problema a uno de elección de un trabajador (entre los trabajadores unión de cada grupo) para un puesto de trabajo (el trabajo unión). Lo que se persigue en todos los casos es maximizar la adecuación.

En una organización actual ha de responderse a las necesidades de disponer de estructuras flexibles, no jerarquizadas —*cfr.* §8.3.1—, y para ello se hace imprescindible la existencia de grupos y equipos, de grupos que aparecen y desaparecen en respuesta a situaciones coyunturales, como nuevos proyectos a los que hacer frente. La idea de **adhocracia** de Henry Mintzberg [1035] puede ayudar, pues según esta idea, ha de tenderse a «agrupar a los especialistas en unidades funcionales en lo correspondiente a asuntos internos, pero desplegándolos en pequeños equipos de proyectos formados a base del mercado para la realización de su trabajo; un uso de dispositivos de enlace para fomentar la adaptación mutua dentro y entre estos equipos.»

A menudo en la literatura se ha insistido en la diferencia entre **grupos** y **equipos**. Un equipo puede definirse como una colección de individuos, sometidos a una interacción dinámica e interdependiente, y persiguiendo una finalidad común —*cfr.* Orasanu y Salas [1036]; Salas, Dickinson, Converse y Tannenbaum [1037]—. En los equipos hay miembros especializados, y las tareas requieren intercambio dinámico de información (tareas que requieran de más de un agente), coordinación y ajuste a lo demandado por la definición de las tareas. Los grupos, contrariamente a los equipos, tienen —*cfr.* Burstein, Mulvehill y Deutsch [1038]— miembros (no especializados) homogéneos e intercambiables; los miembros, habitualmente, trabajan de manera independiente (no se requiere ningún tipo de coordinación), y en realidad, las tareas que ellos hacen, podrían ser hechas, aunque quizás no tan eficientemente, por un solo agente.

Como vemos, el concepto de grupo es menos restrictivo que el de equipo. Por ello, nosotros planteamos el problema en grupos. La presente sección está motivada por el supuesto siguiente:


upóngase que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son dos equipos de agentes. Sea $\mathcal{J}$ una colección de tareas que deben ser desarrolladas por un equipo de agentes. La empresa desea saber qué equipo puede ser considerado como el mejor para llevar a cabo las tareas recogidas en $\mathcal{J}$. En resumen, se desea ser capaz de evaluar la versatilidad (polivalencia) de un equipo $\mathcal{A}$ con respecto a las tareas de $\mathcal{J}$.

Obtenemos una solución a este problema, trabajando con perfiles descriptores. Pensamos en un conjunto $\mathcal{C}$ de cualidades. Como una opción más natural a la representación de los perfiles de cualidades como subconjuntos borrosos ordinarios (de tipo 1) o Φ-borrosos de $\mathcal{C}$, e intentando obviar los inconvenientes que comentábamos en §4.5, proponemos describir cualquier cualidad como subconjunto borroso de tipo 2 de $\mathcal{A}$ o de $\mathcal{J}$, según corresponda a un aspirante o a un puesto. Proponemos varios indicadores de la compatibilidad, pudiendo por tanto comparar diferentes equipos o grupos de agentes con respecto al mismo conjunto de tareas.

En concreto, usamos subconjuntos borrosos de tipo 2, en busca de una representación más natural. En nuestra opinión, no hay ninguna necesidad de utilizar subconjuntos borrosos más complejos.

8.19.5 Grupos polivalentes de agentes

Como ya hemos comentado, la polivalencia de un grupo de agentes se refiere a la habilidad de sus miembros para ejecutar tareas diversas. Nuestro interés radica en, dado un conjunto de tareas, decidir cual preferimos que sea el grupo de agentes que las desempeñe. Proporcionamos una solución que basamos en comparar dos destrezas globales, la exigida con la mostrada.

Sea $\mathcal{J}$ un conjunto de tareas a desempeñar. Como universo de discurso, consideremos $\mathcal{J}$. Entonces, podemos representar cualquier cualidad C como un subconjunto borroso de tipo 2 de $\mathcal{J}$, esto es, $C(\mathcal{J}) : \mathcal{J} \to [0,1]^{[0,1]}$:

$$C(\mathcal{J}) = \sum_{J \in \mathcal{J}} C(J) \diagup J \tag{8.34}$$

de manera que podemos interpretar el subconjunto $C(\mathcal{J})$ como la **«destreza global requerida»** por el conjunto de tareas $\mathcal{J}$, que es necesario poseer en lo que se refiere a la cualidad C, para poder desempeñar todas las tareas de $\mathcal{J}$.

Sea $\mathcal{A}$ un grupoo de agentes. De manera análoga, podemos considerar $\mathcal{A}$ como el universo de discurso. De este modo, podemos representar cualquier cualidad C como un subconjunto borrosos de tipo 2 de $\mathcal{A}$, o sea, $C(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \to [0,1]^{[0,1]}$:

$$C(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{A}} C(A) \diagup A \tag{8.35}$$

de forma que podemos interpretar el subconjunto $C(\mathcal{A})$ como la **«destreza global poseída»** por el grupo $\mathcal{A}$, en lo que se refiere a la cualidad C.

Los $C(J)$ y $C(A)$ son grados borrosos, o sea, subconjuntos borrosos de $[0,1]$. Usualmente, serán etiquetas lingüísticas, como en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 149 *Supongamos que el conjunto de términos es:*

$$\mathcal{L}([0,1]) = \{\textit{ninguna, escasa, mejorable, normal, notable, sobresaliente, óptima}\}$$

Como ejemplo, supongamos que se ha decidido que la cualidad C puede ser descrita por cualquiera de los dos subconjuntos borrosos de tipo 2 siguientes, dependiendo de que los calificativos —las etiquetas lingüísticas— en la descripción se refieran a tareas o a agentes. Es decir, podemos definir C a partir de los grados de destreza requeridos por cada tarea:

$$C(\mathcal{J}) = \textit{notable}/J_1 + \textit{sobresaliente}/J_2 + \textit{mejorable}/J_3 + ... + \textit{normal}/J_{|\mathcal{J}|} \tag{8.36}$$

representando, por tanto, el subconjunto $C(\mathcal{J})$ la «destreza global requerida» *por el conjunto de tareas $\mathcal{J}$, para la cualidad C. O bien, podemos definir C a partir de los grados de destreza demostrados por cada agente:*

$$C(\mathcal{A}) = \textit{notable}/A_1 + \textit{mejorable}/A_2 + \textit{escaso}/A_3 + ... + \textit{normal}/A_{|\mathcal{A}|}$$

representando, por tanto, el subconjunto $C(\mathcal{A})$ la «destreza global poseída» *por el grupo $\mathcal{A}$, en lo que se refiere a la cualidad C.*

8.19.6 Trabajando en paz y armonía: un indicador de compatibilidad

En esta sección proponemos dos indicadores que nos permiten expresar la compatibilidad de las destrezas de un grupo de agentes en referencia a las cualidades requeridas por un conjunto de tareas. Esta compatibilidad, como ya hemos mencionado antes, se refiere a la polivalencia o versatilidad de un grupo de agentes con respecto al conjunto de tareas que deberá desempeñar.

Observemos que, caso de que C sea, por ejemplo:

$$C(\mathcal{J}) = \sum_{J \in \mathcal{J}} \text{óptima} \diagup J \tag{8.37}$$

y:

$$C(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \text{nada} \diagup A \tag{8.38}$$

entonces, cualquier indicador de la compatibilidad de $\mathcal{A}$ respecto de $\mathcal{J}$, debe tener un valor muy próximo a cero.

Valoraciones positivas hacia un rango

Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{J}$ los conjuntos de todos los agentes y todas las tareas posibles, respectivamente. Sean $\mathcal{A} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{A})$ y $\mathcal{J} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{J})$. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las cualidades. Sea $C \in \mathcal{C}$ una cualidad cualquiera. Sean $C(\mathcal{J})$ y $C(\mathcal{A})$ un perfil basado en tareas y un perfil basado en agentes, respectivamente. Supongamos que consideramos los perfiles basados en tareas $C(\mathcal{J})$ como perfiles prototipos y los perfiles basados en agentes $C(\mathcal{A})$ como perfiles ejemplares. Proponemos un primer indicador de la compatibilidad de $C(\mathcal{A})$ con $C(\mathcal{J})$, mediante el Algoritmo 150.

Algorithm 150 *Indicador de compatibilidad entre aspirantes y empleos para una competencia C*

---

1. Calcular los valores lingüísticos medios $\overline{C(\mathcal{A})}, \overline{C(\mathcal{J})} \in \mathcal{L}([0,1])$ como los conjuntos borrosos medios, para todo $x \in [0,1]$:

$$\overline{C(\mathcal{A})}(x) = \frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum\nolimits_{A \in \mathcal{A}} C(\mathcal{A})(A)(x) \tag{8.39}$$

$$\overline{C(\mathcal{J})}(x) = \frac{1}{|\mathcal{J}|} \sum\nolimits_{J \in \mathcal{J}} C(\mathcal{J})(J)(x) \tag{8.40}$$

2. Si $d : \mathfrak{F}([0,1]) \times \mathfrak{F}([0,1]) \to [0,+\infty)$ es una asignación básica de disimilitud —*cfr.* Def. 45—, entonces, un posible **indicador de compatibilidad** de $\mathcal{A}$ respecto de $\mathcal{J}$, en el caso de valoraciones positivas hacia un rango (el rango es solicitado por $\mathcal{J}$) es $\bar{\varsigma} : \mathfrak{J} \times \mathfrak{A} \to [0,1]$:

$$\bar{\varsigma}(\mathcal{J},\mathcal{A}) = 1 - \frac{d(\overline{C(\mathcal{A})}; \overline{C(\mathcal{J})})}{d(e_L^{\min}; e_L^{\max})} \tag{8.41}$$

donde $e_L^{\min}$ y $e_L^{\max}$ son, respectivamente, los valores lingüísticos mínimo y máximo en $\mathcal{L}([0,1])$ —en el Ejemplo 149: $e_L^{\min}$ =nada, y $e_L^{\max}$ =óptima.

La posición primera, como argumento, de $\mathcal{J}$ en $\bar{\varsigma}(\mathcal{J},\mathcal{A})$ indica que las comparaciones las hacemos de $\mathcal{A}$ hacia $\mathcal{J}$ (en el sentido de la notación $(\mathcal{J} : \mathcal{A})$ de la Lógica de Relativos de Charles Sanders Peirce —*cfr.* nota al pie 1, en la pág. 346—) o sea, lo dicho antes, que $\mathcal{J}$ es lo prototípico y $\mathcal{A}$ lo no prototípico.

Competencias o roles de trabajo: valoraciones positivas hacia la unidad

Supongamos que seguimos en la situación anterior, salvo que ahora, trabajamos con competencias —*cfr.* §8.11— o roles de trabajo —*cfr.* §8.12—: la perfección, la maestría, la máxima destreza, está representada computacionalmente por la unidad —*cfr.* §8.13—. En este caso, debemos ordenar $\overline{C(\mathcal{A})}$ y $\overline{C(\mathcal{J})}$. Existe una vasta literatura sobre cómo ordenar números borrosos —*cfr.* Klir y Yuan [46].

Algorithm 151 *Indicador de compatibilidad entre aspirantes y empleos para una competencia C (bis)*

1. Podemos ordenar $\overline{C(\mathcal{A})}$ y $\overline{C(\mathcal{J})}$, según su disimilitud respecto del valor lingüístico máximo $e_L^{\max}$ en $\mathcal{L}([0,1])$ (o de forma similar, respecto del valor lingüístico mínimo). Sea $d : \mathfrak{F}([0,1]) \times \mathfrak{F}([0,1]) \to [0,+\infty)$ una asignación básica de disimilitud —*cfr.* Def. 45—. Si $d_{\mathcal{A}} = d(e_L^{\max}, \overline{C(\mathcal{A})}) \in [0,+\infty)$ y $d_{\mathcal{J}} = d(e_L^{\max}, \overline{C(\mathcal{J})}) \in [0,+\infty)$, entonces, definimos el orden:
$$\overline{C(\mathcal{A})} \preccurlyeq \overline{C(\mathcal{J})} \longleftrightarrow d_{\mathcal{A}} \geq d_{\mathcal{J}} \tag{8.42}$$
2. Un **indicador de la compatibilidad** del equipo $\mathcal{A}$ respecto del conjunto de tareas $\mathcal{J}$, en el caso de *valoraciones positivas hacia la unidad*, es $\bar{\varsigma}^* : \mathfrak{J} \times \mathfrak{A} \to [0,1]$:
$$\bar{\varsigma}^*(\mathcal{J} : \mathcal{A}) = \begin{cases} \bar{\varsigma}(\mathcal{J}, \mathcal{A}) & \text{si } \overline{C(\mathcal{A})} \preccurlyeq \overline{C(\mathcal{J})} \\ 1 & \text{si } \overline{C(\mathcal{J})} \preccurlyeq \overline{C(\mathcal{A})} \end{cases} \tag{8.43}$$

En el Algoritmo 151, el valor 1 en el caso $\overline{C(\mathcal{J})} \preccurlyeq \overline{C(\mathcal{A})}$ expresa el significado de una valoración positiva hacia la unidad, o sea, hacia la perfección. Observemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 152 *Sean:*

$$\begin{aligned} C(\mathcal{A}_1) &= \sum\nolimits_{A \in \mathcal{A}_1} \textsf{sobresaliente}/A \\ C(\mathcal{A}_2) &= \sum\nolimits_{A \in \mathcal{A}_2} \textsf{óptima}/A \\ C(\mathcal{J}) &= \sum\nolimits_{J \in \mathcal{J}} \textsf{sobresaliente}/J \end{aligned}$$

entonces:

$$\bar{\varsigma}(\mathcal{J}, \mathcal{A}_2) < \bar{\varsigma}(\mathcal{J}, \mathcal{A}_1) = 1$$

mientras que:

$$\bar{\varsigma}^*(\mathcal{J}, \mathcal{A}_1) = \bar{\varsigma}^*(\mathcal{J}, \mathcal{A}_2) = 1$$

Otro indicador posible puede ser el siguiente $\bar{\varsigma}^\bullet(\mathcal{J}, \mathcal{A})$, calculado por el Algoritmo 153. Observemos que su resultado también pertenece a $[0,1]$.

Algorithm 153 *Indicador de compatibilidad entre aspirantes y empleos para una competencia C (ter)*

---

1. Eliminación de la borrosidad de los grados borrosos $C(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}$. Obtenemos así el subconjunto borroso $\widehat{C(\mathcal{A})}$ más cercano al subconjunto borroso de tipo 2, $C(\mathcal{A})$ (más cercano según el proceso elegido de eliminación de la borrosidad —*cfr.* Klir y Yuan [46] (pp. 336-338).

2. Calculamos las medias aritméticas[22]:

$$\overline{\widehat{C(\mathcal{A})}} = \frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum_{A \in \mathcal{A}} \widehat{C(\mathcal{A})}(A) \qquad (8.44)$$

$$\overline{\widehat{C(\mathcal{J})}} = \frac{1}{|\mathcal{J}|} \sum_{J \in \mathcal{J}} \widehat{C(\mathcal{J})}(J) \qquad (8.45)$$

3. Calculamos el **indicador de compatibilidad** de $\mathcal{A}$ respecto de $\mathcal{J}$. Lo definimos como el cociente de las medias:

$$\varsigma^{\bullet}(\mathcal{J}, \mathcal{A}) = \begin{cases} \overline{\widehat{C(\mathcal{A})}} \big/ \overline{\widehat{C(\mathcal{J})}} & \text{if } \overline{\widehat{C(\mathcal{A})}} \leq \overline{\widehat{C(\mathcal{J})}} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (8.46)$$

8.20 Síntesis reflexiva

> *«Con el simil del iceberg se puede comprender mejor esto. La parte que emerge es la menor y la menos importante. Esto lo saben bien los patrones y marineros que navegan entre ellos. Debajo de lo que se ve hay mucho más y es lo más importante. [...] Lo que cualquiera puede ver y que a la larga es lo menos significativo, aunque sea necesario. Lo importante de la organización está debajo de ella y no se deja ver, porque no emerge. Es el mundo de las actitudes ante los hechos; de los intereses ocultos aunque, a veces, legítimos; de los valores que inspiran conductas; de las justificaciones personales; de los hábitos de comportamientos, etc..., es decir, lo que denominamos cultura interna de los miembros de la organización. Y es precisamente esto, que no se ve, lo que condiciona el éxito o el fracaso de las acciones.»*
> —Francisco Blanco Prieto [1039] (p. 29)

Para que, en todos los órdenes, se produzcan, y la sociedad recoja, los máximos «beneficios» en «capital humano», se debe partir de la situación de **igualdad de todo ser humano** —*cfr.* §8.1 y §8.2— (los que están, son, pero no están todos los que son):

- **NO al monopolio**,
- **NO a la explotación**,
- **NO a los sistemas de castas**,
- **NO a la diferencia de trato por diferente coloración de la piel o distintos caracteres**,
- **NO al menosprecio a las personas con necesidades diferentes**,
- **NO al menosprecio a la mujer**.

Sorprende, amargamente, que en sociedades que presumen y se ensoberbecen de ser punteras en la aplicación de la tecnología se maltrate al ser humano. Parece mentira que en comunidades que pretenden impulsar la

[22] Como alternativa a las medias aritméticas (8.44), podemos usar los valores puntuales (*point values*) propuestos por Yager [995] (parte II) —*cfr.* Ec. 8.8 en esta Tesis—. También podríamos usar los valores puntuales para eliminar la borrosidad de $C(A)$ en el paso 1.

natalidad se produzcan situaciones de **discriminación en el acceso al trabajo de la mujer** que acaba de dar a luz, castigándosela, precisamente, por haber alumbrado —*cfr.* Nota al pie n. 4 (pág. xxiii).

Y sorprenden también tales diferencias de trato, porque en las organizaciones corren nuevos vientos, vientos de cambio —*cfr.* §8.3—. Se defiende pues el rompimiento de la estructura jerárquica, pseudojerárquica, piramidal, trapezoidal, burocrática, tradicional, en favor de la participación total, del trabajo como parte de una **red** —*cfr.* §8.3.1.

No es necesario seguir ahondando en demasía en la complejidad de cualquier organización. Quedan muchos factores por comentar; a uno de ellos, la **tecnología**, dedicamos §8.3.2.

Uno de los factores más influyentes en la buena marcha de las organizaciones es la **elección de candidatos** —*cfr.* §8.4—. Una actividad muy política, dado que todo el proceso de elección, la propia elección y el resultado de la misma pueden mudarse en armas arrojadizas dentro de las luchas internas por el poder.

Una buena elección es sumamente importante —*cfr.* §8.6—. Y aunque peque de perogrullada, es así, y hay que decirlo. Las investigaciones muestran, que, en media, incluso los reclutadores más experimentados eligen con acierto a los candidatos sólo en un 50 por ciento. Los programas informáticos y el reclutamiento electrónico pueden contribuir a conseguir mejores resultados —*cfr.* §8.7.

La complaciencia y la ufanía son características humanas. Que un trabajador se sienta satisfecho con su trabajo lo torna en el mejor garante de la senda hacia el éxito de la empresa. Las organizaciones deben aportar a los candidatos información realista, pertinente y no distorsionada, sobre el puesto de trabajo: las conocidas PTR (**propuestas de trabajo realista**) —*cfr.* §8.8—. Otra posibilidad son los **programas de referencia de empleados** —*cfr.* §8.9.

No hay duda que las buenas descripciones de los puestos de trabajo y de los candidatos ayudan a decidir su elección. Esquemas descriptivos en base a **competencias** (comportamientos, habilidades, conocimientos y atributos personales) —*cfr.* §8.11— y **roles de trabajo** —*cfr.* §8.12—. La posibilidad que defendemos en §8.13 es su representación como algún tipo de conjuntos borrosos, para trabajar con ellos bajo la máxima de mejora, sea de las competencias, sea de los desafíos situacionales que comprende el rol.

En §8.14 tratamos la **valoración de tareas** como un problema con múltiples criterios, múltiples subcriterios y múltiples expertos. Especificamos las tareas a partir de factores (criterios) y subfactores (subcriterios), suponiendo que cada tarea es un subconjunto borroso de tipo 2 de los factores, cada factor es un subconjunto borroso de tipo 2 de los subbfactores, valorando estos con palabras, de forma que los factores son, también, subconjuntos de nivel 2 de de los subfactores.

El problema de la **elección del X mejor valorado** (sea lo que sea X, siempre que sea representable mediante un conjunto borroso, ordinario o no) es el tema de §8.15. Según George J. Klir y Bo Yuan [46], la aproximación más frecuente para resolver un problema multicriterio borroso es mediante su conversión en un problema de decisión borroso con un solo criterio. Tras explorar dos vías: reducción de muchos criterio a uno —tanto con alternativas borrosas y ponderaciones numéricas (§8.15.1), como con alternativas borrosas de tipo 2 y ponderaciones borrosas (§8.15.2)— y reducción de muchos expertos a uno (§8.15.3), concluiremos con nuestra propuesta de algoritmo de elección del X mejor valorado (§8.15.4).

* * *

El proceso de elección debe ser transparente. Debemos potenciar la **comunicación abierta** de tal proceso, relatando todos los pormenores de la misma, poniendo a disposición de todos hasta los más mínimos detalles, de modo que nada quede entre bastidores. De este modo conseguiremos «cribar» esas campañas de críticas que a veces surgen tras un proceso de elección. Conseguiremos que sea prácticamente imposible justificar lo injustificable o diseñar procedimientos para justificar lo que ansiamos justificar.

> *«Tengo pleno derecho a proponer cualquier ejemplo que satisfaga las condiciones de su argumento y tengo fuertes sospechas de que lo que usted considera como ejemplos extraños y absurdos son de hecho ejemplos embarazosos y perjudiciales para su teorema.»*
> —Jean G. Darboux

La expansión hacia el exterior de tal apertura, una **comunicación abierta, interna y externa**, podría ser esencial para evitar el «pensamiento de grupo», tendencia que reprime activamente las opiniones minoritarias, buscando su adecuación a la opinión de un grupo dominante, con el posible problema acompañante de la perpetuación de ideas erróneas —*cfr.* Hogg [1040] (p. 96). No cabe duda de que las empresas consultoras cumplen una misión de centinela en estos casos.

Pero decimos «podría», porque sigue siendo una utopía —*u-topos:* no tiene lugar en el espacio—, aunque deseamos y esperamos enfervorecidamente que no sea una ucronía —*u-cronos:* no tiene lugar en el tiempo—.

La deplorable realidad de hecho es que, en muchas empresas, y mucho peor, en la administración, a la hora de contratar personal eventual, se dota a la comisión de elección de candidatos, de poder soberano para elaborar y planificar el proceso de elección, incluidos los criterios. ¡Así, cualquiera![23].

La **comunicación interna** en la empresa es esencial. Muchos autores han tratado —y lo seguirán haciendo— con detalle sus porqués —*cfr. v. gr.* GARCÍA [1041]; DEL POZO LITE [1042]; LA PORTE [1043]; ONGALLO [1044, 1045, 1046]—. Esta comunicación debe ser lo más **abierta** posible —*cfr.* HOGG [1040] (p. 22).

Pero lo que llevan en sí nuestras palabras es mayor, nos referimos a *la voz* —*cfr.* HIRSCHMAN [1047]— que permite conquistar el cambio desde dentro.

La comunicación interna (y posiblemente la externa) debe ser **en red** —*cfr.* §8.3.1—, esto es, en múltiples direcciones, sean las clásicas verticales descendentes (jerárquicas), verticales ascendentes (desde los subordinados), horizontales (entre compañeros) y diagonales (interdepartamentales) —*cfr.* Fig. 8.1.

Rómpanse, pues, todas las barreras, en favor de la participación total.

> *[...] concebir a la empresa como un sistema, como una estructura celular, como una red. Una red celular, con múltiples vías de comunicación, debe sustituir a la pirámide taylorista, centralizada.»*
> —Sergio VÁSQUEZ BRONFMAN [871]

El problema de la **comunicación interpersonal**, en su concepción más general, es amplio. CASTILLA DEL PINO defiende que la teoría de la comunicación interpersonal debe plantearse, ante todo, por razones pragmáticas, como *teoría de la mala comunicación* —*cfr.* CASTILLA DEL PINO [1008] (p. 97)—. Una segunda premisa, según él, viene dada por la necesidad de respuesta al siguiente interrogante: de lo que se pretende comunicar, *¿qué y cuánto se comunica y de qué modo?* Lo que sí es cierto es que muchas relaciones interpersonales se plantean sobre la base de que a la vista de que el logro de la comunicación sólo puede ser A, no comunicamos A', A'', ..., aunque se desease —*cfr.* CASTILLA DEL PINO [1008] (p. 74).

En su concepción más analítica, el **acto de comunicación interpersonal** adolece de dos problemas: por un lado, el receptor debe decidir *qué señal o conjunto de señales envió el emisor* (bajo las hipótesis, por ejemplo, de posible ruido en el canal de comunicación o ambigüedad o duda por parte del emisor), y por otro, deberá decidir *con qué señal, o conjunto de señales, ha de responder.*

La **comunicación interpersonal** es una sinergia iterativa de actos de comunicación interpersonales, donde los papeles de emisor y receptor se intercambian, acto tras acto. Al mensaje del emisor, puede sucederle una respuesta del receptor, la cual no es más que un mensaje de este nuevo emisor (el antiguo receptor), a la que puede sucederle una respuesta del nuevo receptor (el antiguo emisor), y así sucesivamente.

Cuando hay diálogo, se crea un **espacio de intersubjetividad**, un espacio íntimo que no «sólo incluye lo real, sino también lo posible (lo condicionalmente real), y lo negativo (lo imposible)» —*cfr.* LUHMANN [1048] (p. 80), *via* TAPIA URIBE [1049] (p. 164)—. Asociado a este espacio, puede considerarse otro, mutuamente interdependiente con el primero, donde se aloja la confusión y los sinsentidos. El continuo análisis de estos espacios por parte del emisor y del receptor, hace que surjan mensajes (respuestas) imprevistas y sorprendentes.



Cómo responder a estos mensajes inesperados, tanto si el emisor y el receptor se conocen previamente como si no, ha sido una de las metas de este capítulo. La otra ha sido considerar que las respuestas puedan modelarse como subconjuntos borrosos de un conjunto referencial de actitudes básicas.

[23] **En defensa de la MADRE.-** Pero, aunque los miembros de la comisión de elección sean meros árbitros en un proceso de elección establecido desde el exterior, ¿debe medirse a todo el mundo por el mismo rasero? Por ejemplo, como candidatos a un puesto de trabajo, ¿debería premiarse a una madre frente a una persona soltera, sin nadie a su cuidado? ¿Y a un padre? ¿Por igual? ¿Se primará más a una madre soltera o padre soltero, con tres hijos que a una madre casada o padre casado, que convive con su marido o mujer, y sólo tienen un hijo? ¿En qué medida? ¿Hasta qué edad? ¿Dependerá de que el marido o la mujer trabaje? ¿Dependerá de cuál sea su trabajo? ¿Daría igual si la persona soltera sin carga tuviese 23 años y la madre o el padre soltero, con bastante carga, sobre los 40? ¿Cómo se valora el resto de problemas posibles que tendrían, por el simple hecho de ser seres humanos y vivir en sociedad? Desde luego, estar soltero y sin nadie a tu cuidado, es una situación ideal para profundizar en tu formación. Si no se premia, es simplemente, por la dificultad que ello entraña, por nuestra inutilidad para averigüar lo que deberíamos conocer, en definitiva, por no ser señores del determinismo. Pero, insisto, debemos pensar en ello, sencillamente, porque si estamos aquí, es porque nuestra madre nos ha parido. Obviamente la realidad empresarial es otra. La realidad empresarial se llama beneficio. Pero, ¿y el acceso a los puestos en la administración, mediante un concurso-oposición? ¿No sería razonable incluir alguna prima en la fase de concurso? En la fase de concurso, como mérito (sin duda, ser madre, lo es). Ya se hacía antaño, y apuesto porque se volverá a hacer. Creo firmemente en su necesidad para reconciliar la vida laboral con la familiar. Por algún sitio hay que empezar, y yo propongo comenzar ayudando a las madres: Otros Méritos: ser madre (que no padre, que el padre no ha estado embarazado, no ha sufrido amenazas de aborto, no ha estado seis meses de la cama al sillón y del sillón a la cama, y por supuesto, no ha dado a luz).

En opinión de Niklas LUHMANN, el problema de la falta de sentido ocurre exclusivamente en el ámbito de los signos, pues implica una confusión en los sistemas simbólicos. De este modo, aquello que no ha sido posible procesar queda como algo oscuro, sin posibilidades de enlace ni comunicabilidad —*cfr.* TAPIA URIBE [1049] (p. 164).

Tras repasar algunas nociones y reflexiones sobre comunicación, desde el punto de vista de la teoría de la información —*cfr.* §8.16.1—, y sobre los actos de comunicación —*cfr.* §8.16.2—, nos hemos centrado en la **comunicación del resultado de la evaluación** al candidato elegido para desempeñar un puesto. Parece claro que no por haber tomado ya una decisión, debamos «correr» a anunciarla: hay que escoger el momento y lugar adecuados, y hasta que llegue dicho momento, habremos de abstenernos de cualquier comentario —*cfr.* DAILEY y DYER [138] (p. 97).

Comenzamos mostrando una visión borrosa del **intercambio verbal** que se produce en el momento de comunicar dicho resultado —*cfr.* §8.16.3—. Mostramos un ejemplo —*cfr.* Ejemplo 147—, en el que suponemos que el candidato elegido —el receptor— duda y solicita tiempo para pensarlo. La organización deberá contestar ante esta duda. Nuestra meta es deducir una contrarrespuesta de la organización, esto es, una vez comunicado el resultado al candidato, y éste ha respondido, cómo ha de contestar la organización, dependiendo de la respuesta dada por el aspirante elegido.

En la Sección §8.16.4, estudiamos el caso en que emisor y receptor se conozcan previamente y dispongan de **información previa**. Estudiamos el mismo ejemplo anterior, bajo este nuevo punto de vista —*cfr.* Ejemplo 148.



Para resolver ambos supuestos, hemos extendido las ideas de Ronald R. YAGER *al caso de respuestas* Φ*-borrosas, mediante aritmética de intervalos —cfr.* §3.5—, *considerando la extensión natural a intervalos de funciones reales factorizables —cfr.* §3.6.

Pero como veo que por ser tú tan cotilla
va de boca en boca y es la comidilla,
en vez de esconderla como haría el avestruz,
tomo mis medidas, hágase la luz.
Javier KRAHE, *Un burdo rumor*
[http://es.geocities.com/espinker/ipk11.html]

* * *

Sea por recortes presupuestarios, sea por lo que fuere, a veces pueden interesar candidatos polivalentes, es decir, futuros trabajadores capaces de ejecutar las tareas correspondientes a diferentes puestos de trabajo. En la literatura se refiere este asunto, como **«problema de la no especialización»** o **«problema del candidato comodín»**, fiel ejemplo, del sistema *just in time*: una apuesta por la desespecialización de los trabajadores y su conversión en empleados multifuncionales, ideado por los ingenieros de Toyota, en 1948.

En la primera parte de esta sección estudiamos cómo **elegir un candidato «comodín»**, de entre unos cuantos propuestos, cómo escoger a aquél poseedor de esa dádiva divina por la que quien la recibe, lo mismo vale «para un roto que para un descosido», a aquél capaz de desempeñar más de un trabajo de una colección de trabajos considerados.

En la sección §8.19.3 presentamos dos soluciones «clásicas» para problemas de elección mediante comparación de perfiles. Asumimos que trabajamos bajo una representación borrosa de los perfiles de cualidades, esto es, suponemos la existencia de un conjunto $\mathcal{J}$ de puestos de trabajo ofertados, un conjunto $\mathcal{A}$ de aspirantes a dichas ofertas, y un conjunto $\mathcal{C}$ de cualidades (competencias, cualificaciones, habilidades) que permite describir los perfiles profesionales de los trabajos y de los aspirantes, como subconjuntos borrosos, ordinarios o no, de $\mathcal{C}$. La idea subyacente a la segunda solución «clásica» también es aplicable cuando se trata de un problema de elección por valoración de candidatos, que, por consiguiente, puede resolverse por una técnica como TOPSIS (la operativa de TOPSIS cuando los perfiles son subconjuntos Φ-borrosos o, en general, subconjuntos borrosos de tipo 2, es la misma que la que relatamos en §10.13, para TOPSIS-0/1).

La sección §8.19.4 plantea un problema similar para el caso de grupos de trabajo. En ella abordamos un problema concreto, pero en un marco más general. A saber, suponemos que trabajamos con grupos de agentes, humanos o no (computacionales), en cualquier caso, en el sentido más amplio del término (DRAE): «Agente.- Persona o cosa que produce un efecto», y proponemos una medida de evaluación de la compatibilidad entre tales grupos y ciertos conjuntos de tareas, en referencia a la polivalencia que poseen tales grupos para

desarrollar una colección de trabajos o tareas. Para obtener una solución a este problema, y como alternativa a la representación de los perfiles de cualidades como subconjuntos borrosos ordinarios (de tipo 1) o Φ-borrosos de $\mathcal{C}$, se propone su descripción como subconjuntos borrosos de tipo 2 de $\mathcal{A}$ y de $\mathcal{J}$.

Hemos propuesto tres indicadores diferentes de tal compatibilidad, para tres situaciones diferentes. Como los resultados de los indicadores son numéricos, es posible comparar las compatibilidades de distintos grupos de agentes con respecto a la misma colección de tareas (como en el Ejemplo 152). Al mismo tiempo, esos valores numéricos nos sirven para hacernos una idea de la funcionalidad versátil global de cada grupo de agentes $\mathcal{A}$, respecto de las tareas consideradas en $\mathcal{J}$.

Desarrollos futuros incluirán:

- tratamiento de equipos, en vez de grupos, es decir, considerando relaciones de interdependencia entre agentes;
- extensión a un ambiente donde coexistan grupos, equipos, y combinaciones horizontales y verticales de ambos. Esto es, considerando interdependencias, no ya sólo horizontales (entre agentes, grupos y equipos, con un mismo nivel de responsabilidad), sino también verticales, o sea, entre agentes, grupos o equipos con diferentes niveles de responsabilidad y mando en la jerarquía de la organización.

Modelo de competencias de la IPMA

1. **Conocer la misión:** Comprender los propósitos de la organización incluyendo sus estatutos, sus clientes, sus productos o sus servicios, y sus medidas de la efectividad de la misión.Debe ser capaz de articular la relación entre los recursos humanos, actividades y éxito en la misión. No hay que apartar nunca la vista de aquellos factores que pudiesen tener un impacto futuro en la misión.
2. **Comprender el proceso empresarial y cómo cambiar para mejorar eficiencia y efectividad:** Las aproximaciones asignan las responsabilidades del programa de RR.HH. con una amplia perspectiva de cómo la empresa realiza sus actividades. Capaz de reconocer e implementar cambios para mejorar la eficiencia y la efectividad.
3. **Comprender a los clientes y la cultura organizacional:** Investiga las características únicas de las organizaciones de clientes con el objeto de asegurar que la asistencia y las consultas son apropiadas para las situaciones que se presentan. Se mantiene preocupado por las diferentes culturas y provee servicios que están hechos a medida para los requisitos de la cultura.
4. **Comprender el entorno del servicio público:** Mantenerse actualizado en actividades políticas y de legislación, que puedan afectar a la organización o a la comunidad RH. Perseguir entender tanto la intencionalidad, el espíritu, como la letra de las leyes, órdenes, y regulaciones, resultantes del proceso político, de manera que la implementación sea consistente con las consecuencias deseadas de los cambios políticos.
5. **Comprender el comportamiento de equipo:** Aplicar el conocimiento del comportamiento de equipo para ayudar a conseguir metas y logros organizativos. Mantenerse al corriente de nuevas investigaciones y resultados sobre la motivación humana y el trabajo den grupo, cuya aplicación pueda ser de interés para la organización.
6. **Comunicarse bien:** Expresar ideas e intercambiar información de manera clara y persuasiva. Hablar en términos de resultados empresariales y metas más que en términos técnicos de RR.HH. Comunicarse efectivamente con todos los niveles de la organización.
7. **Poseer la habilidad de ser innovador y crear un ambiente de riesgo:** Pensar «fuera de la caja». Crear y presentar nuevas aproximaciones que estén fuera del contexto de las políticas actuales, siempre que estén justificadas por las necesidades de la misión. Entender y aplicar técnicas diseñadas para impulsar la creatividad y las innovaciones. Crear un ambiente donde se valore el correr riesgos.
8. **Sopesar valores en conflicto:** Gestionar la concurrencia de prioridades y asignaciones de tareas, mediante la evaluación continua de las necesidades de la misión de la organización frente al trabajo pendiente. Mantenerse en contacto con el gerente senior para asegurar una total comprensión de las prioridades de la misión. Explicar las prioridades a los clientes clave para asegurar que entienden las razones para las decisiones tomadas en cuanto a las prioridades consideradas.
9. **Aplicar principios de desarrollo organizativo:** Mantenerse al día en temas de sociología, y estrategias de comportamiento humano, que pueden ser usadas para mejorar el rendimiento de la organización. Establecer estrategias que promuevan la formación dentro de la organización. Aconsejar la creación de oportunidades para la promoción de los empleados.
10. **Conocer la lógica de los sistemas empresariales:** Aplicar la lógica de los sistemas empresariales a los procesos de RR.HH., asegurando la consideración de todos los factores ambientales internos y externos que participan en los consejos y soluciones que se les proporcionan a los clientes.
11. **Aplicar tecnología de la información a la gestión de recursos humanos:** Mantenerse al tanto de las tecnologías actuales y emergentes que puedan mejorar la eficiencia o la efectividad de la G.RR.HH. dentro de la organización. Desarrollar propuestas de implementación de nuevas tecnologías basadas en RR.HH. dentro de la organización, siempre que estén justificadas.

Figura 8.5: *Modelo de competencias de la International Personnel Management Association* (IPMA)
—*Fuente:* Traducción propia de: http://www.ipma-hr.org/

Modelo de competencias de la IPMA (Cont.)

12. **Poseer buenas habilidades analíticas incluyendo la de pensar estratégicamente y creativamente:** Analizar una multiplicidad de datos e información procedente de diferentes fuentes y llegar a conclusiones lógicas. Identificar lo que no proporciona los datos disponibles y sugerir otras formas de obtener la información necesitada.
13. **Diseñar e implementar procesos de cambio:** Habilidad para reconocer los beneficios potenciales del cambio, y crear una infraestructura que soporte el cambio. Ser flexible y abierto a nuevas ideas e impulsar otras que valoren el cambio.
14. **Emplear habilidades de consulta y negociación incluyendo la resolución de conflictos:** Tomar la iniciativa para resolver o para ayudar a resolver problemas. Conocer varias técnicas de resolución de problemas y usarlas o recomendar su uso a las partes implicadas.
15. **Poseer la habilidad de construir relaciones de confianza:** Ser íntegro y demostrar un comportamiento profesional para ganarse la confianza del cliente. Respetar los compromisos alcanzados sobre una base oportuna, precisa y completa. Saber guardar las confidencias y no abusar del privilegio de poder acceder a información confidencial.
16. **Poseer habilidades de comerciales y de representación:** Persuadir a los consumidores internos y externos de las necesidades y los beneficios de ciertas acciones o programas. Saber exponer los pros y los contras acerca de un asunto y persuadir a las partes interesadas sobre el mejor camino a seguir. Asegurarse de que los clientes conocen la importancia del papel del RR. HH.
17. **Utilizar habilidades de construcción de consensos y coaliciones:** Potenciar la colaboración entre individuos y grupos utilizando habilidades para alcanzar consensos. Resumir objetivamente puntos de vista enfrentados. Incorporar todos los puntos de vista y ayudar a alcanzar una posición de consenso o de acuerdo. Reconciliar los desacuerdos con los empleados razonando y presentándoles los hechos. Utilizar las diferencias de opinión para crear soluciones alternativas a los problemas. Comprender cuándo y cómo elevar asuntos a empleados de mayor cargo, o sea, cuando las acciones tomadas sean inconsistentes con los requisitos legales o la política de estos últimos. Tener coraje para defender una postura si el asunto se considera importante para conseguir fines de la organización o para mejorar su reputación.
18. **Conocer las leyes y políticas de los RR. HH.:** Mantenerse actualizado y comprender los requisitos estatutarios y reguladores que afecten a los programas de RR. HH. Ver estos requisitos como verdaderas herramientas de ayuda.
19. **Enlazar los RR. HH. con el propósito de la organización y con los productos de servicio:** Entender las necesidades de la misión y contextualizarlas en términos de necesidades de las personas. Entender el papel de los RR. HH. dentro de la organización y adaptar los comportamientos de manera que sean consistentes con tal papel.
20. **Demostrar servicio de orientación al cliente:** Mantenerse al corriente de los cambios en los fines de la empresa y estar sensibilizado por las necesidades y preocupaciones de los clientes. Responder a las necesidades del cliente, a sus preguntas y preocupaciones de forma adecuada.
21. **Comprender, valorar y promover la diversidad:** Entender cómo puede contribuir potencialmente una mano de obra diversa en el éxito de la empresa. Estar alerta del impacto potencial de los procesos de RR. HH. y asegurarse de que las necesidades de diversidad han sido tenidas en cuenta.
22. **Practicar y promover comportamientos íntegros y éticos:** Comportarse de manera que se inspire confianza. Tratar a los clientes equitativa y cortésmente, y responder efectivamente a sus necesidades independientemente de la situación de la empresa o del cargo en ella. Promover y mantener un grado elevado de integridad.

Figura 8.6: *Modelo de competencias de la International Personnel Management Association* (IPMA) *(Continuación)*
—*Fuente:* Traducción propia de: http://www.ipma-hr.org/

9

Estudio ilustrativo: Prejuicios auguradores

«¿Quién es el hijo de mis padres que no es hermano mío?»
—Roger Dawson [43] (p. 288, de la edición española)

¿Por qué no respondemos de inmediato que yo? ¿Por qué buscamos relaciones extrañas de parentesco? Roger Dawson *dice que se debe al pensamiento estereotipado: «Los estereotipos se forman porque la mente busca siempre el camino más corto para una decisión, la vía de mínima resistencia. Es más fácil dar por supuesto que una persona o una situación se ajusta a las pautas de nuestra experiencia anterior, que tener que juzgar, partiendo de cero, a cada persona o situación según su realidad.» —cfr.* Dawson *[43] (p. 287, de la edición española).*
A lo largo y ancho de todas estas páginas, no paramos de hablar de prototipos, estereotipos, arquetipos, ideales, o modelos. Pero la realidad es que, la mayoría de las veces, no resulta nada sencillo definir un estereotipo. Por ejemplo, cuando se hace un diseño curricular, se trabaja con estereotipos o modelos de alumnos. Sin embargo, ¿quién definió —y cómo— tales estereotipos? (si los hay).
Animados por nuestra inquietud y por la lectura de «clásicos» como el maravilloso artículo de Douglas L. Medin*, Robert L.* Goldstone *y Arthur B.* Markman *[5], decidimos emprender nuestra propia investigación acerca de nuestra concepción apriorística, y mal que nos pese, prejuzgadora y estereotípica, de los alumnos a los que impartimos clases, corroborada por el rumor de pasillos que circula constantemente, sobre, al menos dos estereotipos, los alumnos «de la técnica» y los «de la superior». A tal estudio, dedicamos este capítulo.*

9.1 Prejuzgar o el arte de malpensar con estereotipos

«Una cosa es ser un dólar y otra cosa es parecer un dólar»
—Jerry Alan Fodor [97] (p. 36, de la edición española)

Estos juicios previos (**prejuicios**), lo son, a veces, en la segunda acepción del término (DRAE): «actitud de discriminación frente a una persona debido a su pertenencia a un grupo social determinado.»

Gordon W. Allport, en *The Nature of Prejudice* [1050] (p. 7), define prejuicio como «una actitud aversiva u hostil hacia una persona que pertenece a un grupo, simplemente porque pertenece a ese grupo, presumiéndose, por tanto, que posee las cualidades inaceptables atribuidas al grupo». Lee [1051] (pp. 10-11) define estereotipo como «una creencia favorable o desfavorable acerca de un individuo, derivada de atribuciones rígidas hechas a partir de la percepción de la pertenencia a un grupo. De manera más general, los estereotipos son supersimplificaciones, preconceptos sesgados de las características que tipifican a las personas, situaciones o grupos sociales, siendo además resistentes al cambio.» Por ello, el **pensamiento estereotipado** se caracteriza por ser «no mudable, rígido, demasiado categórico, no diferenciado, ..., demasiado simplista, e impreciso debido a que no se tiene en cuenta la variabilidad entre instancias individuales.» (p. 10).

El ser humano clasifica cualquier ente percibido atendiendo a varias estrategias de clasificación, construyendo así una multiplicidad de categorías, en las que encuadra descriptivamente a los entes. El **pensador abstracto** se caracteriza por considerar fluidas estas categorías, de manera que un individuo puede pertenecer a múltiples grupos a la vez. Sin embargo, el **pensador estereotipado** considera categorías rígidas—*cfr.* NCREL (*North Central Regional Educational Laboratory*) [1052].

Robert E. SLAVIN [1053] apunta el beneficio aportado por el **aprendizaje cooperativo** como catalizador del prejuzgar. En nuestro caso, los alumnos de la titulación Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas (I.T.I.S.) están mezclados con los alumnos de la titulación Ingeniería Informática (I.I.) Creemos que ésto favorece una reducción de los prejuicios. De hecho, de manera informal, y de palabra, durante nuestros 15 años de docencia, hemos preguntado a profesores y alumnos, y todo apunta a que consideran muy disímiles a los alumnos de la titulación Ingeniería Técnica en Informática de Gestión, con respecto a lo de cualquiera de las otras dos, y en particular, como no, con respecto a los de la I.I. ¿Qué pasaría si, durante la impartición del primer ciclo, en las asignaturas comunes, los grupos fuesen mixtos, con alumnos de las tres especialidades?

> *«Se puede hablar de la decadencia en la Unión Soviética de lo que en ruso se llama "tvorcheckaya intelligentsia", es decir, de la inteligencia creadora, pero allí se da la creciente valorización de una "tekhnicheskaya intelligentsia", esto es, de una élite de técnicos, a espaldas del igualitarismo nivelador, algún tiempo glorificado por la ideología comunista, al no poder ser considerada del todo lógica o racional, según el criterio marxista.»*
> —Gilberto FREYRE [1054] (p. 242).

Resulta ingenua, de todas todas, la pretensión de que el hombre pueda usar datos «puros», pues siempre estará esa **pureza contaminada con su pensamiento**. «Ningún cerebro es virgen de teoría, ni de praxis, ni de *intereses previos*», comenta Miguel FERNÁNDEZ PÉREZ [22] (p. 106). Quizás no sea oportuno decir, que una máquina, tal y como la entendemos actualmente, posee esa «inocencia», esa «ingenua» (objetiva) pureza.

Jesús ROMERO MORANTE [782] (p. 109) nos acerca un ejemplo, tomado a su vez, de David NOBLE [1055], en referencia a los prejuicios con respecto a la **introducción de la tecnología en las organizaciones**[1]. Éste demostró cómo fueron precisamente los prejuicios de los ingenieros norteamericanos sobre los obreros, los que impidieron que estos últimos pudiesen ejercitar tareas de reprogramación —sobre la marcha— de la maquinaria convencional, a la que se habían añadido ciertos controles vía software, lo que habría sido una alternativa mucho más barata y ventajosa, como el tiempo no ha tardado en verificar —*cfr. item* LUBAR [1056]; WINNER [892]; LATOUR [1057].

9.2 Modelos de alumnos: una experiencia que hace al caso

> *«Los estereotipos son perjudiciales porque niegan la existencia de la variabilidad dentro de una cultura y su gente y, al hacerlo, limitan lo que el observador puede ver y esperar de las personas observadas. Una de las maneras en que el estereotipar causa problemas tanto para profesores como alumnos proviene del hecho de que exista una única descripción, que forzosamente tenga que emplearse en cualquier circunstancia.»*
> —M. L. FULLER [1058] (pp. 142-143)

En este punto, más que continuar con una exposición discursiva, trataremos de relatar una experiencia que hemos llevado a cabo, que no a término, con nuestros alumnos.

Animados por nuestra inquietud y por la lectura de «clásicos» como el maravilloso artículo de Douglas L. MEDIN, Robert L. GOLDSTONE y Arthur B. MARKMAN [5], decidimos emprender nuestra propia investigación acerca de nuestra concepción apriorística de los alumnos a los que impartimos clases, corroborada por el rumor de pasillos que circula constantemente, sobre, al menos dos estereotipos, los alumnos «de la técnica» y los «de la superior». Además, ha de observar el lector que esta hipótesis se lanza fundamentada en los alumnos que suelen asistir a clase.

MEDIN, GOLDSTONE y MARKMAN [5] (p. 11) citan los trabajos de TVERSKY [239] y TVERSKY y GATI [1059], según los cuales las personas juzgan la similitud de Estados Unidos con respecto a México, menor que la similitud de México con respecto a los Estados Unidos. TVERSKY concluye que la generalidad juzga un objeto menos prominente como más similar a (y menos diferente de) un objeto prominente, que lo que juzga que es un objeto prominente a uno menos prominente. También citan el estudio de KITAYAMA, MARKUS, TUMMALA, KUROKAWA y KATO [1060], por el que deducen que los estudiantes occidentales juzgan que la similitud de ellos con respecto a los demás es sustancialmente menor que la similitud de los demás con respecto a ellos (ellos piensan que se «parecen» a los demás en menor medida que lo que los demás se «parecen» a ellos). Los estudiantes orientales piensan justo lo contrario.

[1] A propósito de la tecnología en las organizaciones, puede dirigirse el lector a la sección §8.3.2 de la presente Tesis.

Nuestro estudio se sitúa también en línea con los trabajos de Carmen Peme de Aranega, Sandra Viviana Gerbaudo, Adriana Ferreira de Rubio y Echevarría [1061], quienes investigan las concepciones didácticas y epistemológicas del profesorado de ciencias experimentales, mediante su cuestionario ICDE (*Inventario de Creencias Didácticas y Epistemológicas*), de 48 items —*cfr. item* Mellado, Peme de Aranega, Redondo y Bermejo [1062].

Lo que nos faltaba era un diseño de encuesta. La entrevista con el Dr. Carlos Ongallo —si bien ocurrió por su amplitud de conocimientos en los temas relacionados con recursos humanos— fue providencial. Él nos presenta el trabajo de Donald E. Super (1911-1994), *Work Values Inventory* (WVI) [1063], múltiples referencias al cual pueden encontrarse en diversas direcciones web dedicadas a la búsqueda de trabajo, por ejemplo: `http://www.law2.byu.edu/Career_Services/pdf/SelfAssessmentExercieses.pdf`

El WVI mide 15 valores (actitudes y motivaciones) con respecto al trabajo —*cfr.* Tabla 9.2—. Lo que se requiere de los encuestados es que asignen un grado de importancia, de una escala de 5 valores, a 45 cuestiones sobre su satisfacción en un trabajo en relación a los 15 valores (3 cuestiones por cada valor). Por lo general, la encuesta tarda en responderse en torno a los 15 a 20 minutos. La traducción, tanto de los 15 valores, como de los 45 atributos, así como la encuesta para los alumnos —*cfr.* Anexo 1 (pág. 264)— nos ha sido suministrada por el Dr. Carlos Ongallo.

		***Work Values Inventory* (WVI)**
Acrónimo		**Valor relacionado con el trabajo (*work value*)**
GE	$\rightleftharpoons$	Ganancias económicas (*economic returns*)
SG	$\rightleftharpoons$	Seguridad (*security*)
RS	$\rightleftharpoons$	Relaciones con el superior (*supervisory relations*)
AM	$\rightleftharpoons$	Ambiente (*surroundings*)
AL	$\rightleftharpoons$	Altruismo (*altruism*)
EX	$\rightleftharpoons$	Éxito (*achievement*)
CM	$\rightleftharpoons$	Compañeros (*associates*)
EI	$\rightleftharpoons$	Estímulo intelectual (*intellectual stimulation*)
PR	$\rightleftharpoons$	Prestigio (*prestige*)
CR	$\rightleftharpoons$	Creatividad (*creativity*)
ES	$\rightleftharpoons$	Estética (*aesthetics*)
IND	$\rightleftharpoons$	Independencia (*independence*)
VR	$\rightleftharpoons$	Variedad (*variety*)
DR	$\rightleftharpoons$	Dirección (*management*)
EV	$\rightleftharpoons$	Estilo de vida (*way of life*)

Tabla 9.1: *Los 15 valores relacionados con el trabajo medidos por el WVI.*

Como comentábamos, con esta experiencia, buscamos comprobar lo acertado o no de nuestros supuestos apriorísticos sobre nuestros alumnos, sobre la representación estereotipada que poseemos de ellos.

En el caso que nos ocupa, los resultados son muy diferentes dependiendo de quien «defina» el estereotipo: profesores, otros alumnos o los propios alumnos cuyos perfiles de características son los que serán estereotipados. Esta conclusión proviene de la experiencia —que pasamos a relatar de inmediato— llevada a cabo, que no a término, con nuestros alumnos.

Ante todo, mostrar nuestro agradecimiento a todos aquellos compañeros, estudiantes y profesores, cuyos nombres deben quedar velados por el obligado secreto al que nos debemos. Señalar que la invitación a nuestros colegas docentes no se hizo en calidad de objetos de la evaluación, sino de sujetos copartícipes en la misma. En fin, gracias a todos los participantes, por el tiempo que dedicaron a la autorreflexión.

Las personas en estudio son los alumnos de primer curso de las titulaciones Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas (I.T.I.S.) e Ingeniería Informática (I.I.), a los que imparto una asignatura de Cálculo. La encuesta se ha realizado durante dos cursos académicos, entre los alumnos que asisten asíduamente a clase. En total, han participado las siguientes personas:

- 19 profesores, encuestados durante el curso 2001-2002;
- 41 alumnos de I.T.I.S. (21 del 2002-2003 y 20 del curso 2001-2002), y
- 67 de I.I. (39 del 2002-2003 y 28 del curso 2001-2002).

9.3 Esas personas opinan que la estética es moderadamente importante

«La sinceridad es una expansión del corazón. Se da en muy pocas personas, y la que vemos ordinariamente no es más que un hábil disimulo para atraerse la confianza de los demás.»
—François-Alexandre-Frédéric de La Rochefoucauld-Liancourt <Máximas>

El Anexo 1 (pág. 264) recoge la encuesta correspondiente al WVI, que rellenaron los alumnos. Éstos asignan un valor $v_{j,i}^m$, para cada aspecto de cada motivación profesional, en una escala $1-5$, correspondiente a la escala lingüística: nada importante (NI, *unimportant*), poco importante (PI, *of little importance*), moderadamente importante (MI, *moderately important*), importante (I, *important*) o muy importante (MyI, *very important*).

Persona: p_j		
Motivación: Estímulo intelectual (EI)		
Identificador del Aspecto	**Un tipo de trabajo o tarea en el que tú ...**	Puntuación
1	tienes que resolver constantemente nuevos problemas	$v_{j,1}^m$
23	te sientes estimulado y desafiado intelectualmente	$v_{j,2}^m$
38	tienes que estar mentalmente alerta	$v_{j,3}^m$

Tabla 9.2: *Los 15 valores relacionados con el trabajo medidos por el WVI.*

El algoritmo de estimación del valor borroso $\widehat{e_L^m}$ correspondiente a la motivación profesional m —es decir, si el conjunto de personas encuestadas considera que la motivación profesional m, es nada importante, poco importante, moderadamente importante, importante o muy importante—, es:

$$
\begin{aligned}
P &:= \text{conjunto de personas encuestadas} \\
M &:= \text{conjunto de motivaciones profesionales} \\
n &:= |P| \\
\Sigma_j^m &:= \sum_{i=1}^{3} v_{j,i}^m \quad (\forall m \in M) \\
v^m &:= \frac{1}{n}\left(\Sigma_1^m + \Sigma_2^m + \ldots + \Sigma_n^m\right) \\
\widehat{e_L^m} &:= \arg\max_{e_L \in L} e_L(v^m)
\end{aligned}
$$

donde, como vemos, introducimos borrosidad en los valores medios v^m. Para ello, utilizamos números borrosos triangulares[2]. Como el rango de las sumas parciales correspondientes a cualquier motivación profesional es $\mathcal{R} = \{3, 4, \ldots, 15\}$, asumimos que estos valores borrosos vienen dados por los números borrosos triangulares que figuran en la Tabla 9.3, y que gráficamente mostramos en la Fig. 9.1.

	a	b	c
nada importante	0	3	6
poco importante	3	6	9
moderadamente importante	6	9	12
importante	9	12	15
muy importante	12	15	18

Tabla 9.3: *Parámetros de los números borrosos triangulares, miembros de la partición que empleamos.*

De este modo, al ser $\mathcal{R} = \{3, 4, \ldots, 15\}$, tenemos que:

[2]Un **número borroso triangular** es una función dependiente de tres parámetros (los vértices de un triángulo):

$$T(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

cuyo significado es que si $e_L(x) = T(x; a, b, c)$, entonces, cuando la evidencia simple x es justamente b, hay certeza total de que el término lingüístico asociado a x debe ser e_L.

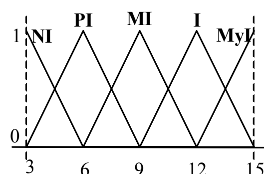


Figura 9.1: *Partición borrosa de números borrosos triangulares:* nada importante (NI), poco importante (PI), moderadamente importante (MI), importante (I), muy importante (MyI)
—*Fuente:* Elaboración propia.

$$\begin{aligned} {}^{0.5}\mathrm{NI} \cap \mathcal{R} &= \{3, 4\} \\ {}^{0.5}\mathrm{PI} \cap \mathcal{R} &= \{5, 6, 7\} \\ {}^{0.5}\mathrm{MI} \cap \mathcal{R} &= \{8, 9, 10\} \\ {}^{0.5}\mathrm{I} \cap \mathcal{R} &= \{11, 12, 13\} \\ {}^{0.5}\mathrm{MyI} \cap \mathcal{R} &= \{14, 15\} \end{aligned}$$

Observe el lector que debemos hacer que la entropía «caiga» cuanto más tarde mejor. Entropía como información. Podríamos haber introducido borrosidad en los valores Σ_j^m. Pero ello nos habría hecho perder información nítida (aunque realmente lo que ocurre es que el punto de partida es una sobrevaloración). Veamos un ejemplo. Imaginemos que hubiésemos encuestado a 5 alumnos, de manera que para la motivación profesional «creatividad» (CR), hubiesen evaluado: $\Sigma_1^{\mathrm{CR}} = 5$, $\Sigma_2^{\mathrm{CR}} = 8$, $\Sigma_3^{\mathrm{CR}} = 11$, $\Sigma_4^{\mathrm{CR}} = 11$, y $\Sigma_5^{\mathrm{CR}} = 14$, entonces, $v^m = 9.8$. Por ello:

$$\arg\max_{e_L \in L} e_L(9.8) = \mathrm{MI}$$

En cambio, si $\Sigma_1^{\mathrm{CR}} = 6$, $\Sigma_2^{\mathrm{CR}} = 12$, $\Sigma_3^{\mathrm{CR}} = 14$, $\Sigma_4^{\mathrm{CR}} = 13$, $\Sigma_5^{\mathrm{CR}} = 9$, entonces, $v^m = 10.8$, y por tanto:

$$\arg\max_{e_L \in L} e_L(10.8) = \mathrm{I}$$

Sin embargo, si hubiésemos introducido borrosidad, cualquiera de las dos evaluaciones corresponde al multiconjunto de valores borrosos $\{\mathrm{PI}, \mathrm{MI}, \mathrm{I}, \mathrm{I}, \mathrm{MyI}\}$, siendo su conjunto borroso medio, el número borroso triangular $T(7.8, 10.8, 13.8)$. En este punto, parece que el sentido común nos lleva a pensar en aquellas funciones de disimilitud o distancia que corroboren que el valor borroso de la partición más cercano a $T(7.8, 10.8, 13.8)$ es importante (I).

La Tabla 9.4 muestra las medias y las desviaciones de las respuestas de los alumnos en cuanto a cómo se auto-perciben. En ella podemos observar que una amplia mayoría de las motivaciones profesionales (ITIS$_a$ (02-03): 87 por ciento; II$_a$ (02-03): 60 por ciento; ITIS$_a$ (01-02): 93 por ciento; II$_a$ (01-02): 93 por ciento) tienen una desviación típica de menos de dos puntos y medio con respecto a una escala de trece valores. Podemos concluir, por tanto, que los alumnos muestran un alto grado de acuerdo para la mayoría de las motivaciones profesionales consideradas.

La Fig. 9.2 muestra los perfiles correspondientes a los alumnos de I.T.I.S. y a los de I.I., vistos por sí mismos. Muestran cómo los alumnos se perciben (que, por supuesto, no tiene por qué coincidir con cómo son en realidad), esto es, los que podríamos denominar **perfiles auto-perceptuales** de los alumnos, ITIS$_a$ e II$_a$. En la figura, también aparece representada

Los perfiles auto-perceptuales ITIS$_a$ e II$_a$ se diferencian sólo en 3 categorías (PR, VR y DR), y además, la diferencia es mínima (los sobrevalores son contiguos). Observándolos, podríamos aventurarnos a presumir que los alumnos de I.T.I.S., con respecto a sus compañeros de I.I., consideran:

- menos importantes, los valores relacionados con la dirección (DR) y la variedad (VR);
- más importante, el valor relacionado con el prestigio (PR);
- y el resto, por igual.

Tabla de medias y desviaciones								
	02-03				01-02			
	ITIS$_a$		II$_a$		ITIS$_a$		II$_a$	
Valor	Med	Dev	Med	Dev	Med	Dev	Med	Dev
Ganancias económicas (GE)	11.09	2.07	11.66	2.47	10.82	2.27	11.57	1.51
Seguridad (SG)	12.14	2.47	11.77	2.69	12.65	1.95	12.53	2.36
Relaciones con el superior (RS)	12.29	2.08	10.95	2.60	11.40	1.91	12.14	1.56
Ambiente (AM)	12.09	2.04	11.44	2.20	10.83	1.10	11.72	1.13
Altruismo (AL)	13.09	1.61	11.23	2.97	10.27	1.79	10.28	2.67
Éxito (EX)	12.62	1.86	11.46	2.09	12.21	1.64	11.59	1.97
Compañeros (CM)	13.14	1.46	12.62	2.25	12.00	1.58	11.43	2.30
Estímulo intelectual (EI)	10.57	2.40	11.07	1.66	10.42	2.07	10.71	1.81
Prestigio (PR)	10.52	1.89	10.28	2.49	9.84	2.49	10.16	2.47
Creatividad (CR)	11.95	2.11	11.69	2.17	11.03	2.66	11.54	1.82
Estética (ES)	9.10	1.89	9.15	2.54	8.58	0.55	8.29	1.66
Independencia (IND)	11.52	2.14	12.46	1.93	10.21	1.79	11.86	1.77
Variedad (VR)	10.10	2.90	10.71	2.79	9.66	1.82	10.55	2.27
Dirección (DR)	7.19	2.73	7.77	2.93	6.22	2.33	6.86	2.08
Estilo de vida (EV)	13.62	1.53	13.59	1.76	13.20	2.49	13.28	2.21

Tabla 9.4: *Tabla de medias y desviaciones correspondientes a los diferentes valores y a sus diferentes percepciones*

9.4 Pero nosotros pensamos que piensan que la estética no es importante

«Es mi opinión, y la comparto..»
—Henri MONNIER <Memorias del señor Joseph Prudhomme>

A partir de la encuesta anterior, elaboramos una encuesta para el profesorado —*cfr.* Anexo 2 (pág. 267)—, con la que pretendemos averiguar si los profesores tenemos en mente determinados estereotipos sobre los alumnos de I.T.I.S. y de I.I.

Lo importante es la leyenda: «se trata de que valoréis en la medida en que penséis que nuestros estudiantes creen poseerlas.»

Por otro lado, pasamos otra encuesta a los alumnos, con la pretensión de averiguar cómo creen, los alumnos de I.T.I.S., que son los de I.I., y viceversa, respecto a los atributos contemplados. Nos referiremos a ésta como encuesta «cruzada».

Para ello, les pasamos de nuevo la primera encuesta con la leyenda: «se trata de que valoréis en la medida en que penséis que vuestros compañeros de la otra especialidad, creen poseerlas.»

La escala que hemos utilizado en todos los casos, es un ejemplo de las conocidas como escalas de (Rensis) LIKERT [1064]. La idea, para un futuro, quizás sea usar un **diferencial semántico** «continuo» —*cfr.* OSGOOD, SUCI y TANNENBAUM [912]:

Nada importante Muy importante

En relación con la encuesta «cruzada» para los alumnos, también hemos considerado la posibilidad de lanzar una afirmación al alumno, por ejemplo: «nuestros compañeros estudiantes de I.I. piensan que el altruismo, como valor asociado al trabajo, es importante», y que éste respondiese según considere que sea su grado de aceptación de la misma: totalmente de acuerdo, en parte de acuerdo, dudo – estoy indeciso, en parte en desacuerdo y en total desacuerdo. Pero aquí hay en juego dos escalas, pues también participa la correspondiente a nada importante,..., muy importante, y esto hace que el «juego mental» sea mucho más difícil —*cfr.* MILLER [774].

La obtención de los perfiles sigue un procedimiento similar al explicado en la sección anterior. La Fig. 9.3 muestra los perfiles $ITIS_p$ e II_p, correspondientes a los alumnos de I.T.I.S. y a los de I.I., vistos por los profesores. Muestran cómo los alumnos son percibidos por los profesores, esto es, los que podríamos denominar **perfiles perceptuales *según los profesores***.

De este modo, disponemos de tres perfiles prototipos para cada especialidad X, el proporcionado por los

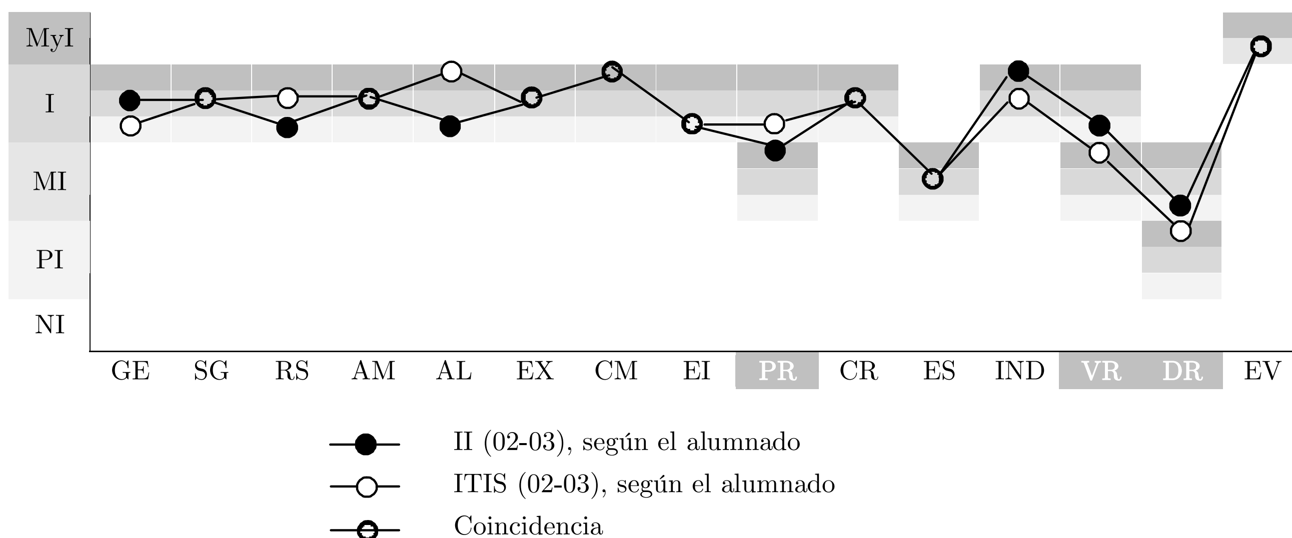


Figura 9.2: *Perfiles $ITIS_a$ e II_a, correspondientes a los alumnos de I.T.I.S. y a los de I.I., vistos por sí mismos. Al mostrar cómo los alumnos se perciben a ellos mismos, hemos decidido llamarlos* perfiles auto-perceptuales. *Observemos que se diferencian en 3 categorías, aunque con una intensidad muy baja. Código de colores:* blanco *(coinciden en el grado, aunque no coincidan en el subgrado), 0.25 de* negro *(grados distintos, 0 subgrados de diferencia), 0.35 de* negro *(grados distintos, 1 subgrado de diferencia), 0.65 de* negro *(grados distintos, 2 subgrados de diferencia),* negro *(grados distintos, más de 2 subgrados de diferencia).*
— *Fuente:* Elaboración propia.

alumnos de la propia especialidad X_a, el proporcionado por el profesorado X_p, y el proporcionado por los alumnos de la otra especialidad X_Y.

Comparando los **perfiles perceptuales según los profesores**, ITIS$_p$ e II$_p$, respectivamente, observamos que se diferencian en 8 categorías —*cfr.* Fig. 9.3—. Parece que los profesores opinan que a los alumnos de ITIS, con respecto a sus compañeros de II, les interesa:

- menos, la creatividad, el prestigio, la dirección, la independencia, el estilo de vida, la variedad y el estímulo intelectual;
- más, el altruismo;
- y por igual, el ambiente, la seguridad, las ganancias económicas, las relaciones con el superior, los compañeros, el éxito y la estética.

Las Figs. 9.4 e 9.5 muestran las comparaciones entre los perfiles ITIS$_a$ con ITIS$_p$, y II$_a$ con II$_p$, respectivamente. Observamos que ITIS$_a$ y ITIS$_p$ se diferencian en 10 categorías, mientras que II$_a$ y II$_p$, en 7. Podríamos aventurarnos a presumir que los profesores «han acertado» más con respecto a la opinión de los alumnos de II.

Obsérvese, además, que ITIS$_a$ se diferencia de II$_p$, en 5 categorías, mientras que II$_a$ y ITIS$_p$ en 8. Es decir, que II$_p$ se parece más a ITIS$_a$, que a II$_a$, y que además, ITIS$_a$ se parece más a II$_p$ que a ITIS$_p$.

Por último, la opinión de los alumnos sobre la opinión de sus compañeros. La Fig. 9.6 muestra los perfiles ITIS$_{II}$ e II$_{ITIS}$, correspondientes a la opinión de los alumnos de I.I. acerca de lo que creen que piensan sus compañeros de I.T.I.S. y a la de los de I.T.I.S. acerca de lo que creen que piensan sus compañeros de I.I., respectivamente.

Observando las Figs. 9.4, 9.5 e 9.6, vemos que:

- la opinión de los alumnos de I.I. se aproxima más a la que los de I.T.I.S. tienen de sí, que a la que los profesores tienen de ellos (ITIS$_a$ e ITIS$_{II}$ se diferencian en 8 categorías) aunque, cuantitativamente, la diferencia de opiniones no sea tan grande (ITIS$_p$ e ITIS$_{II}$, se diferencian en 6 categorías);

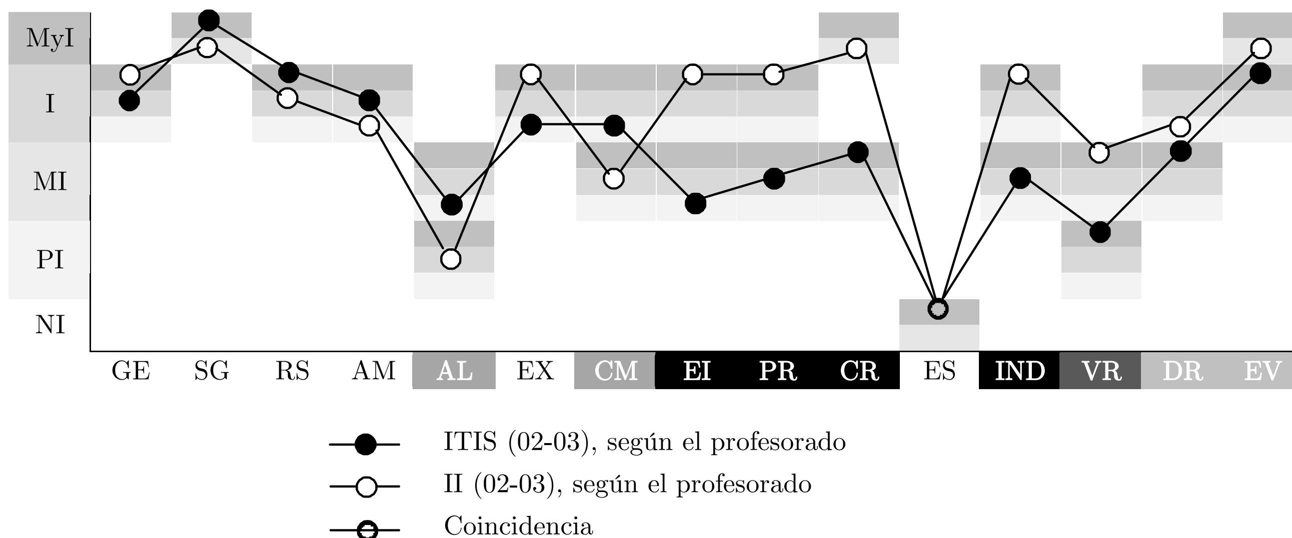


Figura 9.3: *Perfiles $ITIS_p$ e II_p, correspondientes a los alumnos de I.T.I.S. y a los de I.I., vistos por los profesores. Muestran cómo los alumnos son percibidos por los profesores, esto es, los* perfiles perceptuales *según los profesores. Observemos que se diferencian en 9 categorías, aunque con desigual intensidad. Código de colores:* blanco *(coinciden en el grado, aunque no coincidan en el subgrado), 0.25 de* negro *(grados distintos, 0 subgrados de diferencia), 0.35 de* negro *(grados distintos, 1 subgrado de diferencia), 0.65 de* negro *(grados distintos, 2 subgrados de diferencia),* negro *(grados distintos, más de 2 subgrados de diferencia).*
— *Fuente:* Elaboración propia.

- cuantitativamente, los alumnos de I.T.I.S. y los profesores aciertan o yerran por igual con respecto a conocer la opinión que tienen de sí los alumnos de I.I. (7 son las categorías en las que se diferencian, tanto II_a e II_{ITIS}, como II_p e II_{ITIS});
- los alumnos de I.T.I.S. ven más cercanos a ellos a los alumnos de I.I., que lo que estos últimos ven a los de I.T.I.S. (II_a e ITIS_{II}, se diferencian en 7 categorías, mientras que ITIS_a e II_{ITIS} lo hacen en 5).

Resulta curioso, por ejemplo, que tanto los alumnos de I.T.I.S. como los de I.I., valoren como muy importante (MyI) el estilo de vida (EV), y sin embargo piensen que los otros sólo crean que es importante (I). La «máquina» de la verdad —*cfr.* §9.8— se encargará de «poner cada cosa en su sitio».

Hemos de decir que tanto los profesores como los alumnos muestran un alto grado de acuerdo para la mayoría de las motivaciones profesionales consideradas. Para una amplia mayoría de tales motivaciones profesionales, la desviación típica es de menos de dos puntos y medio con respecto a una escala de trece valores: para las opiniones de los profesores, un 60 por ciento para ITIS_p y un 67 por ciento para II_p; y para las opiniones «cruzadas» de los alumnos, un 73 por ciento para ITIS_{II} y un 80 por ciento para II_{ITIS}.

9.5 Conclusiones válidas si respuestas sinceras

«No se puede a la vez ser sincero y parecerlo.»
—André Gide <El inmoralista>

La validez de los resultados —y por tanto, de las conclusiones que podamos extraer de ellos— depende de lo sinceros que hayan sido los entrevistados al responder a las encuestas. Un fenómeno asociado es el conocido como efecto de **«deseabilidad social»**: las personas entrevistadas tienden a ajustarse al patrón que ellos creen que debe ser el «ideal». En nuestro caso, por ejemplo, surgió la pregunta entre los alumnos de si podían mentir, y era en el sentido que acabamos de comentar. Argumentaban que en la situación real de que los estuviese encuestando una empresa, posible empleadora, ellos tratarían de ajustarse al patrón que suponían fuese el demandado.

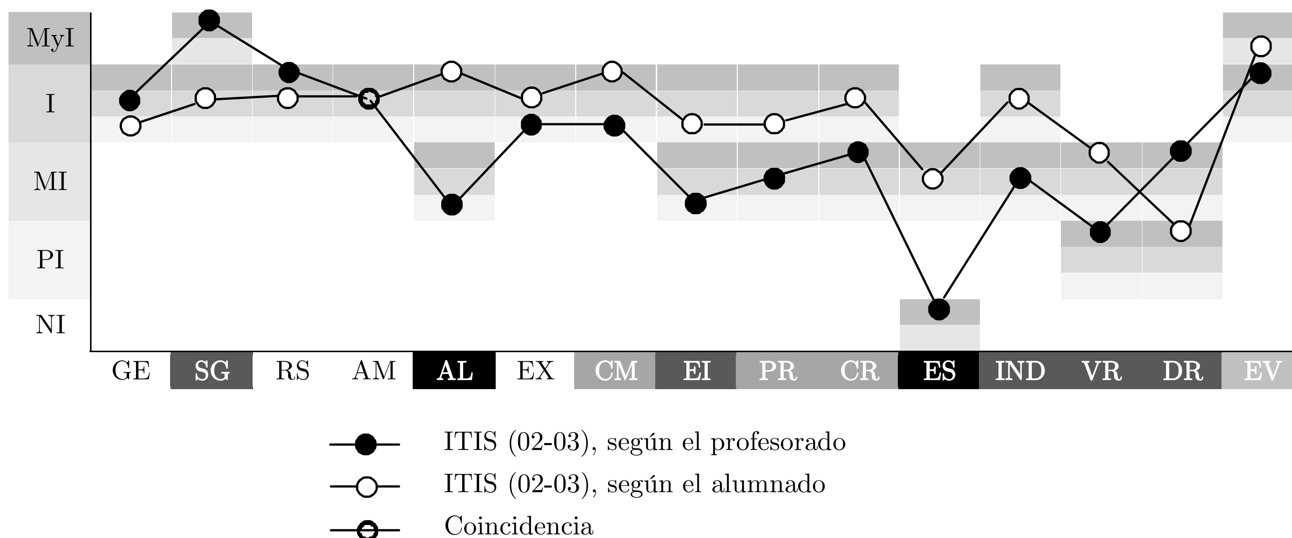


Figura 9.4: *Perfiles ITIS (02-03), según los alumnos y los profesores. Observemos que se diferencian en 11 categorías, aunque con desigual intensidad. Código de colores:* blanco *(coinciden en el grado, aunque no coincidan en el subgrado), 0.25 de* negro *(grados distintos, 0 subgrados de diferencia), 0.35 de* negro *(grados distintos, 1 subgrado de diferencia), 0.65 de* negro *(grados distintos, 2 subgrados de diferencia),* negro *(grados distintos, más de 2 subgrados de diferencia).*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Ante esto, lo que hicimos fue seguir la recomendación de tantos, entre ellos de León y Montero [1065] (p. 91): «Una forma de tratar de corregir el efecto de la deseabilidad social es alertar al encuestado sobre esta tendencia y rogarle máxima sinceridad en las cuestiones que puedan ser más suceptibles (*sic*) al fenómeno.»

Les explicamos que están ante una actividad de «elección forzosa», o sea, que deben elegir uno y sólo uno de los calificativos para cada cuestión (aunque en una experiencia posterior podrían elegir varias, hasta el extremo de si alguien no tiene la más remota idea de qué contestar, podría elegir el intervalo [nada importante, muy importante]).

Sugerimos que no piensen demasiado: casi lo mejor sería que siguieran sus primeros impulsos.

En la sección §17.12 (pág. 449) de la presente Tesis, exponemos otra idea para intentar corroborar la sinceridad.

9.6 Prosiguiendo con las cautelosas conclusiones

«Lo mejor de lo nuevo es que responde a un deseo antiguo.»
—Luc de Capliers, Marqués de Vauvenargues <Reflexiones y máximas>

Aunque lo anterior podría conducirnos a determinadas conclusiones, no debemos precipitarnos, en absoluto. Hasta el momento de presentar esta Tesis, hemos realizado dos *estudios transversales sucesivos*[3]: uno, realizado más recientemente —con los alumnos del curso 02-03—, y que hasta aquí hemos comentado, y otro anterior, durante el curso 01-02. La característica fundamental de composición de las muestras ha sido la misma, una de alumnos de I.T.I.S. y la otra de alumnos de I.I. La hipótesis también ha sido la misma: la existencia de diferencias notables entre los alumnos de las especialidades de I.T.I.S. y de I.I.

Los **perfiles auto-perceptuales** ITIS_a e II_a, correspondientes al curso 01-02, se diferencian únicamente en 2 categorías. De los resultados que obtuvimos, nos aventuraríamos a presumir que los alumnos de ITIS, con

[3] A la hora de trabajar con encuestas, el diseño o plan de la misma se encuadrará en una de las dos categorías siguientes. Un **diseño transversal** tiene como meta describir una población en un momento dado. La finalidad de un **diseño longitudinal**, en cambio, es observar el cambio en una población. La manera más sencilla de entender un diseño longitudinal es imaginar una sucesión de diseños transversales —*cfr.* León y Montero [1065] (p. 95).

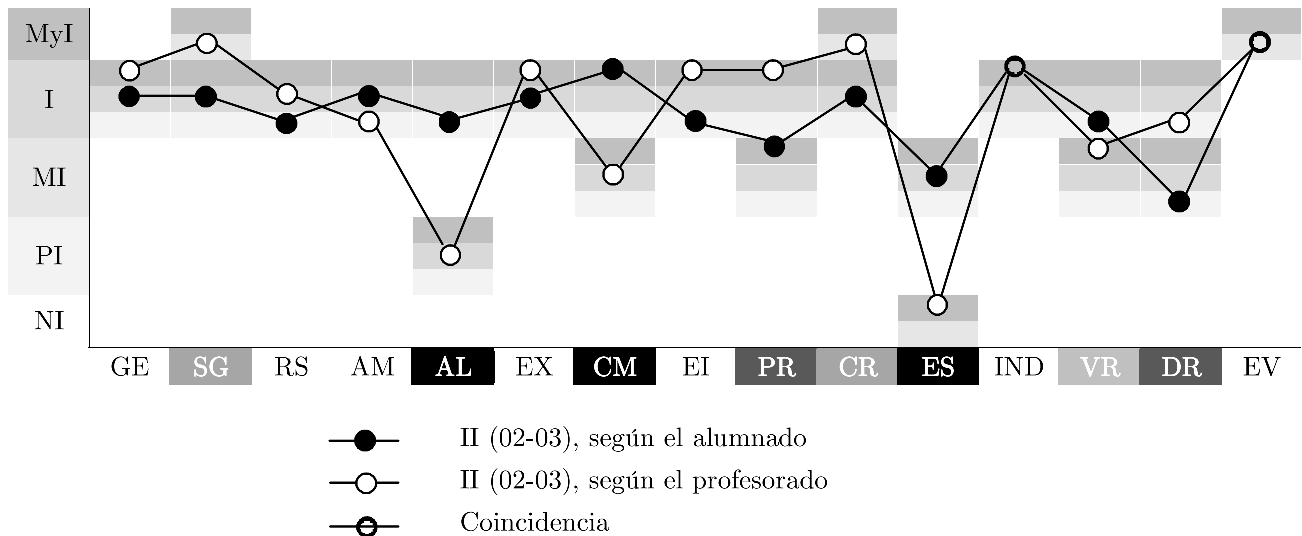


Figura 9.5: *Perfiles II (02-03), según los alumnos y los profesores. Observemos que se diferencian en 8 categorías, aunque con desigual intensidad. Código de colores:* blanco *(coinciden en el grado, aunque no coincidan en el subgrado), 0.25 de* negro *(grados distintos, 0 subgrados de diferencia), 0.35 de* negro *(grados distintos, 1 subgrado de diferencia), 0.65 de* negro *(grados distintos, 2 subgrados de diferencia),* negro *(grados distintos, más de 2 subgrados de diferencia).*
— *Fuente:* Elaboración propia.

respecto a sus compañeros de II, del mismo curso académico, consideran:

- menos importantes, los valores de independencia y variedad;
- y el resto, por igual.

Es de notar que al comparar los **perfiles auto-perceptuales** de los alumnos de la **misma especialidad** pero **diferente curso académico** —esto es, longitudinalmente[4]—, observamos, para los alumnos de ITIS, que los del curso 01-02, con respecto a los del curso 02-03, consideran:

- menos importante, el prestigio, la independencia, el altruismo y el estilo de vida;
- e igual de importantes, el resto.

En cuanto a los alumnos de II, los del curso 01-02, con respecto a los del curso 02-03, consideran:

- menos importante, la dirección, el altruismo y el estilo de vida;
- e igual de importantes, el resto.

Los perfiles ITIS_a e ITIS_p, correspondientes al curso 02-03, se diferencian en 10 categorías (CR, SG, *PR*, DR, *IND, AL, EV*, ES, VR y EI). Los perfiles ITIS_a e ITIS_p, correspondientes al curso 01-02, se diferencian en 6 categorías (CR, SG, DR, ES, VR y EI). Los perfiles II_a e II_p, correspondientes al curso 02-03, se diferencian en 7 categorías (CR, SG, PR, DR, AL, ES y VR). Los perfiles II_a e II_p, correspondientes al curso 01-02, se diferencian en 8 categorías (CR, SG, PR, DR, AL, *EV*, ES y VR). (Hemos destacado en *itálica* las no coincidencias entre cursos académicos diferentes para una misma especialidad.)

Por otro lado, en lo correspondiente al curso 01-02, ITIS_a se diferencia de II_p, en 8 categorías (CR, SG, PR, DR, IND, AL, EV y ES), mientras que II_a y ITIS_p en 7 (CR, SG, DR, IND, ES, VR y EI). Es decir, que II_p se parece más o menos por igual, tanto a ITIS_a como a II_a, mientras que ITIS_a se parece más a ITIS_p que a II_p.

[4]Observe el lector la presencia de alumnos repetidores, y por tanto la necesidad, en un estudio más exhaustivo de subsumir un (sub-)**diseño de panel**, esto es, un (sub-)diseño longitudinal, en el que se entrevista a las mismas personas.

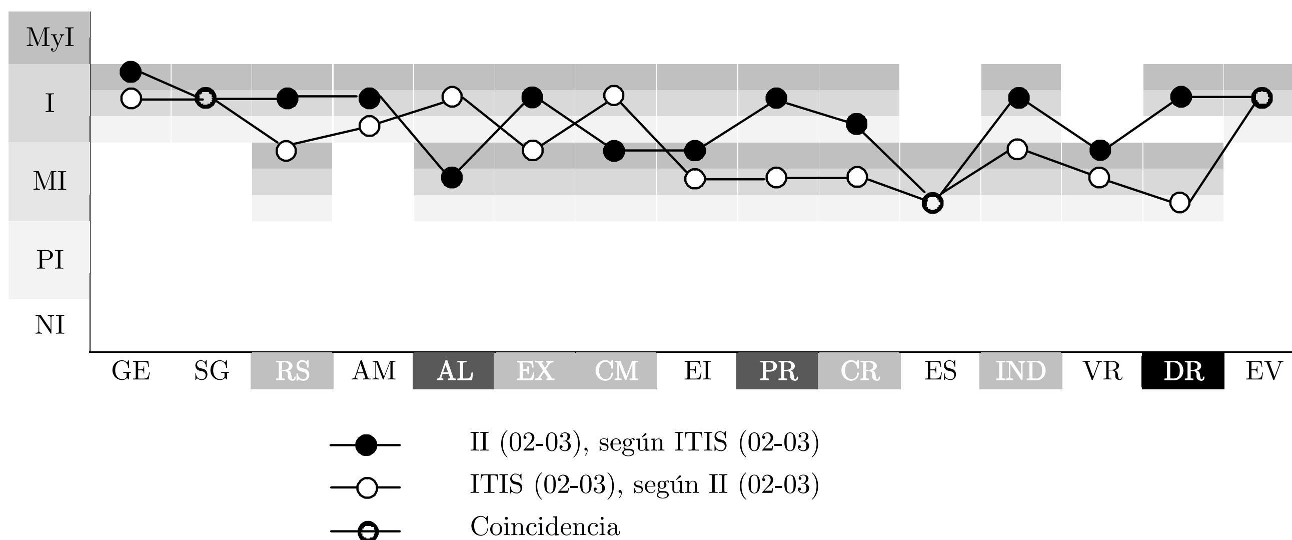


Figura 9.6: *Perfiles <cruzados>* II_{ITIS} *e* $ITIS_{II}$*. Observemos que se diferencian en 8 categorías, aunque con desigual intensidad. Código de colores:* blanco *(coinciden en el grado, aunque no coincidan en el subgrado), 0.25 de* negro *(grados distintos, 0 subgrados de diferencia), 0.35 de* negro *(grados distintos, 1 subgrado de diferencia), 0.65 de* negro *(grados distintos, 2 subgrados de diferencia),* negro *(grados distintos, más de 2 subgrados de diferencia).*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Resulta obvio que, para concluir significativamente, necesitamos más evidencia. En todo caso, los profesores desconocemos el perfil de actitudes de nuestros alumnos, aunque nos aventuramos a presumir, aunando las informaciones correspondientes a ambos cursos académicos, que **los profesores opinamos** que los alumnos de II consideran (II_p) ...

- más importantes: los valores relacionados con la creatividad, la seguridad, el prestigio, la dirección y el estilo de vida (01-02);
- menos importantes: el altruismo, la estética y la variedad,

... de lo que en realidad es la opinión de este alumnado (II_a).

Con respecto a los alumnos de ITIS, la opinión de los profesores es que estos alumnos consideran ($ITIS_p$) ...

- más importantes: los valores relacionados con la seguridad, la dirección y el estilo de vida (02-03);
- menos importantes: los valores relacionados con la creatividad, el prestigio (02-03), la independencia (02-03), el altruismo (02-03), la estética, la variedad y el estímulo intelectual,

... de lo que en realidad es la opinión de este alumnado ($ITIS_a$).

Resulta evidente que hemos supuesto homogeneidad dentro de cada uno de los grupos que hemos establecido a priori: ITIS e II. Pero es posible que esto sea una entelequia.

La pregunta última para el lector sigue siendo la misma: *¿Cuáles son los perfiles estereotipos de los alumnos de I.T.I.S. y de I.I.?* O mejor, *¿tiene sentido la pregunta anterior? (y de paso, ésta).*

A los alumnos les comentamos que la encuesta era para que se auto-analizasen. En ningún momento se les comunicó que se deseaba comparar los perfiles auto-perceptuales con los perfiles perceptuales, según los profesores y según los empresarios. De haberlo hecho así, seguro que habríamos provocado un **sesgo de actitud** hacia la misma.

En las encuestas dirigidas a los alumnos, las motivaciones profesionales son consideradas como **variables latentes**, y las 45 cuestiones planteadas son observables de las mismas. En cambio, en las dirigidas a los profesores y a los empresarios, las motivaciones profesionales son consideradas como variables observables.

Si bien esto puede —y debe— provocar cierta inquietud, piense el lector que en los últimos casos se hace partícipe a la imprecisión, al trabajar con palabras de nuestra lengua natural (si bien los números pueden ser vistos como palabras, la realidad es que *no lo aprecian así los encuestados: ellos no son capaces de imaginar ningún* **solapamiento entre números consecutivos**, *de hecho, se sentían angustiados si les hablábamos de solapamiento entre números; sin embargo, entendían a la perfección un solapamiento entre los términos lingüísticos* importante y muy importante).

El modelo puede complicarse, considerando **variables latentes de tipo 2**, esto es, variables latentes definidas a partir de variables latentes. Una idea para ello puede ser la categorización propuesta por John L. Holland [1066] de las personas y los entornos de acuerdo a seis tipos de personalidad, según sus **intereses vocacionales** (o combinaciones de ellos): realista (mecánicas), investigador (*science*, *math*), artístico (*art*, *language*, *music*), social (*helping*, *teaching*), emprendedor (*selling*, *business*) y convencional (*details*, *clerical*). Otra puede ser la propuesta de Karen Hollweg, Carole Kubota y Phyllis Ferrell [1067], en la que, por ejemplo, las motivaciones CM y AM serían variables latentes de tipo 1 que participarían en la definición de las **caricaturas** de las personas expresivas —según estas autoras, caracterizadas por ser confiadas, inspiradoras, seguras de sí, populares, vivaces y simpáticas— y amigables —según ellas, caracterizadas por ser generosas, comprensivas, amables, leales, obedientes y despreocupadas.

Otra posible mejora del método, es considerar que el evaluador pueda asignar un **grado de importancia** a cada motivación profesional. En el caso de habilidades (ellos ven la creatividad como una habilidad), `Bridges.com, Inc.` [1068] (p. 9), propone que la importancia se base en la frecuencia de uso. Ni qué decir tiene lo difícil que resulta saber cuántas veces un trabajador es creativo, o altruista, etc., sin embargo es un punto de partida que nos invita a la reflexión.

En adelante, evitaremos prejuzgar.

9.7 Pues pensábamos que pensaban otra cosa

«Pensar en contra ha sido siempre la manera más fácil de pensar.»
—Jacques de Bourbon-Busset <Tú no morirás>

Diríjase el lector al comienzo del Cap. 9, o continúe.

9.8 La *máquina* de la verdad

«Trabajad, esforzaos:
lo que menos importa es por qué lo hagáis.»
—Jean de la Fontaine <El labrador y sus hijos>

Simplemente, como elemento informativo de contraste, pero, a su vez, de un valor inestimable, para que nuestros alumnos y nosotros tengamos presente la realidad, mostramos la opinión de Ángel Bejarano del Bosque, gerente de ACCENTURE y de Andrés Pedrera Carvajal, coordinador de desarrollo de software (*Software Manager*) de YA.COM, para el caso de Ingenieros en Informática e Ingenieros Técnicos en Informática de Sistemas —*cfr.* Fig. 9.7 y 9.8, respectivamente—. Para ambos, vayan una vez más, nuestros más sinceros agradecimientos.

«Suponiendo que estoy haciendo entrevistas de "recruiting", lo que he contestado es cómo de importante es para mí, que el entrevistado tenga, o se muestre muy interesado por esos valores que se proponen (por ejemplo, en "INDEPENDENCIA" lo he puesto como "no importante", ya que nosotros valoramos la integración en el grupo.

Por otro lado, la diferencia entre técnicos y superiores la he tenido en cuenta en base a las dos divisiones de compañeros–as de Accenture: la de desarrolladores (Coritel y BPM), que se dedican a la implantación y mantenimiento de sistemas; y la de consultores propiamente dichos (Accenture).

Para que te hagas una idea, un diplomado o con carrera técnica no puede optar a entrar en Accenture, sino sólo en Coritel o BPM (BPM es nuestra rama de outsourcing de sistemas), en Accenture es requisito tener una carrera superior. [...] Así, he pensado en «recruiting» de Coritel/BPM para los «ingenieros técnicos» y en recruiting de Accenture para los "ingenieros".»
—Ángel Bejarano del Bosque, gerente de ACCENTURE.

«Creo que debería cambiarse el “tono” del test para diferenciar los dos posibles casos para los que piensas utilizarlos: entrevistas de candidatos y evaluación de personal contratado. Tal y como está redactado, éste parece más apropiado para la evaluación de personal. He distinguido entre Técnicos e Ingenieros pensando en que a un ténico se le requiere para trabajar sobre un problema ya definido y resuelto teóricamente a nivel global, y un Ingeniero es requerido para hacer precisamente eso: el análisis de su problema, su resolución teórica y la supervisión y coordinación del mismo.»
—Andrés Pedrera Carvajal, coordinador de desarrollo de software (*Software Manager*) de YA.COM.

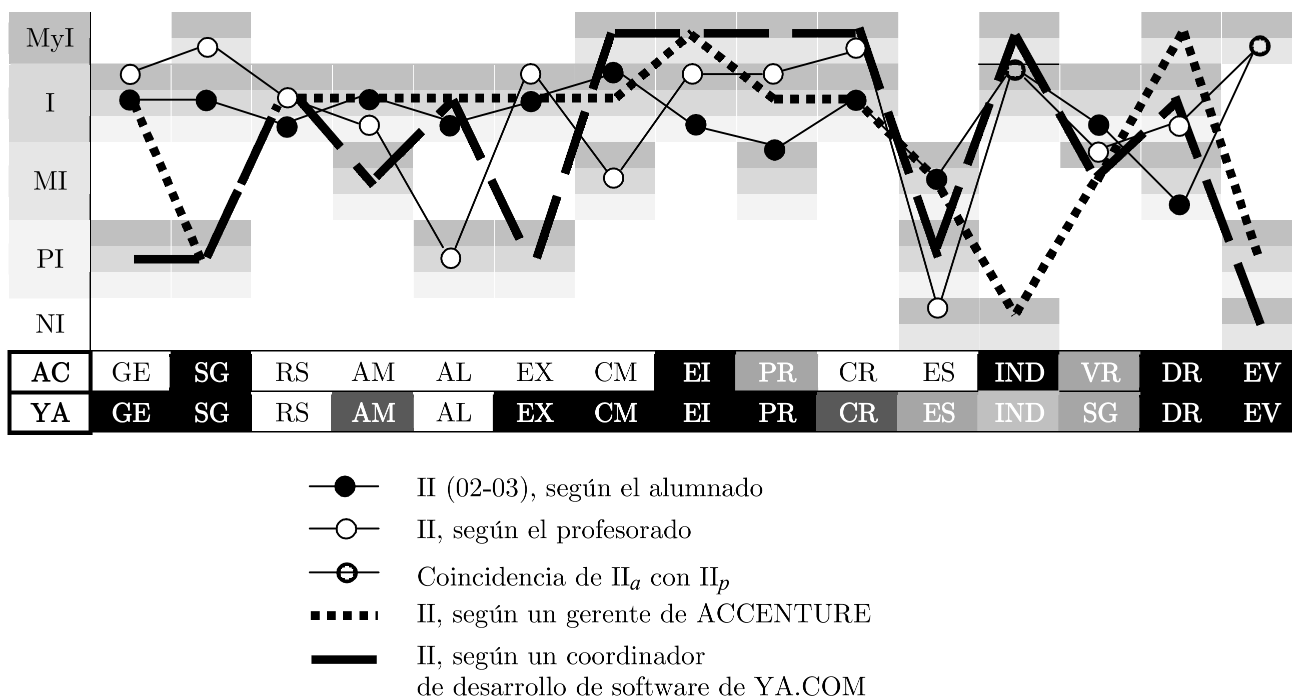


Figura 9.7: *El código de colores de intensidad de la diferencia, se refiere a la comparación del perfil empresarial correspondiente con el del perfil autosubjetivo. Código de colores:* blanco *(coinciden en el grado, aunque no coincidan en el subgrado), 0.25 de* negro *(grados distintos, 0 subgrados de diferencia), 0.35 de* negro *(grados distintos, 1 subgrado de diferencia), 0.65 de* negro *(grados distintos, 2 subgrados de diferencia),* negro *(grados distintos, más de 2 subgrados de diferencia).*
—*Fuente:* Elaboración propia.

9.9 Brevísimo remate

Recordemos que los perfiles auto-perceptuales de los alumnos de I.T.I.S. y de I.I. son, prácticamente, idénticos —*cfr.* Fig. 9.2—. Sin embargo, esta coincidencia no se mantiene si se les consulta sobre cómo se ven los unos a los otros —*cfr.* Fig. 9.6.

Observemos que los profesores opinan que los alumnos de I.I. consideran la `CREATIVIDAD` en el trabajo, un valor bastante más importante de lo que lo consideran los alumnos de I.T.I.S. —*cfr.* Fig. 9.3 (pág. 256)—. Hablando informalmente con algunos de mis compañeros, claramente distinguían entre la que ellos llamaban

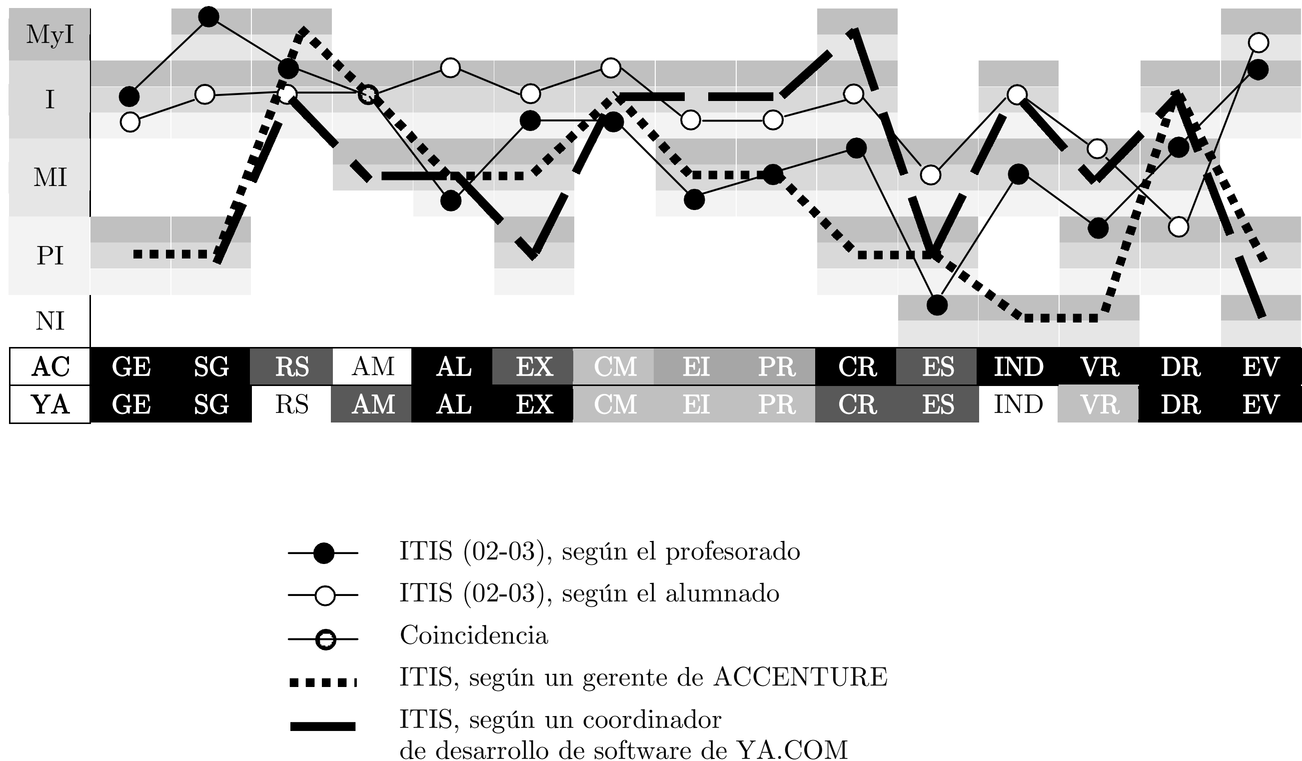


Figura 9.8: *El código de colores de intensidad de la diferencia, se refiere a la comparación del perfil empresarial correspondiente con el del perfil autosubjetivo. Código de colores:* blanco *(coinciden en el grado, aunque no coincidan en el subgrado), 0.25 de* negro *(grados distintos, 0 subgrados de diferencia), 0.35 de* negro *(grados distintos, 1 subgrado de diferencia), 0.65 de* negro *(grados distintos, 2 subgrados de diferencia),* negro *(grados distintos, más de 2 subgrados de diferencia).*
—*Fuente:* Elaboración propia.

«inteligencia científica» y la «inteligencia técnica». La opinión de los alumnos, en cambio, es que si bien dicho valor es importante, lo es por igual para ambas especialidades —*cfr.* Fig. 9.2 (pág. 255).

Claro que si consultamos la opinión de las empresas, apreciamos que según Andrés Pedrera Carvajal, de YA.COM, la CREATIVIDAD es muy importante, sean técnicos o ingenieros, mientras que para Ángel Bejarano del Bosque, de ACCENTURE, la CREATIVIDAD es importante para los ingenieros y poco importante, para los técnicos. El porqué de la diferencia hay que buscarlo en el tipo de trabajo. En el caso de ACCENTURE, los técnicos son desarrolladores (de Coritel o BPM), dedicados a la implantación y mantenimiento de sistemas, mientras que los ingenieros son consultores, encargados de auditar empresas y de proponer planes de reorganización a las mismas, en busca del máximo beneficio. Digamos que en el caso de ACCENTURE, los técnicos deben pensar que las ideas las tienen otros. Sin embargo, en el caso de YA.COM, las nuevas ideas siempre están presentes; lo requiere el contexto de su trabajo, tanto para técnicos como para ingenieros, el desarrollo de software principalmente dirigido a Internet —como reza su apellido «Internet Factory»—: páginas, portales, hipernavegación, hiperconsultas, etc.

Nos sorprende, y no encontramos explicación, lo que ocurre en el valor ALTRUISMO. Por un lado, los alumnos de I.I. lo consideran poco importante, mientras que los de I.T.I.S., creen que es importante (alto). La opinión de las empresas, coincidiente con la del profesorado, es la opuesta, las primeras (resp., los segundos) creen que los ingenieros deben considerarlo (resp., lo consideran) un valor importante, y los técnicos, sólo moderadamente importante.

Sin embargo, dada la sociedad en la que vivimos, con la preocupación constante por el trabajo y si se apuran, por el empleo, la creencia sobre la SEGURIDAD no sorprende a nadie.

En lo que sí acierta de pleno el profesorado es en la consideración que los alumnos tienen hacia el estilo de vida (importante–muy importante). Las empresas, por su parte, lo ven como nada importante–poco importante.

Anexos 1 y 2:
Encuestas dirigidas
a los alumnos y a los profesores



No a los prejuicios

9.10 Anexo 1: Encuesta dirigida a los alumnos

Una valoración personal de las actitudes y motivaciones con respecto al trabajo

Toda esta teoría proviene de Donald E. Super y su obra ***Work Values Inventory***.

En toda actividad hay una serie de aspectos satisfactorios que es normal que deseemos encontrar en nuestro propio trabajo como una consecuencia de nuestra tarea profesional. No todos estos aspectos son de igual importancia para todos: algunos son de gran importancia para algunas personas mientras que para otras lo son de muy poca importancia.

Lee los diversos tipos de trabajo o tarea puestos a continuación e indica en qué grado los consideras importantes para ti; para esto, encierra en un círculo el número que corresponda a tu valoración

no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
1	2	3	4	5

UN TIPO DE TRABAJO O TAREA EN EL QUE TÚ …

1	*tienes que resolver constantemente nuevos problemas*	1	2	3	4	5
2	*puedes ayudar a otras personas*	1	2	3	4	5
3	*puedes obtener mejoras económicas*	1	2	3	4	5
4	*puedes cambiar de tipo de tarea*	1	2	3	4	5
5	*tienes libertad dentro de tu propio campo*	1	2	3	4	5
6	*puedes adquirir prestigio dentro de tu especialidad*	1	2	3	4	5
7	*necesitas tener talento artístico*	1	2	3	4	5
8	*te sientes uno del grupo*	1	2	3	4	5
9	*sabes que permanecerás mucho tiempo*	1	2	3	4	5
10	*puedes ser el tipo de persona que te gustaría ser*	1	2	3	4	5
11	*tienes un jefe con el que las cosas están siempre claras*	1	2	3	4	5
12	*te sientes satisfecho del ambiente y aspecto de donde trabajas*	1	2	3	4	5
13	*tienes la sensación al terminar el día de haberlo empleado bien*	1	2	3	4	5
14	*tienes autoridad sobre otros*	1	2	3	4	5
15	*puedes ensayar nuevas ideas o sugerencias*	1	2	3	4	5
16	*puedes crear algo nuevo*	1	2	3	4	5
17	*puedes conocer por los resultados cuándo has hecho un buen trabajo*	1	2	3	4	5
18	*tienes un jefe razonable*	1	2	3	4	5
19	*tienes la seguridad de que nunca te va a faltar un puesto de trabajo*	1	2	3	4	5
20	*puedes hacer que el mundo sea más hermoso*	1	2	3	4	5
21	*tienes aumentos salariales por encima del aumento del coste de la vida*	1	2	3	4	5
22	*puedes tomar decisiones propias*	1	2	3	4	5
23	*te sientes estimulado y desafiado intelectualmente*	1	2	3	4	5

24	*puedes ejercitar tus dotes de mando y dirección*	1	2	3	4	5
25	*dispones de salas adecuadas, aseos y otros servicios*	1	2	3	4	5
26	*puedes tener el estilo de vida que te gusta cuando no estás en tu trabajo*	1	2	3	4	5
27	*puedes crear amistades con tus compañeros de trabajo*	1	2	3	4	5
28	*sabes que los demás consideran importante el trabajo que realizas*	1	2	3	4	5
29	*no tienes que hacer siempre lo mismo*	1	2	3	4	5
30	*Tienes la impresión de haber ayudado a alguien*	1	2	3	4	5
31	*puedes aumentar el bienestar de otros*	1	2	3	4	5
32	*puedes hacer muchas cosas diferentes.*	1	2	3	4	5
33	*eres admirado/a por otros/as*	1	2	3	4	5
34	*tienes buenas relaciones con tus compañeros/as*	1	2	3	4	5
35	*Puedes llevar el tipo de vida que más te gusta*	1	2	3	4	5
36	*Dispones de un buen lugar para trabajar (con espacio, tranquilidad, buena iluminación, ...)*	1	2	3	4	5
37	*Puedes planificar y organizar el trabajo de otros*	1	2	3	4	5
38	*tienes que estar mentalmente alerta*	1	2	3	4	5
39	*Ganas más de lo suficiente para vivir*	1	2	3	4	5
40	*eres tu propio/a jefe.*	1	2	3	4	5
41	*Haces o produces cosas, productos atractivos*	1	2	3	4	5
42	*Estás seguro de tener otro puesto en la misma empresa u organización si el actual fuera eliminado*	1	2	3	4	5
43	*Tienes un supervisor/a o jefe inmediato razonable*	1	2	3	4	5
44	*Puedes ver el resultado de tu esfuerzo*	1	2	3	4	5
45	*Puedes aportar nuevas ideas*	1	2	3	4	5

Los números del siguiente cuadro corresponden a los diversos enunciados de este inventario. Junto a cada número, copia el elegido como respuesta, y a continuación, suma los tres números-respuesta de cada cuadro. Las letras mayúsculas que aparecen en cada cuadro servirán más adelante para interpretar los resultados.

CR		**AM**		**SG**		**PR**		**GE**	
15		12		9		6		3	
16		25		19		28		21	
45		36		42		33		39	
Σ		Σ		Σ		Σ		Σ	
DR		**RS**		**CM**		**IND**		**AL**	
14		11		8		5		2	
24		18		27		22		30	
37		43		34		40		31	
Σ		Σ		Σ		Σ		Σ	
EX		**EV**		**ES**		**VR**		**EI**	
13		10		7		4		1	
17		26		20		29		23	
44		35		41		32		38	
Σ		Σ		Σ		Σ		Σ	

MOTIVACIONES PROFESIONALES

En realidad, dichas letras mayúsculas corresponden a las 15 motivaciones profesionales siguientes:

CR – CREATIVIDAD: Valor asociado al trabajo que le permite a uno inventar nuevas cosas, diseñar nuevos productos, desarrollar nuevas ideas. Está relacionado tanto con los intereses artísticos como con los intereses científicos.

AM – AMBIENTE: Valor asociado con el tipo de trabajo que se lleva a cabo en un ambiente físicamente agradable. Suele ser importante para personas cuyo interés no está tanto en el trabajo en sí sino en las condiciones en las que se trabaja.

SG – SEGURIDAD: Relacionado con el valor anterior; asociado con el tipo de trabajo que ofrece garantías de continuidad, aun en tiempos difíciles.

PR – PRESTIGIO: Asociado con el trabajo u ocupación que proporciona «status» respecto a los otros, prestigio dentro de la especialidad. Su trabajo es considerado importante por los demás, incluso se siente admirado por ellos.

GE – GANANCIAS ECONÓMICAS: Valor o meta relacionada con el trabajo que compensa económicamente y que le permite tener a uno las cosas que desea (más de lo suficiente para vivir).

DR – DIRECCIÓN: Valor asociado con el trabajo que le permite a uno planificar y organizar el trabajo de los demás (y también el trabajo propio), teniendo por tanto, autoridad sobre otros, pudiendo uno ejercitar sus dotes de mando.

RS – RELACIONES CON EL(LA) SUPERVISOR(A): Valor asociado con el tipo de trabajo llevado a cabo bajo la supervisión de un jefe inmediato que es razonable, con el que uno puede llevarse bien.

CM – COMPAÑEROS: Valor que caracteriza el trabajo que permite estar, asociarse o trabajar con personas con las que uno se lleva bien.

IND – INDEPENDENCIA: Valor asociado al trabajo que le permite a uno trabajar a su manera, a su propio ritmo, libremente dentro de su propio campo, tomando decisiones propias, siendo uno prácticamente su propio jefe.

AL – ALTRUISMO: Valor o meta presente en el trabajo que le permite a uno contribuir al bienestar de los demás.

EX – ÉXITO: Valor asociado con el trabajo cuyos resultados son visibles, tangibles, que le produce a uno la sensación de haber hecho algo bien y constatable.

EV – ESTILO DE VIDA: Valor asociado con el tipo de trabajo que le permite a uno llevar el tipo de vida que le gusta y ser la clase de persona que a uno le gusta ser.

ES – ESTÉTICA: Valor asociado al trabajo que contribuye a hacer cosas hermosas, productos atractivos. Está relacionado con los intereses artísticos. Evidentemente, se requiere poseer talento artístico.

VR – VARIEDAD: Valor asociado con el tipo de trabajo que le permite a uno cambiar de tipo de tarea, no tener que hacer siempre lo mismo.

EI – ESTÍMULO INTELECTUAL: Asociado con el tipo de trabajo en el que hay oportunidad de pensar de manera personal e independiente, de aprender cómo y por qué funcionan las cosas. Está relacionado con los intereses científicos de tipo abstracto, con el gusto en utilizar las propias habilidades y capacidades intelectuales, enfrentándose a la resolución constante de nuevos problemas.

9.11 Anexo 2: Encuesta dirigida a los profesores

Encuesta para los profesores (Figs. 9.9–9.13).

Queridos compañeros:

¿Puedo robaros un minuto de vuestro tiempo?

Este mensaje se dirige especialmente a aquellos de vosotros que tengáis titulación Informática, o estéis relacionados de alguna forma con la Informática, o deis o hayáis impartido clases en alguna titulación de Informática.

Os escribo para pediros una pequeña ayuda que me permitirá concluir mi tesis doctoral.

Necesito vuestra **opinión profesional y personal** sobre 15 aptitudes y motivaciones con respecto al trabajo y **en qué medida pensáis que nuestros estudiantes, los futuros Ingenieros Técnicos en Informática y los futuros Ingenieros en Informática, creen poseerlas.**

Se trata de que os pongáis por un momento en su piel, y valoréis según lo que creáis que piensan ellos.

Cuando lo completéis, una opción es devolvérmelo a la dirección jmleon@unex.es.

Os agradezco enormemente vuestro tiempo y quedo a vuestra disposición para lo que queráis.

De verdad, muchísimas gracias,

Un abrazo,

====================
Juan Miguel León Rojas
Dpto. de Matemáticas
Escuela Politécnica
Avda. de la Universidad s/n,
10071 - Cáceres
Correo-e: jmleon@unex.es
Teléfono: 927-25-7224
====================

Figura 9.9: *Carta de presentación de la encuesta para los profesores.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

Aptitudes y motivaciones con respecto al trabajo

- La relación de 15 aptitudes comienza en la página siguiente.
- Por favor, marcad (destacándolo en negrita, sombreando la casilla, tachándolo, borrándolo o como queráis) el valor que creáis oportuno.
- **Se trata de que valoréis según la medida en que penséis que nuestros estudiantes creen poseerlas.**

A modo de **EJEMPLO GRÁFICO** (no significativo):

– 8 – ESTÍMULO INTELECTUAL					
Asociado con el tipo de trabajo en el que hay oportunidad de pensar de manera personal e independiente, de aprender cómo y por qué funcionan las cosas. Está relacionado con los intereses científicos de tipo abstracto, con el gusto en utilizar las propias habilidades y capacidades intelectuales, enfrentándose a la resolución constante de nuevos problemas.	**Ingenieros Técnicos**				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
	Ingenieros Informáticos				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante

Figura 9.10: *Página explicativa de la encuesta para los profesores.* —*Fuente:* Elaboración propia.

Os recuerdo: se trata de que valoréis según la medida en que penséis que nuestros estudiantes creen poseerlas.

– 1 – **GANANCIAS ECONÓMICAS** Valor o meta relacionada con el trabajo que compensa económicamente y que le permite tener a uno las cosas que desea (más de lo suficiente para vivir).	**Ingenieros Técnicos**				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
	Ingenieros Informáticos				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
– 2 – **SEGURIDAD** Relacionado con el valor anterior; asociado con el tipo de trabajo que ofrece garantías de continuidad, aun en tiempos difíciles.	**Ingenieros Técnicos**				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
	Ingenieros Informáticos				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
– 3 – **RELACIONES CON EL(LA) SUPERVISOR(A)** Valor asociado con el tipo de trabajo llevado a cabo bajo la supervisión de un jefe inmediato que es razonable, con el que uno puede llevarse bien.	**Ingenieros Técnicos**				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
	Ingenieros Informáticos				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
– 4 – **AMBIENTE** Valor asociado con el tipo de trabajo que se lleva a cabo en un ambiente fisicamente agradable. Suele ser importante para personas cuyo interés no está tanto en el trabajo en sí sino en las condiciones en las que se trabaja.	**Ingenieros Técnicos**				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
	Ingenieros Informáticos				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
– 5 – **ALTRUISMO** Valor o meta presente en el trabajo que le permite a uno contribuir al bienestar de los demás.	**Ingenieros Técnicos**				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
	Ingenieros Informáticos				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante

Figura 9.11: *Encuesta para los profesores: las cinco primeras aptitudes a evaluar.* —*Fuente:* Elaboración propia.

<u>Os recuerdo</u>: se trata de que valoréis según la medida en que penséis que nuestros estudiantes creen poseerlas.

– 6 – **ÉXITO** Valor asociado con el trabajo cuyos resultados son visibles, tangibles, que le produce a uno la sensación de haber hecho algo bien y constatable.	**Ingenieros Técnicos**				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
	Ingenieros Informáticos				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
– 7 – **COMPAÑEROS** Valor que caracteriza el trabajo que permite estar, asociarse o trabajar con personas con las que uno se lleva bien.	**Ingenieros Técnicos**				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
	Ingenieros Informáticos				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
– 8 – **ESTÍMULO INTELECTUAL** Asociado con el tipo de trabajo en el que hay oportunidad de pensar de manera personal e independiente, de aprender cómo y por qué funcionan las cosas. Está relacionado con los intereses científicos de tipo abstracto, con el gusto en utilizar las propias habilidades y capacidades intelectuales, enfrentándose a la resolución constante de nuevos problemas.					
	Ingenieros Técnicos				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
	Ingenieros Informáticos				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
– 9 – **PRESTIGIO** Asociado con el trabajo u ocupación que proporciona «status» respecto a los otros, prestigio dentro de la especialidad. Su trabajo es considerado importante por los demás, incluso se siente admirado por ellos.	**Ingenieros Técnicos**				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
	Ingenieros Informáticos				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
– 10 – **CREATIVIDAD** Valor asociado al trabajo que le permite a uno inventar nuevas cosas, diseñar nuevos productos, desarrollar nuevas ideas. Está relacionado tanto con los intereses artísticos como con los intereses científicos.	**Ingenieros Técnicos**				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante
	Ingenieros Informáticos				
	no importante	poco importante	moderadamente importante	importante	muy importante

Figura 9.12: *Encuesta para los profesores: las cinco segundas aptitudes a evaluar.* —*Fuente:* Elaboración propia.

<u>Os recuerdo</u>: se trata de que valoréis según la medida en que penséis que nuestros estudiantes creen poseerlas.

<table>
<tr><td rowspan="4">– 11 –
ESTÉTICA

Valor asociado al trabajo que contribuye a hacer cosas hermosas, productos atractivos. Está relacionado con los intereses artísticos. Evidentemente, se requiere poseer talento artístico.</td><td colspan="5">Ingenieros Técnicos</td></tr>
<tr><td>no importante</td><td>poco importante</td><td>moderadamente importante</td><td>importante</td><td>muy importante</td></tr>
<tr><td colspan="5">Ingenieros Informáticos</td></tr>
<tr><td>no importante</td><td>poco importante</td><td>moderadamente importante</td><td>importante</td><td>muy importante</td></tr>
<tr><td rowspan="4">– 12 –
INDEPENDENCIA

Valor asociado al trabajo que le permite a uno trabajar a su manera, a su propio ritmo, libremente dentro de su propio campo, tomando decisiones propias, siendo uno prácticamente su propio jefe.</td><td colspan="5">Ingenieros Técnicos</td></tr>
<tr><td>no importante</td><td>poco importante</td><td>moderadamente importante</td><td>importante</td><td>muy importante</td></tr>
<tr><td colspan="5">Ingenieros Informáticos</td></tr>
<tr><td>no importante</td><td>poco importante</td><td>moderadamente importante</td><td>importante</td><td>muy importante</td></tr>
<tr><td rowspan="4">– 13 –
VARIEDAD

Valor asociado con el tipo de trabajo que le permite a uno cambiar de tipo de tarea, no tener que hacer siempre lo mismo.</td><td colspan="5">Ingenieros Técnicos</td></tr>
<tr><td>no importante</td><td>poco importante</td><td>moderadamente importante</td><td>importante</td><td>muy importante</td></tr>
<tr><td colspan="5">Ingenieros Informáticos</td></tr>
<tr><td>no importante</td><td>poco importante</td><td>moderadamente importante</td><td>importante</td><td>muy importante</td></tr>
<tr><td rowspan="4">– 14 –
DIRECCIÓN

Valor asociado con el trabajo que le permite a uno planificar y organizar el trabajo de los demás (y también el trabajo propio), teniendo por tanto, autoridad sobre otros, pudiendo uno ejercitar sus dotes de mando.</td><td colspan="5">Ingenieros Técnicos</td></tr>
<tr><td>no importante</td><td>poco importante</td><td>moderadamente importante</td><td>importante</td><td>muy importante</td></tr>
<tr><td colspan="5">Ingenieros Informáticos</td></tr>
<tr><td>no importante</td><td>poco importante</td><td>moderadamente importante</td><td>importante</td><td>muy importante</td></tr>
<tr><td rowspan="4">– 15 –
ESTILO DE VIDA

Valor asociado con el tipo de trabajo que le permite a uno llevar el tipo de vida que le gusta y ser la clase de persona que a uno le gusta ser.</td><td colspan="5">Ingenieros Técnicos</td></tr>
<tr><td>no importante</td><td>poco importante</td><td>moderadamente importante</td><td>importante</td><td>muy importante</td></tr>
<tr><td colspan="5">Ingenieros Informáticos</td></tr>
<tr><td>no importante</td><td>poco importante</td><td>moderadamente importante</td><td>importante</td><td>muy importante</td></tr>
</table>

Figura 9.13: *Encuesta para los profesores: las cinco últimas aptitudes a evaluar.* —*Fuente:* Elaboración propia.

10

Desarrollo y evaluación de TOPSIS-0/1: Información orientada a objetos borrosos

«Prefiero la vejez a la alternativa.»
—Maurice Chevalier, (1888-1972) (*atrib.*)

«Las personas indecisas
toman siempre con facilidad, e incluso con alegría,
cualquier salida que las conduzca a dos caminos,
y que, por consiguiente, no les obligan a elegir.»
—Cardenal de Retz (1613-1679)



En este capítulo desarrollamos y evaluamos TOPSIS-0/1, una técnica modificadora de TOPSIS, que nos permitirá eludir los argumentos basados en subsunción en los sistemas basados en conocimiento borroso, que han sido los que hemos elegido para interpretar el papel de los sistemas de conocimiento basados en unidades vagamente perfiladas.
Como decíamos en §2.3, suponemos que cualquier objeto y cualquier clase —de cara a nuestros fines, clase será sinónimo de tipo, e incluso de vista (clase virtual)—, se representa en el sistema por un perfil descriptivo consistente en un conjunto de puntuaciones relativas a unos atributos pertenecientes a una colección finita preestablecida. Cada una de estas puntuaciones denota el grado en el que el atributo al que se refiere la puntuación es satisfecho por el objeto o clase.

10.1 TOPSIS

10.1.1 La alternativa más satisfactoria entre las «perfiladas»

En §2.3, comentábamos que habíamos elegido a los **objetos borrosos** como intérpretes de los papeles de unidades vagamente perfiladas. Además, establecíamos que cada unidad (objeto o clase), está representada por un **perfil descriptivo** consistente en un conjunto de puntuaciones relativas a unos atributos pertenecientes a una colección finita preestablecida. Cada una de estas puntuaciones denota el grado en el que el atributo al que se refiere la puntuación es satisfecho por la unidad. También suponemos que todas las unidades son **distinguibles** en base al conjunto de atributos, esto es, no permitimos la existencia de unidades con diferentes identidades pero igual interpretación de todos sus atributos.

Supongamos que «perfilamos» todos y cada uno de las unidades (en adelante, **alternativas**), o sea, que las representamos mediante un *perfil de atributos o características*, cuyas evaluaciones poseerán las funcionalidades de **criterios** para la decisión.

Así, muchos defienden que cuatro son las características fundamentales que ***los buenos médicos*** deben poseer en su relación con el paciente: *calidez*, *empatía*, *respeto* y *concreción*. Note, el lector, que estas características, más que discriminantes, son semi-discriminantes. Un médico que sea cálido, empático, respetuoso y capaz de concrecionar, tiene todas las apuestas a su favor para ser un buen médico. Pero que una persona sea cálida, empática, respetuosa y capaz de concrecionar, no la hace un buen médico, ni tan siquiera la hace médico.

Este problema de definición del buen médico es un problema de definición de un modelo, de un **ideal**. Será algo que retomaremos en varias páginas a lo largo de nuestra Tesis, por ejemplo, en §10.1.5, o en §13.1.

Evidéncianse palmarios al menos cuatro asuntos: la *elección de las características* (*criterios*), su *número*, su *naturaleza cuantitativa* o *cualitativa*, y su *facultad discriminatoria*.

No presumimos nada sobre cómo asignar valores a los criterios para cada alternativa (la construcción de la **matriz de decisión**). Mejor dicho, sí que lo hacemos, algo sobre lo que discutíamos en alguna de las arengas primarias: la hipótesis de racionalidad del o de los decisores —*cfr.* §1.4.

Según Herbert A. Simon [1069], este comportamiento racional comprende tres fases:

1. Enumerar y conocer todas las alternativas o cursos de acción disponibles.
2. Determinar los efectos que se derivan de seguir cada alternativa.
3. Evaluar y comparar dichos efectos.

Para su implementación, son necesarios los criterios. Y en plural.

> *«No hay toma de decisiones si no se tienen presentes al menos dos criterios. Si solamente existe un criterio, basta con una mera medición y búsqueda para adoptar una decisión.»*
> —Milan Zeleny [1070] (p. 74), *via* Guerras Martín [1071] (p. 27)

La meta será elegir **«la mejor»** alternativa entre las posibles. Posibles, tal que **factibles**, esto es, **eficientes**, en el sentido de Pareto (no dominadas), además de **satisfactorias**, en el sentido de Herbert A. Simon [910], esto es, interpretando el umbral de satisfacción como un nivel de utilidad en el que un decisor detendría su búsqueda, al hallar satisfactorio lo encontrado (en nuestro caso, la búsqueda corresponde a un procedimiento secuencial de asignación de valores, para cada criterio) —*cfr.* §10.1.2.

Esto es lo que propone P. L. Yu [1072] (pp. 168-169), tener en cuenta:

- el conjunto de soluciones factibles o alternativas de decisión;
- el conjunto de criterios;
- las consecuencias o efectos de cada solución factible, medidas en función de los criterios (utilizando números, o un orden, o medidas descriptivas);
- la preferencia del decisor en lo concerniente a estas consecuencias o efectos, expresadas en función de los criterios.

Y es que ante varias alternativas, si uno no padeciera dudas, no tendría que elegir, no habría varias alternativas. Estas incertidumbres pueden deberse, tanto a la propia naturaleza de las alternativas, como a las acciones que su elección conlleva.

Pero, como dicen Pere Agell Ferrer y José Antonio Segarra [917] (p. 31), se trata de **disminuir las incertidumbres** que puedan existir entre las diferentes alternativas, y no de eliminarlas, y se trata de **conocer mejor las consecuencias** de cada una de ellas, y no de conocerlas exactamente.

Y es que como dicen James G. March y Herbert A. Simon [817], en la mayoría de las ocasiones, el decisor escoge alternativas satisfactorias. Es decir, el decisor decide bajo una **hipótesis de racionalidad parcial**, no estricta, *limitada* por el conocimiento disponible. Peter G. W. Keen y Michael S. Scott Morton [1073] denominan a éste el *enfoque del decisor satisfactorio*.

Pero hay más puntos que discutir. Por ejemplo, es bien conocido que, como norma general, *las personas prefieren lo que tienen a una alternativa*. También es cierto que muchísima gente completa los perfiles en atributos sobre los que carece de información, con una constante independiente del contexto, y ello con el único fin de que todas las comparaciones de alternativas se basen en el mismo conjunto de atributos —*cfr.* Levin,

JOHNSON y FARAONE [1074], quienes también encontraron que a veces se usaban relaciones interdimensionales (por ejemplo, muchas personas suponen que si en una carnicería, la ternera está barata, aun estando bien fresca, es que es de baja calidad), citados por MEDIN, GOLDSTONE y MARKMAN [5] (p. 13).

Otro clase de métodos de decisión multicriterio son los métodos interactivos, aquellos que alternan pasos de computación con diálogo con el decisor, quien aporta nuevos datos sobre sus preferencias —*cfr.* VINCKE [104] (cap. 6).

Finalmente mencionar que existen estados de verdadera **patología decisional**; un ejemplo: ciertas personas padecen *apofasofobia* en mayor o menor grado, desde la dificultad hasta la incapacidad plena para decidir[1] —*cfr.* LARA [351] (p. 123).

10.1.2 Dominancia y satisfacción

En todo momento, suponemos que todos los criterios son a maximizar. Se dice que:

- una alternativa A está **dominada** por otra alternativa B, precisamente si para todo criterio C, $A(C) \leq B(C)$, siendo la desigualdad estricta para al menos uno de los criterios C.
- una alternativa A es **eficiente** u *óptima en el sentido de Pareto* precisamente si no está dominada por ninguna otra[2].

Existen variantes de esta definición: eficiencia débil, eficiencia fuerte, eficiencia propia, etc. —*cfr.* GEOFFRION [1077]; STEUER [1078]; HENING [1079]—. Por ejemplo, una alternativa A se dice que está débilmente dominada por otra alternativa B, precisamente si para todo criterio C, $A(C) < B(C)$. De este modo se define una alternativa **débilmente eficiente** como aquélla que no está débilmente dominada por ninguna otra. Se observa que el conjunto de las estrategias eficientes es un subconjunto del de las estrategias débilmente eficientes.

El uso de diferentes disimilitudes puede dar lugar a diferentes soluciones. Una **solución de compromiso** respecto de un conjunto de disimilitudes $\mathcal{D}$ es cualquier alternativa $\widehat{A}$ tal que:

$$\widehat{A} = \arg\min_{A \in \mathcal{A}} \max_{C \in \mathcal{C}} d(\mathcal{I}(C), A(C)) \tag{10.1}$$

para alguna distancia d de $\mathcal{D}$, siendo $\mathcal{A}$ el conjunto de alternativas, $\mathcal{C}$ el de criterios, e $\mathcal{I}$ la alternativa ideal. En general, una solución de compromiso no tiene por qué ser eficiente. Pero asegurarlo es sencillo: basta restringir el rango del operador min de $\mathcal{A}$ al subconjunto de alternativas eficientes $\mathcal{A}_E$.

Un **análisis de dominancia** consiste básicamente en:

- identificar, caso de que exista, una alternativa dominante —si la hay, será de elección obligada—;
- identificar los óptimos de PARETO, descartando toda alternativa dominada.

Se llama **«alternativa» umbral** a una alternativa *virtual*[3] U, definida por los valores umbrales de satisfacción[4] $U(C)$, para cada criterio C. Denominamos **alternativa satisfactoria** a cualquier alternativa no

[1] Irving L. JANIS y Leon MANN [1075] presentan la siguiente tipología:

- **«Evitación defensiva»** de la decisión: postergación de las decisiones para más tarde, debido principalmente a la magnificación irracional, pero sí emocional, de la dificultad y el riesgo. En casos extremos, se paraliza toda otra operación cerebral posterior —*cfr.* LARA [351] (p. 124).
- **«Pánico hipervigilante»**, debido igualmente a la mala apreciación del riesgo, pero sin llegar a bloquear la mente. De hecho, se toman decisiones, aunque éstas podrán no ser coherentes, o ser muy impulsivas con una gran carga emocional.
- **«Adherencia acrítica»**: el decisor ante una situación nueva para él se adhiere, sin más, a un tipo de de respuesta contrastado por otros.
- **«Cambio acrítico»**: se cambia porque la mayoría lo hace.

[2] Hal R. VARIAN [1076] (p. 15) dice que los recursos están siendo asignados eficientemente (u óptimamente) en el sentido de PARETO «si no existe ninguna asignación alternativa que permita a todo el mundo disfrutar al menos del mismo bienestar y que mejore estrictamente el de algunas personas». O como argumenta VARIAN, quizás sea más sencillo entender esta noción de eficiencia «dándole la vuelta»: si podemos encontrar otra forma de mejorar el bienestar de algunas personas sin perjudicar el de otras, entonces los recursos estaban siendo asignados ineficientemente (o sub-óptimamente) en el sentido de PARETO. Y todo ello, sin duda, favorece la consecución del bienestar social, en cuyo marco publicó Vilfredo PARETO estas ideas en 1896 —*cfr.* Sección §1.7.

[3] **Virtual**, en el sentido de Ferdinand de SAUSSURE [650], de carencia de contextura material (en su caso calificaba el signo lingüístico).

[4] **Umbral de satisfacción** en el sentido de Herbert A. SIMON [910], esto es, como el nivel de utilidad en el que un decisor detendría su búsqueda, al hallar satisfactorio lo encontrado.

dominada por la alternativa umbral. Un **análisis de satisfacción** consiste en eliminar todas las alternativas no satisfactorias[5].

Denominamos **alternativa factible** a toda alternativa eficiente y satisfactoria. Denotamos por $\mathcal{A}_F$ el subconjunto de alternativas factibles. Una **solución factible de compromiso** respecto de un conjunto de disimilitudes $\mathcal{D}$ es cualquier alternativa $\widehat{A}$ tal que:

$$\widehat{A} = \arg \min_{A \in \mathcal{A}_F} \max_{C \in \mathcal{C}} d(\mathcal{I}(C), A(C)) \tag{10.2}$$

para alguna distancia d de $\mathcal{D}$, siendo $\mathcal{A}$ el conjunto de alternativas, $\mathcal{C}$ el de criterios, e $\mathcal{I}$ la alternativa ideal.

10.1.3 Destacando lo importante: asignación de índices ponderales

La posibilidad de identificación de lo menos y más relevante, es relevante en sí. Es obvio que no se puede ser el mejor en todo. Si en vez de personal y puestos, se tratase de elegir la mejor empresa para hacer algún cometido, por ejemplo, desarrollar un producto, y los criterios representasen las actividades que realizan las empresas, podemos traer a colación el nombre de *core business*, empleado por Gary Hamel y C. K. Prahalad [1080], para designar tales actividades básicas o centrales.

Igual que presumimos ya dada la matriz de decisión, obviando su construcción, lo hacemos con respecto a la asignación de índices ponderales a los criterios. Por ahora, supondremos que ya vienen prescritos. En cualquier caso puede verse, por ejemplo, el capítulo 4, de Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082].

En los métodos que exigen la ponderación de los criterios, ésta es una forma de reflejar la subjetividad del usuario del método: cuál es, *para el usuario*, el orden de importancia o relevancia de los criterios. Otros métodos, como el AHP de Thomas L. Saaty, no usan pesos (al menos en su expresión más directa), sino un procedimiento de comparación por pares, que conforman un proceso de escala. Finalmente, hay métodos, como DEA (Data Envelopment Analysis) —*cfr.* Charnes, Cooper y Rhodes [1083]—, que no usan pesos ni escalas.

Se ha escrito mucho sobre la determinación de los pesos de los criterios y sobre problemas relacionados según las aplicaciones de que se trate —*cfr.* Mousseau [1084]; Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 102-122, de la edición española)—. Los métodos pueden clasificarse en subjetivos y objetivos. Los primeros seleccionan pesos de acuerdo a las preferencias del decisor. Así, entre los **métodos subjetivos** se cuentan, por ejemplo, *mínimos cuadrados ponderado* —*cfr.* Chu, Kalaba y Spingarn [1085]—, *autovectores* —*cfr.* Saaty [1086]; Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 112-118, de la edición española)—, *Delphi* —*cfr.* Hwang y Lin [1087]—, *ordenación simple* —*cfr.* Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 106-108, de la edición española)—, *asignación probabilística* —*cfr.* Rietvelt y Ouwersloot [1088]—, *tasación simple* —*cfr.* Von Winterfeldt y Edwards [1089]; Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 108-109, de la edición española)—, *comparaciones sucesivas* —*cfr.* Knoll y Engelberg [1090]; Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 110-112, de la edición española)—, el *método del vaivén (swing method)* —*cfr.* Von Winterfeldt y Edwards [1089]; Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (p. 118, de la edición española)—, *LINMAP «LINear programming techniques for Multidimensional Analysis of Preference»* —*cfr.* Srinivasan y Shocker [1091, 1092]—, o modelos de *programación matemática* —*cfr.* Pekelman y Sen [1093] (mejora de LINMAP); Horsky y Rao [1094]—. Los **métodos objetivos** no dependen de las preferencias del decisor, por ejemplo, el *método de las entropías* —*cfr.* Hwang y Yoon [991]—, o el uso de la *programación multiobjetivo* —*cfr.* Fan [1095].

También se han propuesto métodos que **combinan** *ambas aproximaciones, subjetiva y objetiva* —*cfr.* Cook y Kress [1096]; Liang y Wang [1097]; Yan y Singh [1098]; Fan, Ma y Tian [1099]—. Otro aspecto a analizar es el **dinamismo** *de los pesos*, esto es, la consideración del hecho de que puedan variar a lo largo del proceso de toma de la decisión —*cfr.* Mandic y Mamdani [1100]; Reyes y Barba-Romero [1101].

10.1.4 En pos de la armonía: normalización de los datos

Con la normalización de los datos —*cfr.* §5.6— se persigue que sus transformados pertenezcan a $[0, 1]$. Recogemos los principales métodos de normalización en las Tablas 10.1 y 10.2.

[5] Otra posibilidad es eliminar sólo las dominadas por U en ciertos criterios decisivos —la idea es de Kepner y Tregoe [649], quienes distinguen entre **criterios decisivos**, **deseables** e **ignorables**.

	NOR_{max}	NOR_{sum}	$\text{NOR}_{\text{Euclid}}$
Definición: $A(C) =$	$\dfrac{A^*(C)}{\max_{A^* \in \mathcal{A}} A^*(C)}$	$\dfrac{A^*(C)}{\sum_{A^* \in \mathcal{A}} A^*(C)}$	$\dfrac{A^*(C)}{\sqrt{\sum_{A^* \in \mathcal{A}} A^*(C)^2}}$
Vector normalizado:	$0 < A(C) \leq 1$	$0 < A(C) < 1$	$0 < A(C) < 1$
Módulo de A:	variable	variable	1
¿Conserva la proporcionalidad?	sí	sí	sí
Interpretación:	% de $\max_{A^* \in \mathcal{A}} A^*(C)$	% de $\sum_{A^* \in \mathcal{A}} A^*(C)$	*per se*

Tabla 10.1: *Principales métodos de normalización.*
— *Fuente:* Adaptado de BARBA-ROMERO y POMEROL [1081] (p. 67 de la edición española).

	$\text{NOR}_{\text{rango}}$	$\text{NOR}'_{\text{rango}}$
Definición: $A(C) =$	$\dfrac{A^*(C) - \min_{A^* \in \mathcal{A}} A^*(C)}{\text{rango}_{A^* \in \mathcal{A}} A^*(C)}$	$\dfrac{\max_{A^* \in \mathcal{A}} A^*(C) - A^*(C)}{\text{rango}_{A^* \in \mathcal{A}} A^*(C)}$
Vector normalizado:	$0 < A(C) < 1$	$0 < A(C) < 1$
Módulo de A:	variable	variable
¿Conserva la proporcionalidad?	no	no
Interpretación:	% de $\text{rango}_{A^* \in \mathcal{A}} A^*(C)$	% de $\text{rango}_{A^* \in \mathcal{A}} A^*(C)$

Tabla 10.2: *Principales métodos de normalización (continuación).*
— *Fuente:* Adaptado de BARBA-ROMERO y POMEROL [1081] (p. 67 de la edición española).

Al igual que en §5.6, lo no necesariamente normalizado se diferencia de lo normalizado por un superíndice «estrella» indicador de la primera situación. Los procedimientos NOR_{max}, NOR_{Sum} y $\text{NOR}_{\text{Euclid}}$, son *lineales* («*cardinal ratio*»), en el sentido de que para cada criterio C, la relación $A(C)/A^*(C)$ es constante, independientemente de cual sea la alternativa A. En los métodos $\text{NOR}_{\text{rango}}$ y $\text{NOR}'_{\text{rango}}$, $\text{rango}_{A^* \in \mathcal{A}} A^*(C) = \max_{A^* \in \mathcal{A}} A^*(C) - \min_{A^* \in \mathcal{A}} A^*(C)$. La diferencia entre $\text{NOR}_{\text{rango}}$ y $\text{NOR}'_{\text{rango}}$, estriba en su uso. Una vez se ha decidido normalizar por rango, usaremos $\text{NOR}_{\text{rango}}$ si nuestra meta es maximizar todos los criterios, mientras que utilizaremos $\text{NOR}'_{\text{rango}}$ si lo que queremos es minimizarlos.

Las diferentes posibilidades de normalización de las evaluaciones pueden originar distintas estructuras de preferencia finales, para un mismo método de resolución. Por ejemplo, esto se aprecia en el método de ponderación lineal, que, por defecto, usa NOR_{sum}, y el de ponderación lineal usando NOR_{max}, como ocurre en el software DECISION PAD —*cfr.* Tabla 10.22.

Los pesos se normalizarán de forma que sumen la unidad. El método de normalización que se use para los pesos no influye en la estructura de preferencia final —*cfr.* BARBA-ROMERO y POMEROL [1081, 1082] (p. 95 de la edición española).

10.1.5 Rastreando el ideal de ideal

La identificación de un patrón, modelo o ideal, supone la identificación de un conjunto de cualidades que lo caractericen. Las siguientes palabras de Georg Henrik VON WRIGHT versan sobre el concepto de ideal y su definición[6]:

> *«De acuerdo con G. E. Moore ["The nature of moral philosophy", Philosophical Studies, 1922 (pp. 320ss.)], llamaré a las normas que tienen más relación con ser que con hacer,* reglas ideales. *Se hace referencia a reglas ideales, por ejemplo, cuando decimos que un hombre tiene que ser generoso, sincero, justo, ecuánime, etc., y también cuando decimos que un soldado en el ejército debe ser bravo, sufrido y disciplinado; un maestro, paciente con los niños, firme y comprensivo; un guardia, alerta, observador y resuelto, y así sucesivamente. También decimos de los coches, relojes, martillos y otros utensilios que se usan para servir varios propósitos, que deben tener ciertas propiedades y no deben tener otras. [...]*
> *Las reglas ideales están en estrecha conexión con el concepto de* bondad. *Las propiedades que un artesano, un administrador o un juez tienen que poseer son características, no de* cada *artesano, administrador o juez, sino de un* buen *artesano, administrador o juez. La persona que tiene las propiedades de un buen lo-que-sea en un grado supremo le llamamos frecuentemente un lo-que-sea* ideal. *Lo mismo puede decirse de los relojes, coches y otras cosas que sirven para diversos propósitos humanos.»*

[6] También debería leerse la discusión de Luigi A. DE CARO [1102] (p. 131) acerca de la bondad del ideal propuesta por VON WRIGHT.

—Georg Henrik VON WRIGHT [1103] (p. 33)

Francisco J. VARELA, Evan THOMPSON y Eleanor ROSCH (Heider) [1104] (pp. 168-169), citan una experiencia llevada a término por Brent BERLIN y Paul KAY [778].

Tras examinar unas 90 lenguas, BERLIN y KAY concluyeron que, como mucho, hay 11 categorías de color en cada lengua (aunque no todas las lenguas distinguen once). Estas categorías básicas son: rojo, verde, azul, amarillo, negro, blanco, gris, naranja, púrpura, marrón y rosa. Observaron, además, que *aunque los individuos mostraban mucha variabilidad en la definición de las fronteras de los colores, coincidían prácticamente en la elección del mejor ejemplo para cada categoría*; y aún más, esto no dependía de la lengua. Brent BERLIN y Paul KAY concluyeron que estas once categorías básicas de color eran «universales perceptuales pan-humanos»[7]. Aunque, estudios posteriores de Paul KAY, primero con Chad MCDANIEL [1106] y después, con Willett KEMPTON [1107], sugieren que en la categorización intervienen, en realidad, operaciones cognitivas de dos clases: específicas de la especie (pan-humanas) y específicas de la cultura.

Pero no podemos ni debemos olvidar el maravilloso artículo —al menos para nosotros— de George A. MILLER *The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information* [774], en el que propugna y defiende que nuestros juicios unidimensionales (es decir juicios, por ejemplo de clasificación, sobre estímulos unidimensionales —digamos, p. ej., un tono), como mucho, podremos hacerlos acerca de 7 categorías (más o menos 2). MILLER apoya su tesis en multitud de experiencias. El hecho es que esto se debe «a la existencia de un límite claro a la precisión con la que podemos identificar de manera absoluta la magnitud de un estímulo unidimensional.» Aunque «no estamos completamente a merced de esta envergadura limitada, pues disponemos de una variedad de técnicas que nos permiten incrementar la precisión de nuestros juicios. Las tres más importantes son: (a) hacer juicios relativos, en vez de absolutos; o, si eso no es posible, (b) incrementar el número de dimensiones en las que el estímulo pueda variar; o (c) acomodar la tarea de forma que todo consista en hacer una secuencia de varios juicios absolutos.»

MEDIN, GOLDSTONE y MARKMAN [5] (p. 16) citan el estudio realizado por HOUSTON, SHERMAN y BAKER [1108], quienes concluían que la distribución de características negativas y positivas influye en el resultado. Consideraron dos situaciones, según que las posibles alternativas, o compartían características buenas y no compartían las malas, o compartían las malas y no compartían las buenas. La satisfacción en la elección y la rapidez en tomar la decisión eran mayores en el último caso. Puede que para decidir, los sujetos construyesen un **ideal**, caracterizado por poseer todas las características buenas compartidas, y puede que sea por esto, por lo que los sujetos consideran desfavorable toda aquella elección que signifique una desmejora del ideal. De igual modo, los sujetos, para decidir, podrían construir un **anti-ideal**, caracterizado por poseer todas las características malas compartidas, de forma que consideren favorable toda elección que signifique una mejora del anti-ideal.

10.1.6 TOPSIS

TOPSIS («*Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*») de HWANG y YOON [991] (versión continua según LAI, LIU y HWANG [1109]), es un método de decisión multicriterio que basa su decisión en las distancias a una alternativa «ideal» y a una «anti-ideal» (*negative-ideal*).

El concepto intuitivo de **alternativa ideal** es que sería aquella que, sin dudarlo, *siempre* elegiría el decisor. De igual modo, la **alternativa anti-ideal** sería aquella que, sin dudarlo, *nunca* elegiría el decisor. De manera intuitiva, y estando las alternativas normalizadas entre 0 y 1, podemos pensar que la «alternativa ideal» es $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ y la «anti-ideal», $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. Pero como éstas pueden estar muy distantes del conjunto de alternativas de decisión, lo que se hace es definirlas maximizando o minimizando independientemente cada criterio.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ unos conjuntos de alternativas y de criterios, respectivamente. Cualquier alternativa A se representa como la tupla ordenada numérica $A = (A(C_1), \ldots, A(C_n))$. La **«alternativa» ideal** $\mathcal{I}$, en el sentido de ZELENY [1070], se obtiene maximizando cada criterio (cualidad) independientemente:

$$\mathcal{I} = \left(\max_{A \in \mathcal{A}} A(C) \right)_{C \in \mathcal{C}} \tag{10.3}$$

[7] A renglón seguido, Francisco J. VARELA, Evan THOMPSON y Eleanor ROSCH (Heider) [1104] (pp. 169-170), relatan cómo las experiencias de esta última con miembros de la tribu Dani de Nueva Guinea —cuya lengua carecía prácticamente de vocabulario referente al color— le llevaron a concluir que una vez aprendidas categorías básicas, les resultaba mucho más sencillo aprender categorías estructuradas clásicamente (con los colores centrales como centrales) que categorías con estructura divergente (con colores periféricos como centrales). Además, Eleanor ROSCH (HEIDER) (Heider) [1105] observó lo mismo en el proceso de aprendizaje de los nombres de los colores en niños pertenecientes a nuestra cultura. Todo ello, le lleva a la misma conclusión pan-humanística de Brent BERLIN y Paul KAY.

Obviamente, $\mathcal{I}$ no forma parte del conjunto de alternativas, pues caso contrario, no existiría tal problema de decisión multicriterio —sería la alternativa dominante—. Es una «alternativa ficticia»; el **«máximo fantasma»** o **«zenit»** para ciertos autores. Es el **«punto de mira»** de Roy [646], y el **«punto de utopía»** de Yu [1110].

La **«alternativa» anti-ideal** (llamada a veces «*mínimo fantasma*» o «*nadir*»[8]) $\overline{\mathcal{I}}$, se obtiene minimizando cada criterio independientemente:

$$\overline{\mathcal{I}} = \left(\min_{A \in \mathcal{A}} A(C) \right)_{C \in \mathcal{C}} \tag{10.5}$$

Como $\overline{\mathcal{I}}$ está dominada por todas las alternativas, asumimos que tampoco es una (verdadera) alternativa.

El axioma de elección —*cfr.* Zeleny [1070]—, postula la racionalidad de la elección de una alternativa lo más próxima a la ideal o lo más lejana de la anti-ideal. En un marco cerrado, por ejemplo, en nuestro caso, donde las valoraciones son en $[0, 1]$ y asumiendo 1 como «la perfección», podría hablarse de la alternativa ideal y anti-ideal «absolutas», los puntos **0** y **1**, respectivamente, no obstante estas alternativas serían, en general, las más alejadas de la frontera de Pareto, por lo que se recomienda la elección de las alternativas ideal y anti-ideal anteriormente definidas.

Para medir la separación o distancia a las alternativas ideal y anti-ideal, TOPSIS utiliza una distancia ponderada de Minkowski —*cfr.* Ec. (5.33)—. Como puede que las estructuras de preferencia generadas por las proximidades y por las lejanías no sean las mismas, se define la **razón de similitud al ideal** (*«relative closeness to ideal solution»*) de cualquier alternativa A, como:

$$S(A, \mathcal{I}) = \frac{d_p^w(A, \overline{\mathcal{I}})}{d_p^w(A, \mathcal{I}) + d_p^w(A, \overline{\mathcal{I}})} \tag{10.6}$$

Ejemplo 154 *Felix* Naumann *[1111] se plantea la elección de las mejores fuentes de información para una consulta en Internet. A diferencia de lo tradicional, que consiste en elegir las fuentes por un único criterio: las frecuencias de aparición de las palabras usadas como claves de búsqueda, Felix Felix* Naumann *defiende multiplicar los criterios de elección, y que estos hagan referencia a la historia de las fuentes, en definitiva, usar información a priori disponible sobre las mismas. Basándose en un trabajo precedente de* Wang *y* Strong *[1112], decide utilizar como criterios de elección:*

- *la* comprensibilidad*, esto es, la manera en que una fuente presenta la información; se mide mediante un valor entre* 1 *y* 10*;*
- *la longitud media de las mínimas piezas de información (por ejemplo, el número de columnas de una tabla); lo denomina la* extensión *de un conjunto de información;*
- *la* disponibilidad *de la fuente de información, es decir, la probabilidad de que una posible consulta sea respondida correcta o, al menos, satisfactoriamente, en un intervalo de tiempo dado; se mide mediante un porcentaje;*

  a los cuales añade dos más:
- *el* tiempo de respuesta *a la consulta, y*
- *el* precio*, o sea, el coste monetario de la consulta.*

Para ello, compara cuatro métodos de decisión: SAW (Simple Additive Weighting), TOPSIS, AHP (Analytical Hierarchy Process), DEA (Data Envelopment Analysis)[9]*. A modo de conclusiones, advierte que aunque*

[8] El concepto de **«nadir»** de Philippe Vincke [104] (p.32) es distinto. Denotando por $\widehat{A}_C$ cualquier alternativa donde el criterio C alcanza un máximo, se define la matriz de pagos («*payoff*») $(\widehat{A}_C)_{C \in \mathcal{C}}$, de tamaño $|\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$. Para cada matriz de pagos, la «alternativa» nadir de Vincke es:

$$\overline{\mathcal{I}}_V = \left(\min_{C \in \mathcal{C}} \widehat{A}_C \right)_{C \in \mathcal{C}} \tag{10.4}$$

Al contrario que el anti-ideal de Zeleny, que es único, el nadir de Vincke no tiene por qué serlo. Existirán tantas «alternativas» nadir en el sentido de Vincke, como matrices de pago («*payoff*»). Obsérvese que la matriz de pago es única si cada criterio alcanza su máximo en una única alternativa.

[9] El **método DEA** (*Data Envelopment Analysis*), introducido por Charnes, Cooper y Rhodes [1083], analiza cada alternativa de manera independiente, resolviendo un programa lineal. Como resultado obtiene si una alternativa es ineficiente, en cuyo caso le asigna un valor 1, o ineficiente, en cuyo caso le asigna un valor entre 0 y 1. Sólo ordena totalmente el conjunto de alternativas ineficientes.

la normalización goza de la ventaja de ejercer un escalamiento proporcional, no tiene en cuenta los valores mínimo y máximo de los criterios. Por ello, a la puntuación máxima en un criterio le puede corresponder un valor normalizado menor que el que le corresponda a la puntuación máxima de otro criterio (esto es, la relación máximo-máximo se establece entre diferentes niveles). TOPSIS genera una ordenación decreciente de las fuentes, según las puntuaciones resultantes, de manera que la mejor respuesta se obtiene de la fuente situada en primer lugar. Otra advertencia de NAUMANN *se refiere a la discrecionalidad del poder o bondad de cada fuente, sugerida por el orden resultante, que en general no corresponde a la realidad. Y aún más, diríamos, el poder relativo sugerido entre diferentes fuentes (alternativas) tampoco tiene por qué corresponderse con la realidad.* NAUMANN *recomienda utilizar TOPSIS, dado que facilita el proceso de asignación de ponderaciones. Como método de preelección, caso de que el número de fuentes sea muy grande o si se añaden nuevas fuentes a tener en cuenta, recomienda DEA, de manera que las fuentes elegidas sean posteriormente analizadas por otro método.*

10.1.7 Ejemplo ilustrativo: Elección mediante valoración de criterios igualmente importantes

«Se cuenta que Eugenio D'Ors asistía a una fiesta en donde uno de los invitados estaba intentando demostrar su habilidad para hacer una torre de copas de champagne (entonces aún no se decía cava) y escanciar el vino desde lo alto para que, cayendo en cascada, llenara todas las copas sin derramar ni una gota. Cuando el malabarista agarró un botellón Magnum de Champagne de la Veuve Clicquot, D'Ors lo cogió por la muñeca y le dijo: "Amigo, los experimentos con gaseosa".»
—Luis PUCHOL [129]


upóngase que $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ es el conjunto de cualidades consideradas para cubrir un puesto de trabajo, por ejemplo:

$C_1 \equiv$ «*Ser joven*»;
$C_2 \equiv$ «*Poseer experiencia en un puesto similar*»;
$C_3 \equiv$ «*Tener buena presencia*».

Sea $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ el conjunto de aspirantes. Después de una profusa discusión, la comisión evaluadora decide asignar las valoraciones que figuran a continuación –en el rango $[0, 1]$ (acuerdan que todos los criterios son igualmente importantes):

$$A_1 = .9/C_1 + .4/C_2 + .7/C_3$$
$$A_2 = .5/C_1 + .7/C_2 + .8/C_3$$
$$A_3 = .6/C_1 + .4/C_2 + .7/C_3$$

En este supuesto, la alternativa ideal es

$$\mathcal{I} = .9/C_1 + .7/C_2 + .8/C_3$$

y la anti-ideal,

$$\overline{\mathcal{I}} = .5/C_1 + .4/C_2 + .7/C_3$$

Siendo, por ejemplo, $p = 1$ en (10.6) —esto es, usando la distancia de HAMMING—, obtenemos —*cfr.* Tabla 10.3) la ordenación (estructura de preferencia):

$$A_1 \approx A_2 > A_3 \tag{10.7}$$

es decir, se presenta indiferencia entre las alternativas (candidatos) A_1 y A_2.

Candidatos	$\mathcal{I}$	$\overline{\mathcal{I}}$	$S(A_i,\mathcal{I})$
A_1	.4/3	.4/3	1/2
A_2	.4/3	.4/3	1/2
A_3	.7/3	.1/3	1/8

Tabla 10.3: *Razones de similitud según el método TOPSIS. Puede apreciarse cómo A_3 es el preferido, aunque A_1 es indiferente a A_2.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

10.1.8 Ejemplo ilustrativo: Elección mediante valoración de criterios desigualmente importantes

«Un matemático, un matemático aplicado y un estadístico aspiraban al mismo puesto de trabajo. En la entrevista, le preguntaron cuánto es 1+1. El matemático respondió: "Puedo demostrar que existe pero no que sea único." El matemático aplicado, tras pensar un momento, respondió: "La respuesta es aproximadamente 1,99 con un error en torno a 0,01." El estadístico se salió de la habitación, reflexionó durante unos minutos, y regresó desesperado preguntando: "Pero, en realidad, ¿cuánto quiere que valga?"»

— Key Curriculum Press: Innovators in Mathematics Education;
(URL: http://www.keypress.com/fathom/jokes.html)



Supóngase que la empresa PAMICOCHI ha recibido nueve solicitudes para cubrir una de sus ofertas de empleo. Los candidatos (las alternativas de este problema DMD) son Alberto, Blanca, Carlos, Daniel, Emilia, Félix, Germán, Hilario e Irene. Después de una agitada «tormenta de cerebros», la comisión evaluadora decide considerar los siguientes cinco criterios, los tres primeros cuantitativos y los dos últimos cualitativos:

$C_1 \equiv$ «*Estudios superiores, expresado en años*»;

$C_2 \equiv$ «*Experiencia profesional en la cualificación requerida, en años*»;

$C_3 \equiv$ «*Edad, en años*»;

$C_4 \equiv$ «*Entrevista personal (nota entre 0 y 10)*»;

$C_5 \equiv$ «*Test psicotécnico (nota entre 0 y 10)*».

Además, llega a un acuerdo en la valoración, en una escala de 0 a 5, de la importancia que cada criterio debe tener en la decisión, resultando los índices ponderales[10] *que figuran en la Tabla 10.4. Se desea seleccionar al aspirante más adecuado para desempeñar el trabajo ofertado. La subcomisión técnica decide, juiciosamente, hacer un preanálisis de dominación: se observa que el perfil de Félix está dominado por el perfil de Germán. Por tanto, Félix es descartado. A continuación, se decide hacer un preanálisis de satisfacción. Para ello, la comisión de evaluación resuelve lo siguiente:*

$U(C_1) \equiv$ «*Se debe haber cursado, al menos, cuatro años de estudios superiores*»;

$U(C_2) \equiv$ «*Como mínimo debe tenerse un año de experiencia profesional*»;

$U(C_3) \equiv$ «*La edad no debe superar los 35 años*»;

$U(C_4) \equiv$ «*En la entrevista personal, la nota debe ser al menos un 4*»;

$U(C_5) \equiv$ «*En el test psicotécnico, la nota debe ser mayor o igual que 5*».

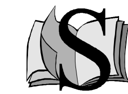
Hecho el preanálisis de satisfacción, se decide eliminar a Carlos y a Irene.

Alternativas	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Preanálisis de dominación y satisfacción
Alberto	6	5	28	5	5	
Blanca	4	2	25	10	9	
Carlos	7	7	38	5	10	No satisfactoria
Daniel	5	7	35	9	6	
Emilia	6	1	27	6	7	
Félix	5	7	31	7	8	Dominada
Germán	6	8	30	7	9	
Hilario	5	6	26	4	8	
Irene	3	8	34	8	7	No satisfactoria
Grado de satisfacción:	≥ 4	≥ 1	≤ 35	≥ 4	≥ 5	
Índices ponderales:	5	5	2	4	4	

Tabla 10.4: *Datos referentes a los criterios establecidos. Respecto al preanálisis de dominancia es claro cómo el perfil de Germán domina al perfil de Félix. Los umbrales de satisfacción aparecen en la penúltima fila; claramente, los perfiles de Carlos e Irene no son satisfactorios. La última fila recoge los índices ponderales indicadores de la importancia relativa de cada criterio.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Todo lo dicho en el supuesto, se recoge en la Tabla 10.4. Estos son los datos reales de partida de nuestro problema de decisión multicriterio discreta.

Este supuesto de elección de personal es una adaptación del que aparece en el libro de Sergio Barba-Romero y Jean-Charles Pomerol [1081, 1082] (p. 84, de la edición española).



upóngase que la comisión técnica determina elegir un procedimiento de normalización que respete la proporcionalidad y que «casi todo el mundo use». Tomando como punto de partida la normalización dividiendo por el máximo y la normalización dividiendo por la suma, se elige esta última por generar valores más pequeños y concentrados. Se observa trivialmente que C_1, C_2, C_4 y C_5 son criterios «a maximizar», mientras que C_3 es «a minimizar». La subcomisión decide regularizar esta situación tomando los recíprocos de las edades. —cfr. Tabla 10.5.

Alternativas	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Alberto (A)	.188	.172	.168	.122	.114
Blanca (B)	.125	.069	.188	.244	.205
Daniel (D)	.156	.241	.134	.220	.136
Emilia (E)	.188	.034	.174	.146	.159
Germán (G)	.188	.276	.156	.171	.205
Hilario (H)	.156	.207	.180	.098	.182
Índices ponderales (w):	.250	.250	.100	.200	.200

Tabla 10.5: *Datos y pesos normalizados (dividiendo por la suma).*
— *Fuente:* Elaboración propia.

TOPSIS proporciona la siguiente ordenación:

Método	Alberto	Blanca	Daniel	Emilia	Germán	Hilario
TOPSIS	5	4	2	6	1	3

o sea:

$$\text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Hilario} \succ \text{Blanca} \succ \text{Alberto} \succ \text{Emilia} \tag{10.8}$$

[10]En principio nos es indiferente el método que se aplique para obtener tal asignación de pesos. Puede verse [1081] (p. 102-122).

10.2 Comparación de objetos descritos por tuplas bivalentes

10.2.1 Motivación y notación

La historia del estudio de las similaridades entre vectores o tuplas de componentes bivalentes (o simplemente tupla bivalente), quizás comenzara con los trabajos de George Udny Yule [1113, 1114] y Karl Pearson [1115, 1116].

Sea $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de variables (características), en función de las cuales se representan todos los objetos o individuos que estamos interesados en comparar. Supongamos que la representación de un objeto O_i se hace mediante una tupla bivalente, donde cada componente bit_{ik} ($k \in \mathbb{Z}_n^+$) es indicativa de la presencia (1) o ausencia (0) de la característica identificada por k en la representación del objeto:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \boxed{bit_{i1}} & \boxed{bit_{i2}} & \ldots & \boxed{bit_{in}} \end{array}$$

Utilizaremos la notación estándar x_{ik} en vez de bit_{ik}, para denotar el valor de la variable x_k para el individuo O_i. Para cualquier individuo O_i, como para cualquier subconjunto del referencial $\mathcal{X}$, puede usarse la notación de Zadeh para conjuntos borrosos:

$$O_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \big/ x_k \tag{10.9}$$

Los **coeficientes** o **índices de similaridad**[11], se basan en la información proporcionada por la **matriz de coocurrencia**:

		Objeto O_j	
		variable en estado 1	variable en estado 0
Objeto O_i	variable en estado 1	a	b
	variable en estado 0	c	d

donde:

- a es el número de características que a la vez están presentes en O_i y en O_j,
- b es el número de características que a la vez están presentes en O_i y ausentes de O_j,
- c es el número de características que a la vez están ausentes de O_i y presentes en O_j,
- d es el número de características que a la vez están ausentes de O_i y de O_j.

Observemos que el hecho de estar presente en O_i y en O_j puede identificarse por $11_2 = 3_{10}$; estar presente en O_i y ausente de O_j, por $10_2 = 2_{10}$; estar ausente de O_i y presente en O_j, por $01_2 = 1_{10}$ y estar ausente de O_i y de O_j, por $00_2 = 0_{10}$.

Notemos además:

- $n = a + b + c + d$ es el número de características presentes o no en O_i o en O_j.
- $A_1 = a + b$ es el número de características presentes en O_i.
- $B_1 = a + c$ es el número de características presentes en O_j.
- $A_0 = d + c$ es el número de características ausentes de O_i.
- $B_0 = d + b$ es el número de características ausentes de O_j.

[11] Aparecen también en la literatura con los nombres frecuentes de «*índices de asociación*» y de «*índices de coincidencia*» (*matching*) —*cfr.* Hand [1117] (p. 161).

Lawrence Hubert y Phipps Arabie [1118] extienden este formalismo de comparación entre objetos, a la comparación de particiones del espacio de objetos.

Obsérvese que, desde una perspectiva conjuntista, se tiene:

$$a = |O_i \cap O_j| \tag{10.10}$$
$$b = |O_i \cap \overline{O_j}| \tag{10.11}$$
$$c = |\overline{O_i} \cap O_j| \tag{10.12}$$
$$d = |\overline{O_i} \cap \overline{O_j}| \tag{10.13}$$
$$a + b = |O_i| \tag{10.14}$$
$$a + c = |O_j| \tag{10.15}$$
$$d + b = |\overline{O_j}| \tag{10.16}$$
$$d + c = |\overline{O_i}| \tag{10.17}$$
$$b + c = |O_i \Delta O_j| \tag{10.18}$$
$$a + d = |\overline{O_i \Delta O_j}| \tag{10.19}$$
$$a + b + c = |O_i \cup O_j| \tag{10.20}$$
$$a + b + c + d = |\mathcal{X}| \tag{10.21}$$

donde Δ denota diferencia simétrica entre conjuntos (nítidos).

Una terminología empleada por algunos autores es la siguiente: cuando la comparación de los individuos se basa en la evaluación de su intersección[12] $O_i \cap O_j$, hablan de *coincidencia parcial* («*partial matching*»); si en la de $\overline{O_i} \cap O_j$ (resp., $O_i \cup \overline{O_j}$) o en la de $O_i \cap \overline{O_j}$ (resp. $\overline{O_i} \cup O_j$), *discrepancia* («*mismatching*») (resp., inclusión); y si en la de $A \Delta B$ (resp., $\overline{A \Delta B}$), *disimilaridad* (resp., *similaridad*) —*cfr.* Dubois y Prade [783] (p. 4).

Los indicadores de similaridad que veremos, se usan frecuentemente en múltiples disciplinas: en *Análisis de Agrupamientos*, por ejemplo en *Genética* —*cfr.* Yeung y Ruzzo, [1120]—; en *Antropología* —*cfr.* Gifford y Kroeber [1121]; Kluckhohn [1122]; Chaney y Ruiz-Revilla [1123]: por ejemplo, en *antropología social*, el análisis de la distribución de los rasgos culturales —*cfr.* Driver [1124]—; en *Arqueología* —*cfr.* Hodder y Orton [694]: por ejemplo, en la distribución de instrumentos y otros artefactos en un yacimiento —*cfr.* Dacey [1125]; Whallon [1126]—, donde la concurrencia sería indicadora de «conjuntos de útiles»; en el estudio de las «culturas arqueológicas» —*cfr.* Childe [1127]; Hodson [1128]; Clarke [1129]—; en *Ecología* —*cfr.* Dice [1130]; Bray [1131]; Greig-Smith [1132]; Pielou [1133]; Krebs [1134]; Legendre y Legendre [1135, 1136]—; en *Economía y Ciencias Empresariales*, por ejemplo, en estudios de mercado turístico —*cfr.* Dolnicar, Leisch, Weingessel, Buchta y Dimitriadou [1137]; Leisch, Weingessel y Dimitriadou [1138]—; en *Geografía* —*cfr.* Stewart y Warntz [1139]; Warntz [1140]—; en *Paleobiología*; en *Psicología*, por ejemplo en Psicometría, en el contexto de la elaboración de pruebas y la teoría de la medición —*cfr.* Thorndike [915]—; en *Química Informática* («*chemoinformatics*»), por ejemplo, con el objetivo de valorar la similaridad entre dos moléculas —*cfr.* Bradshaw [1141]; Willett, Barnard y Downs [1142]—, de predecir propiedades —*cfr.* Brown y Martin [1143]—, de diseño («*synthesis design*») —*cfr.* Wipke y Rogers [1144]—, de un cribado (*screening*) virtual —*cfr.* Bohm y Schneider [1145]— o de análisis de diversidad molecular —*cfr.* Dean y Lewis [1146]—; en *Procesamiento de la Información*, por ejemplo, para responder a consultas en bases de datos —*cfr.* Ellis, Furner-Hines y Willett [1147]—; y un continuado etcétera.

Listas más exhaustivas de estos índices pueden consultarse —*cfr.* Ellis, Furner-Hines y Willett [1147]; Kaufman y Rousseeuw [1148]; Wolda, [1149]— y en diversas aplicaciones informáticas como Stata™, Proximities™, BioDiv™, NTSYSpc™, etc.

[12] Un ejemplo con «sabor algo diferente». Martínez, Corral y López [1119], basan la idea de parecido entre dos conjuntos en su intersección. Por ello, su propuesta de medida de proximidad entre k funciones de densidad se basa en su «área común». Definiendo para cada función de densidad f el conjunto $A_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le f(x)\}$, el área común $\mathcal{AC}(f_1, \ldots, f_k)$ entre k funciones de densidad continuas $f_1, \ldots, f_k$ es la medida de Lebesgue del conjunto $A_{f_1} \cap \ldots \cap A_{f_k}$, o sea:

$$\mathcal{AC}(f_1, \ldots, f_k) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^k} I_{A_{f_1} \cap \ldots \cap A_{f_k}} \tag{10.22}$$

lo que equivale a:

$$\mathcal{AC}(f_1, \ldots, f_k) = \int \min\{f_1, \ldots, f_k\} \tag{10.23}$$

10.2.2 Coeficientes de similaridad y disimilaridad

Lerman [1150, 1151] propone como definición de *coeficiente de similaridad* cualquier función de a, b, c, d que sea creciente en a, simétrica en b y c, y decreciente en d. Las definiciones siguientes es basan en la definición de coeficiente de disimilaridad que recoge Cuadras[13] [631] (p. 296).

Dada una función f, notaremos:

$$f_{ij} \rightleftharpoons f(O_i, O_j) \tag{10.24}$$

Definición 155 *Un* ***coeficiente de similaridad*** *es cualquier función* $\sigma : \mathfrak{P}(\mathcal{X}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$*, que puede reescribirse como:*

$$\sigma_{ij} = g_\sigma(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij})$$

donde:

$$a, b, c, d : \mathfrak{P}(\mathcal{X}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty)$$
$$g_\sigma : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

siendo $g_\sigma(t, u, v, w)$*:*

i) no decreciente en t*,*
ii) no creciente en u *y* v*,*
iii) simétrica en u *y* v*, o sea,* $g_\sigma(t, u, v, w) = g_\sigma(t, v, u, w)$.

Las funciones a, b, c y d son de tipo contador (definibles con el cuantificador aritmético de recuento como cuantificador principal), y siempre dependerán de los individuos, O_i y O_j, que se comparen. Por ello, «relajamos» la definición, abreviando $x \rightleftharpoons x_{ij}$ (para $x = a, b, c, d$).

Definición 156 *Un* ***coeficiente de disimilaridad*** *es cualquier función* $\delta : \mathfrak{P}(\mathcal{X}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$*, que puede reescribirse como:*

$$\delta_{ij} = g_\delta(a, b, c, d)$$

donde:

$$g_\delta : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty]$$

siendo $g_\delta(t, u, v, w)$*:*

i) no creciente en t*,*
ii) no decreciente en u *y* v*,*
iii) simétrica en u *y* v*.*

Observación 157 *Usando terminología de conjuntos, un coeficiente de similaridad es no decreciente en* $|O_i \cap O_j|$*, no creciente en* $|O_i \cap \overline{O_j}|$ *y en* $|\overline{O_i} \cap O_j|$*, y simétrico en* $|O_i \cap \overline{O_j}|$ *y* $|\overline{O_i} \cap O_j|$*. Análogas consideraciones se tienen para los coeficientes de disimilaridad.*

10.2.3 ¡Cuanto nos parecemos por no tener alas!: Parecido dependiente de la concordancia negativa

O sea, Parecido dependiente de la concordancia negativa. Sean O_i y O_j, dos objetos o individuos, que estamos interesados en comparar. Las definiciones 155 y 156 no afirman nada sobre $d = |\overline{O_i} \cap \overline{O_j}|$. De hecho, en ninguna de las definiciones que hemos establecido en los apartados anteriores, hemos exigido ni afirmado nada sobre d.

Si normalizásemos las disimilaridades que nosotros hemos propuesto, entonces la relación que habría entre ellas y las similaridades sería una relación de complemento a uno:

$$\sigma(A, B) + \delta(A, B) = 1 \tag{10.25}$$

[13] «La asociación se mide entonces mediante un coeficiente de similaridad s_{ij} función de a,b y c: $s_{ij} = f(a, b, c)$ tal que: 1) es creciente en a; 2) es decreciente en b y c; 3) es simétrica en b y c.»

¿Y si pensamos en los complementarios de los conjuntos?

$$\sigma(\overline{A}, \overline{B}) + \delta(\overline{A}, \overline{B}) = 1 \tag{10.26}$$

En este caso, la nueva partición ordenada es: $\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \rangle = \langle \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, A \cap \overline{B}, A \cap B \rangle$. De este modo, $\overline{a} = d$, $\overline{b} = c$, $\overline{c} = b$, y $\overline{d} = a$, donde $\langle a, b, c, d \rangle = \langle A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B} \rangle$ es la partición ordenada considerada originalmente. Por tanto, no hay cambios sustanciales en el comportamiento de b y c. Así que, parece lícito afirmar, que, $\sigma(\overline{A}, \overline{B})$ expresa una similaridad entre A y B, a la vez que $\delta(\overline{A}, \overline{B})$ expresa una disimilaridad entre A y B. Pero, en realidad, esto es independiente de que estén normalizadas o no. La similaridad $\sigma(\overline{A}, \overline{B})$ exige que su función asociada g_σ sea no decreciente en d, mientras que la disimilaridad $\delta(\overline{A}, \overline{B})$ obliga a que g_δ sea no creciente en d.

Lo que acabamos de observar se muestra coherente con los coeficientes de similaridad y disimilaridad empleados en el Análisis Jerárquico de Agrupamientos. En ellos, el comportamiento de d se establece como no decreciente en los coeficientes de similaridad, y no creciente en los de disimilaridad.

Sin embargo, como bien observa Cuadras [631] (p. 296), uno de los inconvenientes de utilizar un coeficiente dependiente de d, es que podrían añadirse características arbitrarias no comunes, de forma que podrían considerarse similares o disimilares ciertos individuos que en realidad no lo son.

No obstante, la elección de un coeficiente que sea o no función de d, dependerá del problema particular que se aborde, de si se considera informativa o no, la co-ausencia de una característica concreta. Rayner [1152] distingue entre *dicotomías* (d no es informativa) y *alternativas*.

En principio, distinguimos dos clases de coeficientes de similaridad, según incluyan o no el parámetro d en su definición, es decir, según se admita o no que dos objetos sean muy similares al carecer de un gran número de características. Por ejemplo, ¿mi coche se parece más a la moto de mi amiga Ana de lo que se parece un coche rojo a tal moto? (El color de mi coche no es rojo y la moto de Ana es de color verde).

> *«La ausencia de alas, cuando es observada entre miembros de un grupo de organismos distantemente relacionados (tal como un camello, un caballo y un nemátodo), es, con toda seguridad, una indicación absurda de afinidad. Claro que una característica positiva como es la presencia de alas (o de órganos voladores genéricos, sin calificarlos como ningún tipo específico de alas) podría igualmente llevarnos a conclusiones erróneas, de considerarla para una reunión heterogénea, como por ejemplo, un murciélago, una garza y una libélula. Ni tampoco podemos sostener que la ausencia de una característica pueda deberse a una multitud de causas y que la ausencia común de alguna característica en un par de individuos, no es, por tanto, «parecido verdadero [...]»*
>
> —R. R. Sokal y P. H. A. Sneath [1153]

10.2.4 ¡Cuanto nos parecemos por no tener alas, y también por tener ojos!: Coeficientes de similaridad dependientes de la concordancia positiva y negativa

Los coeficientes de similaridad que veremos en esta sección sí consideran d, esto es, asumen que el hecho de que dos individuos carezcan de un gran número de las mismas cualidades, sí los hace más similares. Destacamos los siguientes coeficientes: *Simple-Matching, Sneath-Sokal(1), Russell-Rao, Rogers-Tanimoto, Sneath-Sokal(2), Dispersión, Yule(Y), Yule(Q), Baroni-Urbani-Buser, Dennis, Faith, Styles.*

El **coeficiente de coincidencia simple** («*simple matching coefficient*») —*cfr.* Sokal y Michener [1154]; Rand [1155]— expresa simplemente la proporción de características en la que dos objetos coinciden —*cfr.* Legendre y Legendre [1136] (coef. S_1):

$$\sigma^{\mathrm{sm}}(A, B) = \frac{a + d}{a + b + c + d} \tag{10.27}$$

El **coeficiente σ^{SS1} de Sneath y Sokal** [242] está en la línea del de coincidencia simple σ^{sm}, sólo que enfatiza, ponderándolas al doble, las coincidencias, sean éstas positivas o negativas —*cfr.* Legendre y Legendre [1136] (coef. S_3):

$$\sigma^{\mathrm{SS1}}(A, B) = \frac{2(a + d)}{2(a + d) + b + c} \tag{10.28}$$

El **coeficiente de Rogers y Tanimoto** —*cfr.* Legendre y Legendre [1136] (coef. S_2):

$$\sigma^{\mathrm{RT}}(A, B) = \frac{a + d}{a + d + 2(b + c)} \tag{10.29}$$

que pondera doble las no coincidencias (al igual que σ^{SS1} pondera doble las coincidencias). Obsérvese que únicamente difiere de σ^{SS3} (Ec. 10.36) en que incluye d.

El **índice σ^{SS2} de Sneath y Sokal** —*cfr.* Holliday, Hu y Willett [1156]; Legendre y Legendre [1136] (coef. S_4):

$$\sigma^{\mathrm{SS2}}(A,B) = \frac{a+d}{b+c} \tag{10.30}$$

se valora en $[0,+\infty)$, y no está definido si no hay no coindicencias ($b=c=0$), no obstante, se considera que en tal caso la similaridad es máxima (σ^{SS2} vale $+\infty$).

El **coeficiente de coalición** Y **de Yule** [1113]:

$$\sigma^{\mathrm{Y}}(A,B) = \frac{\sqrt{ad}-\sqrt{bc}}{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}} \tag{10.31}$$

y el **índice de similaridad** Q **de Yule** [1113] —*cfr.* Simon [651]:

$$\sigma^{\mathrm{Q}}(A,B) = \frac{ad-bc}{ad+bc} \tag{10.32}$$

ambos con rango desde -1 a 1. En general, parece lógico definirlos como 1 si $b+c=0$ (acuerdo total), -1 si $a+d=0$ (desacuerdo total), y 0 si $\sqrt{ad}-\sqrt{bc}$ (para σ^{Y}) y también 0 si $ad-bc=0$ (para σ^{Q}).

El **coeficiente de Baroni-Urbani y Buser** —*cfr.* Buser, Baroni-Urbani y Schillinger [1157]; Krebs [1134]; Ellis, Furner-Hines y Willett [1147]:

$$\sigma^{\mathrm{BUB}}(A,B) = \frac{a+\sqrt{ad}}{a+b+c+\sqrt{ad}} \tag{10.33}$$

no contempla el caso de todos cero; lo definimos: $\sigma^{\mathrm{BUB}}((\vec{0},\vec{0}),(\vec{0},\vec{0}))=1$.

10.2.5 ¡Por tener ojos, nos parecemos un poco más; el no tener alas no influye!: Coeficientes de similaridad dependientes sólo de la concordancia positiva

Los coeficientes de similaridad que veremos en esta sección no consideran d, esto es, asumen que el hecho de que dos individuos carezcan de un gran número de cualidades, no los hace más similares. Destacamos los índices de *Jaccard-Tanimoto, Czekanowski-Sørensen-Dice-Bray, Sneath-Sokal(3), Kulczynski(1), Forbes, Fossum y McConnaughey.*

El **coeficiente de Jaccard** [1158, 1159] o de Jaccard-Tanimoto —denominado **conexión** por Needham [1160]—, expresa casi la misma proporción que el anterior, sólo que no considera las coincidencias negativas —*cfr.* Legendre y Legendre [1136] (coef. S_7):

$$\sigma^{\mathrm{J}}(A,B) = \frac{a}{a+b+c} \tag{10.34}$$

Conocido también como la **razón de similaridad**, es la proporción de coincidencias cuando al menos una de los objetos tiene una variable en estado 1. El caso en que ambos objetos únicamente tengan coincidencias cero ($a=b=c=0$ y $d\neq 0$) suele definirse $\sigma^{\mathrm{J}}(A,B)=1$.

El coeficiente de Jaccard se utiliza bastante en Ecología, en la aplicación de métodos numéricos para la clasificación de organismos vivos. En este caso parece absurdo considerar que dos individuos son muy similares simplemente porque ambos carecen de un gran número de cualidades. No obstante si ambos estados representan verdaderas alternativas, verdaderas cualidades presentes aunque diferentes, entonces parece más adecuado el coeficiente de coincidencia simple (por ejemplo, si $0 \equiv$ macho, $1 \equiv$ hembra).

Un coeficiente similar al de Jaccard, con la particularidad de enfatizar la importancia relativa de las coincidencias positivas.(«cuentan» el doble) es el **coeficiente de Czekanowski** [689], que también encontramos en la literatura denominado, a veces, de Sørensen, de Dice o de Bray, al ser difundido por estos autores —*cfr.* Sørensen [1161]; Dice [1130]; Bray [1131]; Legendre y Legendre [1136] (coef. S_8):

$$\sigma^{\mathrm{Cz}}(A,B) = \frac{2a}{2a+b+c} \tag{10.35}$$

Al igual que en el caso del de Jaccard, si $a = b = c = 0$ y $d \neq 0$ se asume $\sigma^{\mathrm{Cz}}(A, B) = 1$. El índice σ^{Cz} está monótamente relacionado con el coeficiente de JACCARD. Obsérvese también que únicamente difiere del σ^{SS1} de SNEATH y SOKAL (*cfr.* Ec. 10.28) en que este último incluye d.

El **coeficiente σ^{SS3} de Sokal y Sneath** —también llamado de **Anderberg** —*cfr.* ANDERBERG [684]; EVERITT [1162]— tampoco considera las coincidencias negativas como el de JACCARD. En este caso, se destacan las no coincidencias. No está definido si sólo hay no coincidencias. Al igual que en los casos anteriores, si $a = b = c = 0$ y $d \neq 0$ se asume $\sigma^{\mathrm{SS3}}(A, B) = 1$ —*cfr.* LEGENDRE y LEGENDRE [1136] (coef. S_{10}):

$$\sigma^{\mathrm{SS3}}(A, B) = \frac{a}{a + 2(b + c)} \tag{10.36}$$

El **coeficiente σ^{K1} de similaridad de Kulczynski** —*cfr.* SIMON [651]; FAITH, MINCHIN y BELBIN [1163]; LEGENDRE y LEGENDRE [1136] (coef. S_{12}):

$$\sigma^{\mathrm{K1}}(A, B) = \frac{a}{b + c} \tag{10.37}$$

Se valora en $[0, +\infty)$. Aunque la fórmula (10.37) no está definida si no hay no coincidencias ($b = c = 0$), se considera que en tal caso la similaridad es máxima (σ^{K1} vale $+\infty$).

El **coeficiente de McConnaughey** —*cfr.* HOLLIDAY, HU y WILLETT [1156]; ELLIS, FURNER-HINES y WILLETT [1147]— se define como:

$$\sigma^{\mathrm{MC}}(A, B) = \frac{a^2 - bc}{(a + b)(a + c)} \tag{10.38}$$

Es necesario definir $\sigma^{\mathrm{MC}}(\vec{0}, \vec{0}) = 1$.

10.2.6 Coeficientes de similaridad basados en probabilidades condicionadas

Los coeficientes de similaridad que veremos en esta sección se basan en la interpretación probabilística proporcionada por Michael R. ANDERBERG [684]. Destacamos los siguientes índices: *Kulczynski(2) (Driver-Kröber), Ochiai-Driver (Coseno), Simpson, Sneath-Sokal(4) (Anderberg), Sneath-Sokal(5) (Gower), Pearson (Milke-Kluckhohn-Driver) y Harman.*

Podemos considerar la similaridad entre objetos en función de la compartición de características presentes en ambos objetos. El valor a expresa el número total de características presentes a la vez en A y en B, el valor b el número total de características presentes en A y ausentes de B, el valor c el número total de características ausentes de A y presentes en B, el valor $A_1 = a + b$ el número total de características presentes en A, y el valor $B_1 = a + c$ el número total de características presentes en B.

Una posible medida de la similaridad entre dos objetos es la proporción de características que comparten. ANDERBERG [684] (p. 91) sugiere interpretar tales proporciones como probabilidades condicionadas. Se tienen así la probabilidad condicionada de que una característica esté presente en B dado que lo estaba en A:

$$\frac{a}{a + b} = \frac{a}{A_1} \tag{10.39}$$

y la probabilidad condicionada de que una característica esté presente en A dado que lo estaba en B:

$$\frac{a}{a + c} = \frac{a}{B_1} \tag{10.40}$$

De este modo:

$$s(A, B) = \text{«media»}\left(\frac{a}{A_1}, \frac{a}{B_1}\right) \tag{10.41}$$

puede interpretarse como la probabilidad condicionada de que una característica esté presente en un objeto, dado que lo está en el otro.

Tomando la media aritmética tenemos el **índice σ^{K2} de similaridad de Kulczynski** [1164] —*cfr.* LERMAN [1151]—, a veces llamado de DRIVER y KRÖBER [1165], con rango $[0, 1]$, —*cfr.* LEGENDRE y LEGENDRE [1136] (coef. S_{13}):

$$\sigma^{\mathrm{K2}}(A, B) = \frac{a/(a + b) + a/(a + c)}{2} \tag{10.42}$$

no definido si una o ambas observaciones son todas cero. Es razonable definir $\sigma^{K2}(A, B)$ como 1 si ambas son todas cero, y como 0 si sólo una es todos cero.

Si utilizamos la media geométrica, obtenemos el **índice coseno**, también llamado **índice de Driver** —*cfr.* DRIVER y KRÖBER [1165]; DRIVER [1124]—, o **índice de Ochiai** [1166] —*cfr.* LEGENDRE y LEGENDRE [1136] (coef. S_{14}):

$$\sigma^{OC}(A, B) = \frac{a}{\sqrt{(a+b)\,(a+c)}} \tag{10.43}$$

no definido si todas las variables de uno o ambos objetos están a cero. Parece lógico que si ocurre en ambos, σ^{OC} sea uno, mientras que si sólo ocurre en uno, sea cero.

El índice coseno es de alguna manera equivalente al σ^{Cz} de CZEKANOWSKI —*cfr.* Ec. 10.35—, pues en vez de considerar la media de las similaridades, se trabaja con la media del número de características en A y en B.

Un **índice asimétrico** se debe a **Simpson** [1167] —*cfr. item* ELLIS, FURNER-HINES y WILLETT [1147]:

$$\begin{aligned}\sigma^{SI}(A, B) &= \max\{a/A, a/B\} \\ &= \frac{a}{\min\{a+b, a+c\}}\end{aligned} \tag{10.44}$$

donde en vez de considerar la media de las similaridades se considera la máxima de las mismas. No está definido si todas las variables de uno o ambos objetos están a cero. Parece lógico que si ocurre en ambos, σ^{SI} sea uno, mientras que si sólo ocurre en uno, sea cero.

Un segundo grupo surge al considerar como componente de la similaridad entre objetos la compartición de características ausentes en ambos objetos. El valor d expresa el número total de características no presentes a la vez ni en A ni en B, el valor $A_0 = d + c$ el número total de características no presentes en A, y el valor $B_0 = d + b$ el número total de características no presente en B. Se tienen así la probabilidad condicionada de que una característica no esté presente en B dado que no lo estaba en A:

$$\frac{d}{d+c} = \frac{d}{A_0} \tag{10.45}$$

y la probabilidad condicionada de que una característica no esté presente en A dado que tampoco lo estaba en B:

$$\frac{d}{d+b} = \frac{d}{B_0} \tag{10.46}$$

De este modo:

$$s(A, B) = \text{«media»}\left(\frac{d}{A_0}, \frac{d}{B_0}\right) \tag{10.47}$$

puede interpretarse como la probabilidad condicionada de que una característica esté ausente en un objeto, dado que lo está en el otro, y:

$$s(A, B) = \text{«media»}\left(\frac{a}{A_1}, \frac{a}{B_1}, \frac{d}{A_0}, \frac{d}{B_0}\right) \tag{10.48}$$

como la probabilidad de que una característica esté presente o ausente en un objeto, dado que está en ese mismo estado en el otro.

El **índice de similaridad σ^{SS4} de Sokal y Sneath** (atribuido a ANDERBERG en algunos paquetes estadísticos, por ejemplo, STATA) corresponde a usar la media aritmética en (10.48) —*cfr.* LEGENDRE y LEGENDRE [1136] (coef. S_5):

$$\sigma^{SS4}(A, B) = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{d}{d+c} + \frac{d}{d+b}\right) \tag{10.49}$$

Su rango es $[0, 1]$. No está definido si uno o ambos objetos tienen todo a cero o todo a uno. Si ambos son todos cero o todos uno, $\sigma^{SS4}(A, B) = 1$, mientras que si alguno de las probabilidades marginales $a + b$, $a + c$, $d + c$, $d + b$ es cero, entonces $\sigma^{SS4}(A, B) = 0$.

Si se considera la media geométrica se obtiene el **índice de similaridad** σ^{SS5} **de Sokal y Sneath** (también conocido como índice de GOWER) cuyo rango también es $[0,1]$ —*cfr.* LEGENDRE y LEGENDRE [1136] (coef. S_6):

$$\sigma^{\mathrm{SS5}}(A,B) = \frac{ad}{\sqrt{(a+b)\,(a+c)\,(d+c)\,(d+b)}} \tag{10.50}$$

no definido si uno o ambos objetos tienen todo a cero o todo a uno. Parece lógico que si ocurre en ambos, σ^{SS5} sea uno, mientras que si $ad = 0$, entonces σ^{SS5} es cero.

Observemos que: el cociente:

$$\frac{b}{a+b} = \frac{b}{A_1} \tag{10.51}$$

puede interpretarse como la probabilidad de que una característica esté ausente de B condicionado a que estaba presente en A; el cociente:

$$\frac{c}{a+c} = \frac{c}{B_1} \tag{10.52}$$

puede interpretarse como la probabilidad de que una característica esté ausente de A condicionado a que estaba presente en B; el cociente:

$$\frac{c}{d+c} = \frac{c}{A_0} \tag{10.53}$$

puede interpretarse como la probabilidad de que una característica esté presente en B condicionado a que estaba ausente de A; y el cociente:

$$\frac{b}{d+b} = \frac{b}{B_0} \tag{10.54}$$

puede interpretarse como la probabilidad de que una característica esté presente en A dado que estaba ausente de B.

Así:

$$s(A,B) = \text{«media»}\left(\frac{b}{A_1}, \frac{c}{B_1}, \frac{c}{A_0}, \frac{b}{B_0}\right) \tag{10.55}$$

como la probabilidad de que una característica esté presente o ausente en un objeto, dado que está justo en el estado contrario en el otro.

El **coeficiente phi de** PEARSON [1115, 1116] —*cfr.* KLUCKHOHN [1122][14]; DRIVER [1124]—, también llamado «*fourfold point correlation*»:

$$\sigma^{\mathrm{P}}(A,B) = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(d+b)(d+c)}} \tag{10.56}$$

puede interpretarse como la probabilidad de que una característica esté presente o ausente en un objeto, dado que está en ese mismo estado en el otro, menos la probabilidad de que una característica esté presente o ausente en un objeto, dado que está justo en el estado contrario en el otro. Obsérvese que se ha elegido como «media», tanto en (10.48) como en (10.55), la media geométrica. Este coeficiente varía entre -1 y 1, no estando definido si uno o ambos objetos tienen todo a cero o todo a uno. Si $b+c = 0$, $\sigma^{\mathrm{P}}(A,B) = 1$, si $a+d = 0$, $\sigma^{\mathrm{P}}(A,B) = 0$, y $ad-bc = 0$, $\sigma^{\mathrm{P}}(A,B) = 0$. En la literatura aparece con variadas denominaciones: coeficiente V —*cfr.* HODDER y ORTON [694]—, coeficiente r —*cfr.* KLUCKHOHN [1122]—, y coeficiente ϕ —*cfr.* DRIVER [1124]; THORNDIKE [915].

Otro índice de similaridad ampliamente usada es la de HAMMAN —*cfr.* HOLLIDAY, HU y WILLETT [1156]:

$$\sigma^{\mathrm{H}}(A,B) = \frac{(a+d)-(b+c)}{a+b+c+d} \tag{10.57}$$

cuyo rango varía desde -1 (ausencia) hasta 1 (presencia). Esta medida expresa la probabilidad de que una característica presente el mismo estado en ambos objetos (presente en ambos o ausente de ambos) menos la probabilidad de que una característica esté en estados diferentes en los dos objetos (presente en uno y ausente del otro). Está monotónicamente relacionada con σ^{sm}, σ^{SS1} y σ^{RT}. Se tiene por ejemplo que $\sigma^{\mathrm{H}} = 2\sigma^{\mathrm{sm}} - 1$.

[14] Por cierto, que, en este artículo, KLUCKHOHN cuestiona la corriente de la teoría antropológica, de actualidad en los años 30, defensora de la aplicación de fórmulas estadísticas para analizar datos etnológicos.

10.2.7 Otros coeficientes de similaridad

Los siguientes coeficientes de similaridad, aunque propuestos en la literatura como tales, descubrimos que presentan irregularidades. Analizamos cinco dependientes de la concordancia positiva y negativa, el coeficiente de *Russell* y *Rao*, el de dispersión y los de *Dennis*, *Faith* y *Stiles*, y dos dependientes sólo de la concordancia positiva, los de *Fossum* y *Forbes*.

El **coeficiente de Russell y Rao** —*cfr.* WEBB [1168]—, conocido también como **producto escalar binario** —*cfr.* LEGENDRE y LEGENDRE [1136] (coef. S_{11}):

$$\sigma^{\mathrm{RR}}(A, B) = \frac{a}{a+b+c+d} \tag{10.58}$$

aunque es un coeficiente de similaridad no es una similaridad —*cfr.* Def. 155 (pág. 285)—, no es una asignación (básica o no) de similaridad, pues hay objetos más similares que los absolutamente idénticos —no satisface Def. 194 (*ii*) (pág. 339)—. Por ejemplo:

$$\sigma^{\mathrm{RR}}((1,0),(1,0)) = \frac{1}{2} < 1 = \sigma^{\mathrm{RR}}((1,1),(1,1)) \tag{10.59}$$

y, sin embargo $\sigma^{\mathrm{RR}}((1,0),(1,0)) < \sigma^{\mathrm{RR}}((1,0),(1,0)) < \sigma^{\mathrm{RR}}((1,0),(1,0))$:

$$g_{\sigma^{\mathrm{RR}}}(1,1,1,0) = \frac{1}{3} < g_{\sigma^{\mathrm{RR}}}(1,0,0,1) = \frac{1}{2} < g_{\sigma^{\mathrm{RR}}}(3,1,0,1) = \frac{3}{5} \tag{10.60}$$

Observemos que, debido a ello, $1 - \sigma^{\mathrm{RR}}$ no es una disimilaridad.

El coeficiente de similaridad conocido como **dispersión**:

$$s^{\mathrm{DIS}}(A, B) = \frac{ad - bc}{(a+b+c+d)^2} \tag{10.61}$$

cuyo rango es $[-1, 1]$, ni siquiera es un coeficiente de similaridad —*cfr.* Def. 155 285—. En general, no es monótono, ni en a, ni en b, ni en c. Es no decreciente en a, si $d(b+c+d-a)+2bc \geq 0$. Es no creciente en b, si $c(a-b+c+d)+2ad \geq 0$. Es no creciente en c, si $b(a+b+d-c)+2ad \geq 0$.

Tampoco es una asignación (básica o no) de similaridad, como nosotros la definimos en nuestra Tesis —*cfr.* Def. 194 (pág. 339)— pues el valor de la similaridad de cualquier objeto consigo mismo no es constante —no satisface la hipótesis *ii)* de la Def. 194 (pág. 339)—. Por ejemplo, si $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$:

$$\begin{aligned} s^{\mathrm{DIS}}((0,0,0,0),(0,0,0,0)) &= g_{s^{\mathrm{DIS}}}(0,0,0,4) \\ &= 0 \\ &< \frac{1}{4} \\ &= g_{s^{\mathrm{DIS}}}(2,0,0,4) \\ &= s^{\mathrm{DIS}}((1,1,0,0),(1,1,0,0)) \end{aligned}$$

$$g_{s^{\mathrm{DIS}}}(1,1,1,0) = -\frac{1}{9} < g_{s^{\mathrm{DIS}}}(0,0,0,2) = 0 < g_{s^{\mathrm{DIS}}}(2,1,0,2) = \frac{4}{25} \tag{10.62}$$

El **indicador de Dennis** —*cfr.* HOLLIDAY, HU y WILLETT [1156]:

$$s^{\mathrm{DE}}(A, B) = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b+c+d)(a+b)(a+c)}} \tag{10.63}$$

al igual que el anterior, no es un coeficiente de similaridad —*cfr.* Def. 155—. Aunque es no creciente en b y en c, no es monótono en a. Es no decreciente en a, si

$$bc(3bd + 4ba + 4ca + 3a^2 + 5ad + 3bc + b^2 + c^2 + 3cd + 2d^2) + ad(db + b^2 + c^2 + dc - a^2) \geq 0$$

Tampoco es una asignación (básica o no) de similaridad, pues hay objetos más similares que los absolutamente idénticos —no satisface la condición *ii)* de la Def. 194 (pág. 339)—. Por ejemplo, para el vector $(1, 0)$:

$$g_{s^{\mathrm{DE}}}(1,1,1,0) = -\frac{1}{6}\sqrt{3} < g_{s^{\mathrm{DE}}}(1,0,0,1) = \frac{1}{2}\sqrt{2} < g_{s^{\mathrm{DE}}}(2,1,0,2) = \frac{2}{15}\sqrt{30} \tag{10.64}$$

El **coeficiente de Faith** —*cfr.* LEGENDRE y LEGENDRE [1136] (coef. S_{26}):

$$\sigma^{\mathrm{FA}}(A,B)=\frac{1}{(a+b+c+d)}\left(a+\frac{d}{2}\right) \tag{10.65}$$

Éste sí es coeficiente de similaridad —*cfr.* Def. 155 (pág. 285)—, pero no es asignación (básica o no) de similaridad, pues hay objetos más similares que los absolutamente idénticos —no satisface la condición *ii)* de la Def. 194 (pág. 339)—. Por ejemplo, para el vector $(0,0)$:

$$g_{\sigma^{\mathrm{FA}}}(1,1,1,0)=\frac{1}{3}<g_{\sigma^{\mathrm{FA}}}(0,0,0,2)=\frac{1}{2}<g_{\sigma^{\mathrm{FA}}}(2,1,0,2)=\frac{3}{5} \tag{10.66}$$

El **indicador de Stiles** [1169]—*cfr.* HOLLIDAY, HU y WILLETT [1156]:

$$s^{\mathrm{ST}}(A,B)=\log_{10}\frac{(a+b+c+d)\left(|ad-bc|-\frac{(a+b+c+d)}{2}\right)^2}{(a+b)(a+c)(d+c)(d+b)} \tag{10.67}$$

al igual que el de DENNIS, tampoco es un coeficiente de similaridad —*cfr.* Def. 155 (pág. 285)—. En general, no es monótona ni en a, ni en b, ni en c. Tampoco es una asignación (básica o no) de similaridad, pues hay objetos más similares que los absolutamente idénticos —no satisface la condición *ii)* de la Def. 194 (pág. 339)—. Por ejemplo, para el vector $(1,0,0)$:

$$g_{s^{\mathrm{ST}}}(1,1,0,3)=\frac{\ln 5-5\ln 2-\ln 3}{\ln 2+\ln 5}<g_{s^{\mathrm{ST}}}(1,0,0,2)=\frac{\ln 3-4\ln 2}{\ln 2+\ln 5}<g_{s^{\mathrm{ST}}}(2,1,0,2)=\frac{\ln 5-4\ln 2}{\ln 2+\ln 5} \tag{10.68}$$

Los coeficientes, dependientes sólo de la concordancia positiva, que analizamos son los siguientes.

El **coeficiente de Fossum** —*cfr.* HOLLIDAY, HU y WILLETT [1156]:

$$\sigma^{\mathrm{FOS}}(A,B)=\frac{(a+b+c+d)\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}{(a+b)(a+c)} \tag{10.69}$$

es un coeficiente de similaridad según la Def. 155, pues es no decreciente en a, y no creciente y simétrica en b y c. Sin embargo, no es una asignación (básica o no) de similaridad, pues hay objetos más similares que los absolutamente idénticos —no satisface la condición *ii)* de la Def. 194 (pág. 339)—. Por ejemplo, para el vector $(1,0)$:

$$g_{\sigma^{\mathrm{FOS}}}(1,1,1,0)=\frac{3}{16}<g_{\sigma^{\mathrm{FOS}}}(1,0,0,1)=\frac{1}{2}<g_{\sigma^{\mathrm{FOS}}}(2,0,0,2)=\frac{9}{4} \tag{10.70}$$

El **indicador de Forbes** [1170] —*cfr.* HOLLIDAY, HU y WILLETT [1156]:

$$s^{\mathrm{FOR}}(A,B)=\frac{a(a+b+c+d)}{(a+b)(a+c)} \tag{10.71}$$

ni siquiera es un coeficiente de similaridad. Aunque es no creciente en b y en c, no es monótono en a. Es no decreciente en a, si $dbc+2abc+bc^2+b^2c\geq a^2d$. Al igual que el coeficiente de FOSSUM, según este coeficiente hay objetos más similares que los absolutamente idénticos —no satisface la condición *ii)* de la Def. 194 (pág. 339)—. Por ejemplo, para el vector $(1,0)$:

$$g_{s^{\mathrm{FOS}}}(1,1,1,0)=\frac{3}{4}<g_{s^{\mathrm{FOS}}}(1,0,0,1)=2<g_{s^{\mathrm{FOS}}}(1,0,1,3)=\frac{5}{2} \tag{10.72}$$

10.2.8 Dos clases de coeficientes de similaridad

Hay muchísimas propuestas de coeficientes e indicadores de similaridad, asociación o concordancia. Listas más exhaustivas de la aquí propuesta pueden consultarse —*cfr.* ELLIS, FURNER-HINES y WILLETT [1147]; KAUFMAN y ROUSSEEUW [1148]; WOLDA, [1149]; LEGENDRE y LEGENDRE [1136]; HAYEK [1171]; ROMESBURG [1172]— y en diversas aplicaciones informáticas como STATA™, PROXIMITIES™, BIODIV™, NTSYSPC™, etc.

Tal y como hemos hecho, dividimos la lista de coeficientes de similaridad que hemos considerado en estas páginas, en dos clases:

$$\mathbb{S}_d=\{\sigma^{\mathrm{sm}},\sigma^{\mathrm{SS1}},\sigma^{\mathrm{RT}},\sigma^{\mathrm{SS2}},\sigma^{\mathrm{Y}},\sigma^{\mathrm{Q}},\sigma^{\mathrm{BUB}}\}\cup\{\sigma^{\mathrm{SS4}},\sigma^{\mathrm{SS5}},\sigma^{\mathrm{P}},\sigma^{\mathrm{H}}\}\cup\{\sigma^{\mathrm{RR}},s^{\mathrm{DIS}},s^{\mathrm{DE}},\sigma^{\mathrm{FA}},s^{\mathrm{ST}}\} \tag{10.73}$$

y:

$$\mathbb{S}_{\neg d}=\{\sigma^{\mathrm{J}},\sigma^{\mathrm{Cz}},\sigma^{\mathrm{SS3}},\sigma^{\mathrm{K1}},\sigma^{\mathrm{MC}}\}\cup\{\sigma^{\mathrm{K2}},\sigma^{\mathrm{OC}},\sigma^{\mathrm{SI}}\}\cup\{\sigma^{\mathrm{FOS}},s^{\mathrm{FOR}}\}. \tag{10.74}$$

Observación 158 *Algunos resultados de interés sobre coeficientes de similaridad son los siguientes:*

- HAYHOE, QUAGLINO *y* DOLL *[1173] consideran la posibilidad de ponderar los parámetros* a, b, c, d *de estos coeficientes, lo que ha sido criticado en la literatura, reprochándosele una acción de escala injustificada —cfr.* CORMACK *[601] (p. 327).*
- CORMACK *[601] cita el uso de versiones de algunos de estos coeficientes con variables cuantitativas (numéricas), concretamente los casos que recoge son: el coeficiente de* coincidencia simple *(10.27), el de* JACCARD *(10.34) y el de* CZEKANOWSKI *(10.35).*
- WILLIAMS *y* DALE *[1174] observan que el coeficiente de* coincidencia simple *(10.27) es el complemento a uno de una distancia euclidea.*
- IHM *[1175] demuestra que los coeficientes de* JACCARD *(10.34) y* CZEKANOWSKI *(10.35) no lo son, aunque sus complementos a uno satisfacen la desigualdad triangular —cfr. Def. 52.*
- *Como comenta el profesor* CUADRAS *[631] (p. 298), no existe un criterio para decidir cual es el coeficiente de similaridad más adecuado. Depende de cada situación, según el tipo de datos y la ponderación que se desee para las frecuencias a, b, c y d. Si desea hacerse posteriormente un Análisis de Componentes Principales (obteniéndose así una representación geométrica de los individuos, en relación a una distancia razonablemente compatible con la similaridad), la matriz de los coeficientes* (s_{ij}) *debe ser semidefinida o definida positiva. Una distancia de partida puede ser la propuesta por John Clifford* GOWER *[1176], actualmente en la Open University, de transformación de los coeficientes en distancias —cfr.* CUADRAS *[631] (p. 299):*

  $$d(O_i, O_j) = (\sigma(O_i, O_i) + \sigma(O_j, O_j) - 2\sigma(O_i, O_j))^{1/2}$$

  Si (s_{ij}) *es semidefinida positiva, entonces* $s_{ii} + s_{jj} - 2s_{ij} > 0$, *si* $i \neq j$; *además, la distancia* d_{ij} *definida según* $d_{ij}^2 = s_{ii} + s_{jj} - 2s_{ij}$, *satisface la desigualdad triangular.*

10.2.9 Coeficientes de disimilaridad dependientes de la concordancia positiva y negativa

La mayoría de las disimilaridades que veremos en esta sección se obtienen como complemento —*cfr.* Obs. 199— de los coeficientes de similaridad vistos anteriormente. Así hablaremos de índice de disimilaridad de Sneath y Sokal, de Jaccard y Tanimoto, etc.

Procedentes de los coeficientes de similaridad que admiten la compartición de presencia y ausencia, destacamos las siguientes medidas de disimilaridad: *Simple-Matching (Hamming, Total-Difference-Sneath), Sneath-Sokal(1), Rogers-Tanimoto, Baroni-Urbani-Buser.*

El coeficiente de disimilaridad δ^{sm} correspondiente al coeficiente de coincidencia simple σ^{sm}:

$$\delta^{\text{sm}}(A, B) = \frac{b + c}{a + b + c + d} \tag{10.75}$$

es proporcional al cuadrado de la distancia euclidea ($= b + c$). En realidad δ^{sm} es la distancia de HAMMING, también llamado por SNEATH [1177] el **coeficiente de diferencia total**.

El coeficiente de disimilaridad δ^{SS1} correspondiente al coeficiente σ^{SS1} de **Sneath-Sokal**:

$$\delta^{\text{SS1}}(A, B) = \frac{b + c}{2(a + d) + b + c} \tag{10.76}$$

El coeficiente de disimilaridad δ^{RT} correspondiente al coeficiente de **Rogers y Tanimoto**:

$$\delta^{\text{RT}}(A, B) = \frac{2(b + c)}{a + d + 2(b + c)} \tag{10.77}$$

El coeficiente de disimilaridad δ^{BUB} correspondiente al coeficiente σ^{BUB} de **Baroni-Urbani y Buser**:

$$\delta^{\text{BUB}}(A, B) = \frac{b + c}{a + b + c + \sqrt{ad}} \tag{10.78}$$

definiendo $\delta^{\mathrm{BUB}}(\vec{0},\vec{0}) = 0$.

El **índice de discrepancia** δ^{di} (*variance dissimilarity measure*), definido por:

$$\delta^{\mathrm{di}}(A,B) = \frac{b+c}{4(a+b+c+d)} \tag{10.79}$$

y con rango $[0,+\infty)$.

10.2.10 Coeficientes de disimilaridad dependientes sólo de la concordancia positiva

La **distancia euclidea**:

$$\delta^{\mathrm{E}}(A,B) = \sqrt{b+c} \tag{10.80}$$

y **su cuadrado**:

$$\delta^{\mathrm{E2}}(A,B) = b+c \tag{10.81}$$

valoradas en $[0,+\infty)$.

Procedentes de los coeficientes de similaridad que admiten la compartición únicamente de la presencia, destacamos las siguientes medidas de disimilaridad: *Jaccard-Tanimoto, Czekanowski-Sørensen-Dice-Bray, Sneath-Sokal(3) (Lance-Williams, Bray-Curtis), McConnaughey.*

El coeficiente de disimilaridad δ^{J} correspondiente al coeficiente σ^{J} de **Jaccard-Tanimoto**:

$$\delta^{\mathrm{J}}(A,B) = \frac{b+c}{a+b+c} \tag{10.82}$$

definiendo $\delta^{\mathrm{J}}(\vec{0},\vec{0}) = 0$.

El coeficiente de disimilaridad δ^{Cz} correspondiente al coeficiente σ^{Cz} de **Czekanowski**:

$$\delta^{\mathrm{Cz}}(A,B) = \frac{b+c}{2a+b+c} \tag{10.83}$$

definiendo $\delta^{\mathrm{Cz}}(\vec{0},\vec{0}) = 0$.

El coeficiente de disimilaridad δ^{SS3} correspondiente al coeficiente σ^{SS3} de **Sokal y Sneath**:

$$\delta^{\mathrm{SS3}}(A,B) = \frac{2(b+c)}{a+2(b+c)} \tag{10.84}$$

definiendo $\delta^{\mathrm{SS3}}(\vec{0},\vec{0}) = 0$. Esta disimilaridad se conoce como la **medida de disimilaridad no-métrica binaria de Lance** y **Williams**, y también como el **coeficiente no métrico de Bray y Curtis**.

El coeficiente de disimilaridad δ^{MC} correspondiente al coeficiente σ^{MC} de **McConnaughey**:

$$\delta^{\mathrm{MC}}(A,B) = \frac{ac+ba+2bc}{(a+b)\,(a+c)} \tag{10.85}$$

definiendo $\delta^{\mathrm{MC}}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0$.

10.2.11 Coeficientes de disimilaridad interpretables desde la probabilidad

Procedentes de los coeficientes de similaridad que admiten una interpretación probabilística razonable, destacamos las siguientes medidas de disimilaridad: *Kulczynski-Driver-Kröber, Ochiai-Driver (Coseno), Simpson, Sneath-Sokal(4) (Anderberg), Sneath-Sokal(5) (Gower).*

El coeficiente de disimilaridad δ^{K2} correspondiente al coeficiente σ^{K2} de **Kulczynski-Driver-Kröber**:

$$\delta^{\mathrm{K2}}(A,B) = \frac{ac+ba+2bc}{2\,(a+b)\,(a+c)} \tag{10.86}$$

definiendo $\delta^{\mathrm{K2}}(A,B)$ como 0 si ambas son todas cero, y como 1 si sólo una es todos cero.

El coeficiente de disimilaridad δ^{OC} correspondiente al **índice coseno** o de **Driver-Ochiai**:

$$\delta^{\mathrm{OC}}(A,B) = 1 - \frac{a}{\sqrt{(a+b)\,(a+c)}} \tag{10.87}$$

definiendo $\delta^{\mathrm{OC}}(A,B)$ como 0 si ambas son todas cero, y como 1 si sólo una es todos cero.

El coeficiente de disimilaridad δ^{SI} correspondiente al índice de **Simpson**:

$$\delta^{\mathrm{SI}}(A,B) = 1 - \frac{a}{\min\{a+b, a+c\}} \tag{10.88}$$

definiendo $\delta^{\mathrm{SI}}(A,B)$ como 0 si ambas son todas cero, y como 1 si sólo una es todos cero.

El coeficiente de disimilaridad δ^{SS4} correspondiente al índice σ^{SS4} de **Sokal-Sneath**:

$$\delta^{\mathrm{SS4}}(A,B) = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{d}{d+c} + \frac{d}{d+b}\right) \tag{10.89}$$

definiendo, si ambos son todos cero o todos uno, $\delta^{\mathrm{SS4}}(A,B) = 0$, mientras que si alguno de los totales marginales $a+b$, $a+c$, $d+c$, $d+b$ es cero, entonces $\delta^{\mathrm{SS4}}(A,B) = 1$.

El coeficiente de disimilaridad δ^{SS5} correspondiente al índice σ^{SS5} de **Sokal-Sneath**:

$$\delta^{\mathrm{SS5}}(A,B) = 1 - \frac{ad}{\sqrt{(a+b)\,(a+c)\,(d+c)\,(d+b)}} \tag{10.90}$$

no está definida si uno o ambos objetos tienen todo a cero o todo a uno. Parece lógico que si ocurre en ambos, δ^{SS5} sea cero, mientras que si $ad = 0$, entonces δ^{SS5} es uno.

10.2.12 Otros «coeficientes» de disimilaridad

En este apartado, analizamos tres coeficientes, que en la literatura han sido presentados como coeficientes de disimilaridad, pero que adolecen de ciertas irregularidades. La realidad es que ninguno de ellos se ajusta a la definición de coeficiente de disimilaridad, debido a la no monotonía de su función asociada en algunas de sus variables. Los tres dependen de la concordancia positiva y negativa. Los tres han sido presentados como «diferencias», a saber, «de tamaños», «de patrones» y «de formas» —*cfr.* SPSS™ [1178].

El índice **diferencia de tamaños**:

$$\delta^{\mathrm{tam}}(A,B) = \frac{(b-c)^2}{(a+b+c+d)^2} \tag{10.91}$$

con rango $[0, +\infty)$, no es un coeficiente de disimilaridad. Aunque es no creciente en a, y simétrico en (b,c), no es monótono ni en b ni en c. Es no decreciente en b, si $c \leq b$. Es no decreciente en c, si $b \leq c$. Satisface la condición de minimalidad, $\delta^{\mathrm{tam}}(A,A) = 0$.

El índice **diferencia de patrones**:

$$\delta^{\mathrm{pat}}(A,B) = \frac{bc}{(a+b+c+d)^2}$$

con rango $[0, 1]$, no es un coeficiente de disimilaridad. Aunque es no creciente en a, y simétrico en (b,c), no es monótono ni en b ni en c. Es no decreciente en b, si $b \leq a+c+d$. Es no decreciente en c, si $c \leq a+b+d$. Satisface la condición de minimalidad, $\delta^{\mathrm{pat}}(A,A) = 0$.

El índice **diferencia de formas**:

$$\delta^{\mathrm{fo}}(A,B) = \frac{(a+b+c+d)(b+c) - (b-c)^2}{(a+b+c+d)^2}$$

con rango $[0, +\infty)$, no es un coeficiente de disimilaridad. No es monótono ni en a, ni en b, ni en c. Es no creciente en a, si $(b-c)^2 \leq (a+d)(b+c) + 4bc$. Es no decreciente en b, si $(a+d)^2 + (3a+4c+3d)c \geq (a+4c+d)b$. Es no decreciente en c, si $(a+d)^2 + (3a+4b+3d)b \geq (a+4b+d)c$. Satisface la condición de minimalidad, $\delta^{\mathrm{pat}}(A,A) = 0$.

10.2.13 Dos clases de coeficientes de disimilaridad

Resumiendo, las dos clases de medidas de disimilaridad son:

$$\mathbb{D}_d = \{\delta^{\mathrm{sm}}, \delta^{\mathrm{SS1}}, \delta^{\mathrm{RT}}, \delta^{\mathrm{BUB}}\} \cup \{\delta^{\mathrm{SS4}}, \delta^{\mathrm{SS5}}\} \cup \{\delta^{\mathrm{tam}}, \delta^{\mathrm{pat}}, \delta^{\mathrm{fo}}, \delta^{\mathrm{di}}\} \tag{10.92}$$

y:

$$\mathbb{D}_{\neg d} = \{\delta^{\mathrm{E}}, \delta^{\mathrm{E2}}, \delta^{\mathrm{J}}, \delta^{\mathrm{Cz}}, \delta^{\mathrm{SS3}}, \delta^{\mathrm{MC}}\} \cup \{\delta^{\mathrm{K2}}, \delta^{\mathrm{OC}}, \delta^{\mathrm{SI}}\}. \tag{10.93}$$

10.3 Ponderación de características

Sea $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de variables (características), en función de las cuales se representan todos los objetos o individuos que estamos interesados en comparar. Supongamos que la representación de un objeto O_i se hace mediante un vector binario, donde cada componente bit_{ik} ($k \in \mathbb{Z}_n^+$) es indicativa de la presencia (1) o ausencia (0) de tal característica en la representación del objeto:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \boxed{bit_{i1}} & \boxed{bit_{i2}} & \cdots & \boxed{bit_{in}} \end{array}$$

En esta sección mostramos cómo introducir en el cómputo índices ponderales para cada característica, de forma que sea indicativo de su importancia proporcional con respecto a las demás características.

Supongamos que los índices ponderales son números enteros no negativos —en §10.7 mostraremos cómo trabajar con índices ponderales que sean números reales cualesquiera—. Para cada $k \in \mathbb{Z}_n^+$, sea w_k el índice ponderal relativo a la característica x_k. Supongamos que la representación de un objeto O_i se hace mediante un vector binario, donde cada componente bit_{ik} ($k \in \mathbb{Z}_n^+$) es indicativa de la presencia (1) o ausencia (0) de tal característica en la representación del objeto:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \boxed{bit_{i1}} & \boxed{bit_{i2}} & \cdots & \boxed{bit_{in}} \end{array}$$

La representación ponderada (según los índices ponderales w_k) es el multiconjunto[15]:

$$\overbrace{\begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_1 \\ \boxed{bit_{i1}} & \cdots & \boxed{bit_{i1}} \end{array}}^{w_1 \text{ veces}} \quad \overbrace{\begin{array}{ccc} x_2 & \cdots & x_2 \\ \boxed{bit_{i2}} & \cdots & \boxed{bit_{i2}} \end{array}}^{w_2 \text{ veces}} \quad \overbrace{\begin{array}{ccc} x_n & \cdots & x_n \\ \boxed{bit_{in}} & \cdots & \boxed{bit_{in}} \end{array}}^{w_n \text{ veces}}$$

Acordamos, al inicio, utilizar la notación estándar x_{ik} en vez de bit_{ik}, para denotar el valor de la variable x_k para el individuo O_i. Basándonos en la notación de Zadeh para conjuntos borrosos, podemos expresar O_i como:

$$O_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{w_k} x_{ik} / x_k \tag{10.94}$$

La interpretación referente a operaciones entre multiconjuntos es formalmente análoga que la que aparece en la Sección §10.2.1 (Ecs. 10.10ss), para conjuntos, sólo que ahora las operaciones unión, intersección y complemento están definidas entre multiconjuntos.

Veremos un ejemplo ilustrativo de esta técnica en §10, donde desarrollamos y evaluamos el método de análisis multicriterio TOPSIS-0/1.

[15] El nombre de **multiconjunto** proviene de la posibilidad de tener sus elementos multiplicidades mayores que uno. Cuando un multisubconjunto M de un referencial $\mathcal{X}$, es finito y cada elemento está identificado, es decir, cuando es una sucesión finita, se denomina **cortejo**. Como sinónimos de cortejo, pueden emplearse —*cfr.* Grishin [1179] (p. 547): palabra en el alfabeto $\mathcal{X}$ (suele asumirse la finitud de $\mathcal{X}$); elemento de cierta potencia cartesiana del conjunto $\mathcal{X}$; elemento de un semigrupo libre con un conjunto de generadores de $\mathcal{X}$ y con unidad; función definida sobre los primeros $|M|$ números naturales con valores en el conjunto $\mathcal{X}$.

10.4 Primer divertimento: Disimilaridad entre conjuntos nítidos finitos

Sea $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ un universo no vacío de discurso. Sea $A \in \mathfrak{P}(\mathcal{U})$, entonces (notación de ZADEH):

$$A = \sum_{k=1}^{n} \chi_A(u_k) \diagup u_k$$

El universo $\mathcal{U}$ es el espacio de variables (características), e interpretamos cualquier $A \in \mathfrak{P}(\mathcal{U})$ como un objeto o individuo. Lo único que habrá que hacer es trabajar con la tupla bivalente A_χ, equivalente virtual de A. Sea:

$$A \leftrightsquigarrow A_\chi = (\chi_A(u_1), \ldots, \chi_A(u_n))$$

Lo que queremos decir es que, si nuestra meta es medir la **«disimilaridad»** o «distancia» entre dos subconjuntos de $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$ —en el sentido de asignar un valor a la lejanía intuitivamente apreciada—, lo hagamos midiendo la «disimilaridad» entre sus tuplas bivalentes, equivalentes virtuales suyas, utilizando para ello cualquiera de los coeficientes de disimilaridad vistos en las secciones anteriores.

Como «distancia» *genérica* —en el sentido puramente intuitivo de medir la lejanía—, adolece de un grave inconveniente: depende sólamente de la presencia o ausencia de los elementos, pero no de *qué* elementos. Por ejemplo, para el referencial $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ $(n \geq 4)$, la distancia entre cualesquiera dos subconjuntos binarios (dos elementos) disjuntos es la misma.

A esto le podemos poner enmienda, cuando el universal es un retículo lineal (orden total) normado, como ocurre con cualquier subconjunto acotado de números reales. En particular todo subconjunto está efectivamente bien ordenado.

El método es más general y está parametrizado por un referente «semilla» u_0 y dos constantes α y β no nulas. Sugerimos, para cada referente u_i, tomar como índice ponderal w_i, su distancia al referente «semilla» u_0, acrecentada mediante unas constantes α y β no nulas:

$$w_i = \alpha d(u_0, u_i) + \beta \tag{10.95}$$

De este modo, el vector bivalente A_χ^w, equivalente virtual de A, es:

$$A \leftrightsquigarrow A_\chi^w = (\overbrace{\chi_A(u_1), \ldots, \chi_A(u_1)}^{w_1 \text{ veces}}, \ldots, \overbrace{\chi_A(u_n), \ldots, \chi_A(u_n)}^{w_n \text{ veces}})$$

Ejemplo 159 *Sean* $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*, y el conjunto de índices ponderales:*

$$W = \left\{\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{15}, \frac{4}{15}, \frac{5}{15}\right\} \tag{10.96}$$

que en este caso corresponde precisamente a:

$$w_i = \frac{w_i^*}{\sum w_j^*}, \text{ siendo } w_i^* = d_2(1, u_i) + 1 \tag{10.97}$$

De este modo, la representación ponderada del referencial $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *es el multiconjunto:*

$$\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5\} \tag{10.98}$$

y las representaciones ponderadas de los conjuntos $\{1, 2\}$*,* $\{3, 4\}$ *y* $\{4, 5\}$*, son, respectivamente:*

$$\{1, 2\} \leftrightsquigarrow \{1, 2\}_\chi^w = (\overset{1}{1}, \overset{2}{1}, \overset{2}{1}, \overset{3}{0}, \overset{3}{0}, \overset{3}{0}, \overset{4}{0}, \overset{4}{0}, \overset{4}{0}, \overset{4}{0}, \overset{5}{0}, \overset{5}{0}, \overset{5}{0}, \overset{5}{0}, \overset{5}{0}) \tag{10.99}$$

$$\{3, 4\} \leftrightsquigarrow \{3, 4\}_\chi^w = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \tag{10.100}$$

$$\{4, 5\} \leftrightsquigarrow \{4, 5\}_\chi^w = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \tag{10.101}$$

Las matrices de coocurrencia correspondientes a las parejas $\left(\{1,2\}_{\chi}^{w},\{3,4\}_{\chi}^{w}\right)$ *y* $\left(\{1,2\}_{\chi}^{w},\{4,5\}_{\chi}^{w}\right)$*, son, respectivamente:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \tag{10.102}$$

Introducimos una primera regla, concerniente a la relativa relevancia de los referentes:

> ***Regla 1:***
> *Cuanto más alejados están los referentes,*
> *según su relevancia —atribuida por los índices ponderales—,*
> *más disimilares deben ser.*

Cualquier ***«disimilaridad»*** *de las propuestas en los apartados anteriores, es no decreciente en b y en c, por ello,*

$$7 < 9 \Longrightarrow \delta\left(\{1,2\}_{\chi}^{w},\{3,4\}_{\chi}^{w}\right) < \delta\left(\{1,2\}_{\chi}^{w},\{4,5\}_{\chi}^{w}\right) \tag{10.103}$$

Observemos ahora los conjuntos unitarios:

$$\{2\} \leftrightsquigarrow \{2\}_{\chi}^{w} = (\overset{1}{0},\overset{2}{1},\overset{2}{1},\overset{3}{0},\overset{3}{0},\overset{3}{0},\overset{4}{0},\overset{4}{0},\overset{4}{0},\overset{4}{0},\overset{5}{0},\overset{5}{0},\overset{5}{0},\overset{5}{0},\overset{5}{0})$$

$$\{3\} \leftrightsquigarrow \{3\}_{\chi}^{w} = (0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$$

$$\{4\} \leftrightsquigarrow \{4\}_{\chi}^{w} = (0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,0)$$

$$\{5\} \leftrightsquigarrow \{5\}_{\chi}^{w} = (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1)$$

Las matrices de coocurrencia correspondientes a las parejas $\left(\{2\}_{\chi}^{w},\{3\}_{\chi}^{w}\right)$, $\left(\{3\}_{\chi}^{w},\{4\}_{\chi}^{w}\right)$,*y* $\left(\{3\}_{\chi}^{w},\{5\}_{\chi}^{w}\right)$*, son, respectivamente:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

A la vista de estas matrices, podríamos dejarnos llevar y atender a la diferencia $|b-c|$, pero entonces no habría monotonía ni en b ni en c. En este ejemplo, la relevancia de un referente está en consonancia con la distancia a $u_1 = 1$.

Parece interesante que incorporemos la siguiente regla:

> ***Regla 2:***
> *Diferir en referentes más relevantes,*
> *supone diferir más,*
> *que diferir en referentes menos relevantes.*

Esta regla implicaría, por ejemplo, que $\delta\left(\{1\}_{\chi}^{w},\{3\}_{\chi}^{w}\right) < \delta\left(\{3\}_{\chi}^{w},\{5\}_{\chi}^{w}\right)$.

Cualquier disimilaridad no decreciente en la diferencia simétrica $A\Delta B$, o sea en $b+c$, satisface la Regla 2*. Esto será una exigencia para ser lo que nosotros, más adelante, proponemos denominar* ***«asignación de disimilaridad»*** *o simplemente,* ***«disimilaridad»*** *—cfr. Defs. 200 y 201 (pág. 340)—. Observemos que también satisface la Regla* 1*.*

Ejemplo 160 ***(Elección de un ítem delegado o representante)***

Pensemos en un conjunto de individuos. La elección del ítem más cercano a todos ellos (problema de elección de un delegado o representante) se corresponde con los problemas de encontrar la cadena o subcadena más cercanas, cupiendo además, en el primer caso, la posibilidad de que el representante sea o no elegido entre ellos.

Si se exige que el delegado comparta todas las propiedades, características o atributos de los demás ítems, estamos ante un problema de elección de la cadena más cercana (CSP, Closest String Problem). Sin embargo, si lo que se exige es que comparta un subconjunto arbitrario de propiedades, estamos ante un problema de elección de la subcadena más cercana (CSSP, Closest Substring Problem). Tenemos, pues, un total de cuatro problemas.

- Problema de elección de la cadena «interna» más cercana*: Dado un conjunto* $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ *de cadenas, todas de longitud* m*, encuéntrese una cadena «centro»* $s \in S$*, tal que para todo* $s_i \in S$*,* $d(s, s_i) \leq d$*, y que este umbral superior* d*, sea mínimo.*

- Problema de elección de la cadena «externa» más cercana*: Dado un conjunto* $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ *de cadenas, todas de longitud* m*, encuéntrese una cadena «centro»* $s \notin S$*, de longitud* m*, tal que para todo* $s_i \in S$*,* $d(s, s_i) \leq d$*, y que este umbral superior* d*, sea mínimo.*

- Problema de elección de la subcadena «interna» más cercana*: Dado un conjunto* $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ *de cadenas, todas de longitud* m*, y un entero* $k < m$*, encuéntrese una cadena «centro»* $s \in S$*, tal que para todo* $s_i \in S$*, exista una subcadena* t_i *de* s_i*, de longitud* k*, tal que* $d(s, t_i) \leq d$*, y que este umbral superior* d*, sea mínimo.*

- Problema de elección de la subcadena «externa» más cercana*: Dado un conjunto* $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ *de cadenas, todas de longitud* m*, y un entero* $k < m$*, encuéntrese una cadena «centro»* $s \notin S$*, de longitud, al menos* k*, tal que, para todo* $s_i \in S$*, exista una subcadena* t_i *de* s_i*, de longitud* k*, tal que* $d(s, t_i) \leq d$*, y que este umbral superior* d*, sea mínimo.*

LI, MA *y* WANG *[1180] presentan algoritmos que solucionan estos problemas. No obstante, observemos que cualquiera de estos problemas es NP-duro.*

Podemos interpretar el ítem solución del problema CSP como el ***ítem candidato ideal*** *para ser el delegado o representante del conjunto de ítems considerado. Del mismo modo, podemos interpretar el ítem solución del problema CSSP como el* ***ítem candidato casi-ideal*** *para ser el delegado o representante del conjunto de ítems considerado (cuanto más cercano esté* k *de* m*, es decir, cuanto más propiedades comparta potencialmente con el grupo, «más ideal» será el ítem candidato). Potencialmente, porque* $m - k$ *denota, en esta interpretación, el número de propiedades sí aplicables a cualquiera de los ítems del grupo, pero no aplicables al ítem candidato. Como ejemplo, piense el lector en un conjunto de cámaras fotográficas, todas ellas con objetivos no intercambiables. Podemos incluir como propiedades para una comparativa la distancia mínima de enfoque y la apertura de diafragma. Pero si las comparamos con cámaras reflex de objetivos intercambiables, ninguna de esas dos propiedades es aplicable a estas últimas, porque son propiedades del objetivo y no del cuerpo de la cámara.*

Del mismo modo, podríamos interpretar como el ítem candidato anti-ideal a aquél que fuese solución del problema de elección de la cadena más lejana (FSP, Farthest String Problem).

Comentar también, que el siguiente problema, conocido como problema de la selección de la cadena distintiva (DSP, Distinguishing String Problem) —cfr. LANCTOT, LI, MA, WANG *y* ZHANG *[1181]— evoca nuestro interés en* ***simultanear nuestra meta de acercarnos a lo que buscamos, con nuestra meta de alejarnos de lo que no buscamos*** *—cfr. Cap. 13.*

- Problema de la selección de la cadena distintiva*: Dados un conjunto* $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ *de cadenas («malas»), de longitud, al menos* m*, un conjunto* $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ *de cadenas («buenas») y dos valores umbral* d_m *y* d_b*, encuéntrese una cadena* s *tal que para cada cadena* $z \in M$*,* $d(s, t) \leq d_m$*, para alguna subcadena* t *de* z*, y que para cualquier cadena* $z \in B$*,* $d(s, z) \geq d_b$*.*

La formulación más simple se establece considerando el alfabeto finito $\Sigma = \{0, 1\}$ *y el conjunto de propiedades* $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$*. De este modo, podemos interpretar una cadena finita* s*, como un* ***perfil bivalente de satisfacción*** *de las propiedades que definan los perfiles. Y podemos interpretar los conjuntos de cadenas* $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ *que aparecen en las definiciones de los problemas, como el conjunto de los perfiles de satisfacción de* n *individuos. Es obvio que caben más interpretaciones. En particular, con respecto a este alfabeto, una cadena puede interpretarse como un indicador ponderado equivalente —cfr. §10.7—. Así, interpretaríamos* $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ *como el perfil de un individuo.*

10.5 Segundo divertimento: Disimilaridad entre intervalos de $[0,1]$

Sea $\mathcal{U} = [0,1]$, considerado como retículo normado. Queremos comparar intervalos de $\mathcal{U}$. Al ser continuo el universal, consideramos su discretización finita, eligiendo un número de dígitos significativos. Por ejemplo, si elegimos un único dígito significativo, obtenemos la siguiente representación endecadaria del universal:

$$\mathcal{U} = \{0, .1, .2, .3, .4, .5, .6, .7, .8, .9, 1\}$$

Ergo, el problema se reduce al caso de tener un universal finito. Utilizando un conjunto de índices ponderales, por ejemplo:

$$W = \left\{ \frac{1}{66}, \frac{2}{66}, \frac{3}{66}, \frac{4}{66}, \frac{5}{66}, \frac{6}{66}, \frac{7}{66}, \frac{8}{66}, \frac{9}{66}, \frac{10}{66}, \frac{11}{66} \right\}$$

la representación ponderada del referencial $\mathcal{U} = \{0, .1, .2, .3, .4, .5, .6, .7, .8, .9, 1\}$ es el multiconjunto:

$$\{0, .1, .1, .2, .2, .2, \overbrace{.3, \ldots, .3}^{4}, \overbrace{.4, \ldots, .4}^{5}, \overbrace{.5, \ldots, .5}^{6}, \overbrace{.6, \ldots, .6}^{7}, \overbrace{.7, \ldots, .7}^{8}, \overbrace{.8, \ldots, .8}^{9}, \overbrace{.9, \ldots, .9}^{10}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{11}\} \quad (10.104)$$

Entonces, cualquier intervalo admite una representación ponderada como multiconjunto, su **indicador ponderado equivalente** —*cfr.* §10.7. Así, por ejemplo:

$$[.3, .6] \leftrightsquigarrow \{.3, .4, .5, .6\}^{w}_{\chi} = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{6=1+2+3}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{22=4+5+6+7}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{38=8+9+10+11})$$

Ejemplo 161 *Consideremos el referencial $\mathcal{U} = [0, 1]$. Trabajamos con una precisión de dos dígitos significativos. Consideremos, como prototipo, el intervalo $\langle .3, .6 \rangle$. Sean los intervalos $\langle .4, .5 \rangle$, $\langle .4, .7 \rangle$, $\langle .2, .5 \rangle$ y $\langle .2, .7 \rangle$. Queremos discriminar entre intervalos concéntricos y no concéntricos con el intervalo prototipo $\langle .3, .6 \rangle$.*

Las matrices de coocurrencias de las parejas $(\langle .3, .6 \rangle, \langle .4, .5 \rangle)$, $(\langle .3, .6 \rangle, \langle .4, .7 \rangle)$, $(\langle .3, .6 \rangle, \langle .2, .5 \rangle)$, y $(\langle .3, .6 \rangle, \langle .2, .7 \rangle)$, son, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 506 & 920 \\ 0 & 3725 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1071 & 355 \\ 665 & 3060 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 861 & 565 \\ 255 & 3470 \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} 1426 & 0 \\ 920 & 2805 \end{pmatrix} \quad (10.105)$$

*Dos intervalos son concéntricos, precisamente si $bc = 0$. Comparamos los diferentes índices de disimilaridad estudiados en los apartados anteriores. Lo mínimo que exigimos es que sean lo que nosotros, más adelante, proponemos denominar **«asignaciones básicas de disimilaridad»** —cfr. Def. 196 (pág. 339)—. La Tabla 10.6 refleja una comparativa de la acción de los índices de disimilaridad en el caso del presente ejemplo ilustrativo.*

	$(\langle .3, .6 \rangle, J)$			
	$\langle .4, .5 \rangle$	$\langle .4, .7 \rangle$	$\langle .2, .5 \rangle$	$\langle .2, .7 \rangle$
δ^{sm}	**.179**	.196	.159	**.179**
δ^{SS1}	**.098**	.109	.086	**.098**
δ^{RT}	**.303**	.328	.275	**.303**
δ^{BUB}	.329	.260	.241	.212
δ^{di}	**.045**	.049	.040	**.045**
δ^{E}	**30.33**	31.78	28.64	**30.33**
δ^{E2}	**920**	1010	820	**920**
δ^{J}	.645	.485	.488	.392
δ^{Cz}	.476	.320	.323	.244
δ^{SS3}	.784	.654	.656	.563
δ^{MC}	.645	.628	.625	.392
δ^{K2}	.323	.314	.312	.196
δ^{OC}	.404	.3173	.3175	.220
δ^{SI}	**0**	.249	.228	**0**
δ^{SS4}	.211	.227	.208	.160
δ^{SS5}	.467	.414	.389	.323
δ^{tam}	**.032**	**.0036**	**.0036**	**.032**
δ^{pat}	**0**	.0088	.0054	**0**
δ^{fo}	**.147**	.193	.156	**.147**

Tabla 10.6: *Distinción entre pares de intervalos concéntricos y no concéntricos mediante sus indicadores ponderados bivalentes e índices de disimilaridad.* — *Fuente:* Elaboración propia.

Como vemos, únicamente

$$\delta^{\text{tam}}(A,B) = \frac{(b-c)^2}{(a+b+c+d)^2}$$

consigue discriminar lo concéntrico de lo no concéntrico. Recordemos que su rango es $[0,+\infty)$*, y que no es un coeficiente de disimilaridad, al no ser monótono ni en* b *ni en* c *(es no decreciente en* b*, si* $c \leq b$*, y es no decreciente en* c*, si* $b \leq c$*). Sin embargo, sí satisface la condición de minimalidad —cfr. 196 (pág. 339)—,* $\delta^{\text{tam}}(A,A) = 0$*, única exigencia para ser* «asignación básica de disimilaridad»*, siendo además, decreciente en* a *y simétrico en* (b,c)*.*

En realidad, estas propiedades también las verifica:

$$\frac{|b-c|}{|a+b+c+d|} \tag{10.106}$$

o simplemente,

$$|b-c| \tag{10.107}$$

que a nuestro entender, surgen de una manera más espontánea —cfr. Tabla 10.7.

	$(\langle .3, .6\rangle, J)$			
	$\langle .4, .5\rangle$	$\langle .4, .7\rangle$	$\langle .2, .5\rangle$	$\langle .2, .7\rangle$
$\vert b-c\vert$	920	310	310	920
$\frac{\vert b-c\vert}{\vert a+b+c+d\vert}$	.179	.0602	.0602	.179

Tabla 10.7: *Distinción entre pares de intervalos concéntricos y no concéntricos mediante sus equivalentes ponderales bivalentes y dos índices de disimilaridad más intuitivos que los de la tabla anterior.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

10.6 Estudio ilustrativo: Aplicación de TOPSIS sobre perfiles bivalentes en diagnosis clínica. La discriminación entre tipos de personalidad A y B

Algunas personas están más predispuestas al estrés que otras. En los años 50 se diferencian dos tipos de personalidad, el Tipo A y el Tipo B —*cfr.* Friedman, Rosenman y Carroll [1182]; Friedman y Rosenman [1183]—. Estos cardiólogos americanos recogieron información sobre 1500 hombres, encontraron que se distinguían perfectamente dos grupos. Los que pertenecían al grupo que denominaron de personalidad Tipo A parecían ser más propensos a padecer ataques al corazón. Los de Tipo B son personas que disfrutan de una vida más relajada.

Gough y Heilbrun [1185] establecieron una lista de adjetivos para calificar ambos tipos de personalidad. Herman, Blumenthal, Black y Chesney [1186, 1981] analizaron tal lista de adjetivos, pidiendo a veinte investigadores en el tema del patrón A, que calificaran positiva o negativamente cada adjetivo, según lo considerasen característico (+) o no (−) del patrón A. Parte del resultado se muestra a continuación.

100 (+) Agresivo, apresurado.

100 (−) Acomodaticio.

$>90(+)$ Activo, alerta, ambicioso, asertivo, dominante, enérgico, hostil, impaciente, irritable, rápido.

$>90(-)$ Tranquilo, relajado.

$>80(+)$ Resuelto, vigoroso, impulsivo, intranquilo.

$>80(-)$ Apacible, paciente, lento, no ambicioso.

$>70(+)$ Discutidor, tiránico, excitable, laborioso, persistente, tenso.

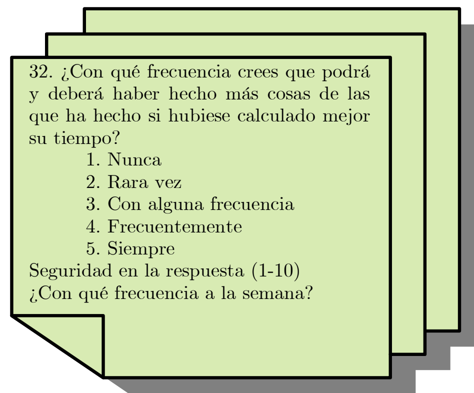


Figura 10.1: *Cuestión número 32 del cuestionario de cambio del paciente (CCP). Programa de prevención secundaria e intervención terapéutica de factores de rieso psicosociales de la cardiopatía isquémica.*
— *Fuente:* Doctora Rosa Sender. Departamento de Psiquiatría y Psicobiología Clínica. Subdivisión de Psiquiatría y Psicología. Hospital Clínico y Provincial de Barcelona —*cfr.* Sender, Valdés, Riesco y Martín [1184] (p. 150).

$> 70(-)$ Pausado, callado, reflexivo, no excitable.

$> 60(+)$ Seguro de sí mismo, exigente, emprendedor, precipitado, porfiado, abierto, egocéntrico, fuerte.

$> 60(-)$ Reservado, silencioso, sumiso, débil.

$> 50(+)$ Entusiasta, práctico, voluntarioso, individualista, ruidoso, masculino, perseverante, testarudo.

$> 50(-)$ Apático, cauteloso, satisfecho, soñador, femenino, amable, perezoso, dócil, asustadizo, tímido.

De la lista de adjetivos, consideremos sólo cinco: agresivo, laborioso, exigente, irritable y testarudo. La definición de los tipos A y B, ideal y anti-ideal, respectivamente sería la siguiente:

Adjetivos:	Agresivo(a)	Laborioso(a)	Exigente	Irritable	Testarudo(a)
Tipo A (ideal)	1	1	1	1	1
Tipo B (anti-ideal)	0	0	0	0	0

Fijémonos en dos sujetos. Manuel es agresivo, exigente e irritable. No es ni laborioso ni testarudo. Isabel no es agresiva, pero sí es laboriosa, exigente, irritable y testaruda.

Adjetivos:	Agresivo(a)	Laborioso(a)	Exigente	Irritable	Testarudo(a)
Manuel	1	0	1	1	0
Isabel	0	1	1	1	1

Un estudio de Price [1187] muestra las frecuencias de citación de las características del tipo A recogidas de la literatura científica entre 1959 y 1979. Supongamos que establecemos la importancia de los adjetivos referentes según los índices ponderales siguientes, en relación a las frecuencias de citación en la literatura científica:

Adjetivos:	Agresivo(a)	Laborioso(a)	Exigente	Irritable	Testarudo(a)
Índices ponderales:	10	7	6	9	5

Las matrices de coocurrencia son:

$(\text{Manuel}^w_\chi, \mathcal{I}^w_\chi)$	$(\text{Manuel}^w_\chi, \overline{\mathcal{I}}^w_\chi)$	$(\text{Isabel}^w_\chi, \mathcal{I}^w_\chi)$	$(\text{Isabel}^w_\chi, \overline{\mathcal{I}}^w_\chi)$
$\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 25 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 27 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

Como parece que ambos estados representan verdaderas alternativas, verdaderas cualidades presentes aunque diferentes, entonces parece más adecuado cualquier índice dependiente de las coincidencias positiva y negativa, como el coeficiente de coincidencia simple: los valores 0 indican tipo B y los valores 1, tipo A. Utilicemos pues, el coeficiente de coincidencia simple —*cfr.* 10.27:

$$\begin{aligned}\sigma^{\text{sm}}(\text{Manuel}^w_\chi, \mathcal{I}^w_\chi) &= 25/37\\ \sigma^{\text{sm}}(\text{Isabel}^w_\chi, \mathcal{I}^w_\chi) &= 25/37\end{aligned}$$

Por ahora, diríamos que Isabel es *más* tipo A (ideal) de lo que lo es Manuel. Como, por otro lado, al comparar con el anti-ideal (tipo B):

$$\begin{aligned}\sigma^{\text{sm}}(\text{Manuel}^w_\chi, \overline{\mathcal{I}}^w_\chi) &= 12/37\\ \sigma^{\text{sm}}(\text{Isabel}^w_\chi, \overline{\mathcal{I}}^w_\chi) &= 10/37\end{aligned}$$

se confirma así que Isabel es más tipo A de lo que lo es Manuel.

Y, en efecto, aunque ya no haría falta calcularlas, vemos que las razones de similitud con el ideal —que ahora denominaremos **razones de similaridad con el ideal**, por usar un coeficiente de disimilaridad en vez de una disimilitud, como en (10.6)—, son:

$$\begin{aligned}S(\text{Manuel}^w_\chi, \overline{\mathcal{I}}^w_\chi) &= 25/37\\ S(\text{Isabel}^w_\chi, \overline{\mathcal{I}}^w_\chi) &= 27/37\end{aligned}$$

En definitiva, que Isabel es más tipo A de lo que lo es Manuel.

Observación 162 *Obsérvese, además, la coherencia entre ambas razones de similaridad, pues no son más que medias ponderadas, a saber, para Manuel:*

$$\frac{10+6+9}{10+7+6+9+5}$$

y para Isabel:

$$\frac{7+6+9+5}{10+7+6+9+5}$$

Pero, en realidad, no todo es tan nítido. Existen varias posibilidades de modificación de los adjetivos referentes[16]*: una temporal (v. gr. con frecuencia, pocas veces, etc.) y la otra de fuerza (v. gr. muy agresivo, poco agresivo, etc.). Centrándonos en esta última, y una vez determinado un conjunto de cercas semánticas*[17] *que afecten los adjetivos referentes, podríamos, por ejemplo, representar la afirmación:*

«Manuel es bastante agresivo,
para nada laborioso,
muy exigente,
bastante irritable
y algo testarudo.»

Esta representación es un conjunto borroso, que puede modelarse como un subconjunto borroso ordinario (v. gr. bastante $\equiv 0.8$*, etc.), o como un subconjunto borroso de tipo 2 (o sea, trabajando directamente con las cercas). En todo caso, estaríamos en situación de aplicar nuestra propuesta TOPSIS-0/1 —cfr. infra §10.8— de modificación o extensión de TOPSIS.*

[16] La característica enérgico se usa a menudo conjuntamente con otras, como competitividad enérgica o energía agresiva —*cfr.* Sender, Valdés, Riesco y Martín [1184] (p. 62).

[17] **Cercas semánticas** (*semantic hedges*): como dice George Lakoff [312, 313], palabras cuya función es hacer las cosas más o menos borrosas. En el ejemplo que aparece en el texto, el adjetivo exigente está cercado por muy. Si bien decir sólo exigente está repleto de incertidumbre e imprecisión, pues no decimos en qué medida, éstas disminuyen al cercar con muy.

Observemos que exigente, en sí, es un término que representa un **concepto borroso**. Pero lechuza es un término que representa un concepto nítido, preciso. Saliéndole al paso a las lechuzas, recuerdo que Alfredo Deaño [314] (p. 345) propone el supuesto de que alguien diga: «Hegel es una especie de lechuza». La utilización de la cerca semántica una especie de, niega el *significado literal* del término lechuza, a la par que afirma alguno de sus *significados connotativos*. Y estos son los dos tipos de conceptos borrosos que distingue George Lakoff [312, 313]: los conceptos borrosos en sí, y los que lo son por estar cercados semánticamente.

10.7 α-corte indicador ponderado

La extensión de funciones definidas sobre conjuntos nítidos a conjuntos borrosos utilizando los α-cortes es un procedimiento bien conocido —*cfr.* §4.9. Partiendo del hecho de que cualquier conjunto borroso puede ser representado de manera única utilizando la familia de todos sus α-cortes —*cfr.* §4.4—, vemos los α-cortes de un objeto borroso como objetos nítidos. Esto nos recuerda la postura atomista de Jerry Alan FODOR [652] —*cfr.* §13.1—. Por tanto, definimos la presencia o ausencia de cualquier propiedad en la descripción borrosa de un objeto o clase a partir de la combinación de los resultados de la evaluación de la presencia o la ausencia de la propiedad en todos sus α-cortes. Llamamos **α-corte indicador ponderado** a la tupla bivalente que representa la presencia o la ausencia de las características en el (objeto nítido) α-corte —*cfr.* §10.7—. Trabajando bajo este formalismo, es posible considerar que algunas propiedades sean más importantes que otras.

Para todo subconjunto de propiedades (atributos) $A \in \mathfrak{P}(P)$, definimos su **indicador equivalente** como:

$$A_\chi = (\chi_A(p_1), \ldots, \chi_A(p_n)) \tag{10.108}$$

donde χ_A es la función indicadora (característica) del conjunto A, o sea, $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ y $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

Dados dos subconjuntos de propiedades plausibles $A, B \in \mathfrak{P}(P)$, podemos medir la «disimilaridad» entre ellos, midiendo la «disimilaridad» entre sus indicadores equivalentes, utilizando para ello cualquiera de los coeficientes de disimilaridad vistos en las secciones anteriores.

Como discutíamos anteriormente, una dificultad que surge al usar estas medidas de disimilaridad es que sólamente denpenden de la presencia o la ausencia de los elementos, pero no *de qué* elementos —*cfr.* §10.4—. Por ejemplo, si el universo de discurso tiene más de tres elementos, la disimilaridad entre dos conjuntos disjuntos y binarios (dos elementos) es siempre la misma, sin depender de los conjuntos.

La teoría de la información proporciona una solución, introduciendo una ponderación —*cfr.* COVER y THOMAS [702]; PARDO [703]; KHINCHIN [704]—. Sea $w = \{w_1, \ldots, w_n\}$ un conjunto de índices ponderales tales que $w_1 + \ldots + w_n = 1$. Sea s el número de dígitos significativos a la derecha del punto decimal. Para cada i definimos $w_i^* = 10^s w_i$. Definimos el **indicador ponderado equivalente** de A como:

$$A \rightsquigarrow A_\chi^w = (\overbrace{\chi_A(p_1), \ldots, \chi_A(p_1)}^{w_1^* \text{ veces}}, \ldots, \overbrace{\chi_A(p_n), \ldots, \chi_A(p_n)}^{w_n^* \text{ veces}}) \tag{10.109}$$

Cada uno de estos bits se interpreta como la presencia o ausencia de una propiedad concreta[18]. La multiplicidad de los bits correspondientes a una misma propiedad sólo es indicativa de la importancia de dicha propiedad. Proponemos medir la disimilaridad mediante:

$$d(A, B) = d(A_\chi^w, B_\chi^w) \tag{10.110}$$

De este modo, en el caso de los α-cortes de subconjuntos borrosos:

$$d_\alpha^{\mathrm{H}}(O_i, O_j) = \delta({}^\alpha O_{i\chi}^{\ w}, {}^\alpha O_{j\chi}^{\ w}) \tag{10.111}$$

donde ${}^\alpha O_{i\chi}^{\ w}$ denota el indicador ponderado equivalente del α-corte del objeto O_i (que llamaremos, abusando quizás un poco del lenguaje, **α-corte indicador ponderado** de O_i) y δ es una asignación de disimilaridad entre conjuntos nítidos finitos —*cfr.* §10.4 y Def. 197 (pág. 339)—. Ahora bien, como los ${}^\alpha O_{i\chi}^{\ w}$ son tuplas bivalentes, es razonable que δ sea alguno de los índices «específicos» de disimilaridad entre tuplas bivalentes —*cfr.* §10.2. En los ejemplos de aplicación usaremos 17 de estos índices.

Observación 163 *Los indicadores equivalentes X_χ y X_χ^w, son variables nominales de conjuntos, de dimensiones n y $w_1^* \times w_2^* \times \ldots \times w_n^*$, respectivamente.* SNEATH *y* SOKAL *[242] (p. 150) proponen una* ***representación***

[18]El proceso de identificación de un conjunto ordinario con un vector o cadena binaria, donde un bit se interprete como la presencia o ausencia de una característica concreta (*fingerprinting*) es frecuentemente usado en *Química Informática* («*chemoinformatics*»), por ejemplo, con el objetivo de valorar la similaridad entre dos moléculas —*cfr.* BRADSHAW [1141]; WILLETT, BARNARD y DOWNS [1142]—. El proceso de «*fingerprinting*» es independiente de la medida que posteriormente se utilice para asociar o comparar tales cadenas binarias. Como finalidad puede tenerse un proceso de clasificación (asignación de una molécula a una clase o a un conjunto de clases según sea la similitud con los prototipos de las clases); de análisis de agrupamientos –«*clustering*»– (división del conjunto de moléculas en varios subconjuntos –agrupamientos o «*clusters*»– de manera que las moléculas de una misma clase sean más similares entre sí de lo que puedan serlo respecto de las moléculas de cualquier otra clase); de predicción de propiedades —*cfr.* BROWN y MARTIN [1143]—, de diseño («*synthesis design*») —*cfr.* WIPKE y ROGERS [1144]—, de un cribado (*screening*) virtual —*cfr.* BOHM y SCHNEIDER [1145]— o de análisis de diversidad molecular —*cfr.* DEAN y LEWIS [1146].

***alternativa** para las variables nominales: si la variable nominal está en el estado k, entonces las primeras $(k-1)$ variables bivalentes de su representación, estarían valoradas como 1, y las restantes, como 0. Por ello, esta representación sólo utiliza $(n-1)$ variables bivalentes, en el caso de X_χ, y $(w_1^* \times w_2^* \times \ldots \times w_n^*) - w_n^*$, si se trata de X_χ^w. No obstante, para su implementación efectiva, debe recurrirse a técnicas de implementación específica de **matrices esparcidas**.*

10.8 TOPSIS-0/1

TOPSIS —*cfr.* §10.1.6— asume que cada atributo tiene una tendencia hacia la utilidad monótona creciente o decreciente —*cfr.* TRIANTAPHYLLOU y LIN [1188] (p. 284)—. Es por ello que, parece razonable que aquella alternativa que sea elegida como la mejor debería estar a la menor distancia desde la solución ideal y a la mayor distancia desde la solución anti-ideal. Como vimos en §10.1.6, TOPSIS asume un sentido euclideo para la distancia. Recordemos que la «alternativa» ideal $\mathcal{I}$ (resp., la anti-ideal $\overline{\mathcal{I}}$) tiene como valor de cada atributo la puntuación máxima (resp., mínima) de entre las que aparecen asignadas a ese atributo en la matriz de decisión.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ dos conjuntos finitos, el primero de alternativas (los objetos borrosos) y el segundo de criterios (los atributos). Representamos toda alternativa A mediante una n-tupla ordenada numérica $A = \langle A(C_1), \ldots, A(C_n)\rangle$. Como dijimos en §10.1.6, para evaluar la *cercanía* a la solución ideal, así como la *lejanía* de la solución anti-ideal, TOPSIS usa una métrica ponderada de MINKOWSKI:

$$d_p^w(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \tag{10.112}$$

donde x e y son las descripciones numéricas —usando n variables numéricas— de dos elementos del universo de discurso, $1 \leq p < \infty$ y $w = \langle w_1, \ldots, w_n\rangle$ es una n-tupla ordenada de índices ponderales que permite distinguir entre criterios más o menos relevantes. Como las estructuras de preferencia generadas por la cercanía a la ideal y la lejanía a la anti-ideal pueden ser diferentes, HWANG and YOON [991] definieron la razón de similitud a la ideal («relative closeness to ideal solution») de cualquier alternativa A:

$$S(A, I) = \frac{d_p^w(A, \overline{I})}{d_p^w(A, I) + d_p^w(A, \overline{I})} \tag{10.113}$$

Lo que proponemos es modificar (10.113) reemplazando d_p^w por una disimilaridad horizontal entre α-cortes:

$$S(A, I) = \frac{D^{\mathrm{H}}(A, \overline{I}; \mathfrak{p}, w, d_\alpha^{\mathrm{H}}, x)}{D^{\mathrm{H}}(A, I; \mathfrak{p}, w, d_\alpha^{\mathrm{H}}, x) + D^{\mathrm{H}}(A, \overline{I}; \mathfrak{p}, w, d_\alpha^{\mathrm{H}}, x)} \tag{10.114}$$

donde D^{H} se define según §7.1.3, $\mathfrak{p}$ es el subconjunto finito de $[0, 1]$ definido como la unión de todos los conjuntos de nivel de las alternativas, $w : \mathfrak{p} \to [0, +\infty)$ es la función ponderal constante $w(\alpha) = 1/|\mathfrak{p}|$, y la función de disimilaridad entre α-cortes indicadores ponderados —*cfr.* Ec. 10.111— es la misma para todo $\alpha \in [0, 1]$. Denominamos TOPSIS-0/1 a esta modificación de TOPSIS.

10.9 Estudio ilustrativo: Elección por valoración de criterios igualmente importantes

Para cualquiera de los ejemplos y situaciones relacionadas con la elección de personal, podemos asumir que disponemos de un servidor *intranet* para recursos humanos, seguramente con posibilidad de extensión a una *extranet* (como SABRE, ECONOMOST o ASAP —*cfr.* SHORT y VENKATRAMAN [1189]), sobre la que pueda implantarse un IIS (*Interorganizational Information System*), quizás debida a una estructura coyuntural virtual de *red temporal de empresas* —*cfr.* VÁSQUEZ BRONFMAN [871]; PUNSET [866]—. Microsoft HR Web —*cfr.* HONEYCUTT [1190] (pp. 70ss., de la edición española)—, por cierto, integrado en SAP R/3, uno de los ERP (*Enterprise Resource Planning*) más conocidos, puede servir como núcleo sobre el que desarrollar un sistema de gestión de base de datos que use ODMG. En definitiva, un sistema como infraestructura técnica que ponga a disposición de los usuarios autorizados de la empresa los datos e información de la misma —*cfr.* GARCÍA BRAVO [1191] (p. 225)— para ser procesados y trabajar con ellos posteriormente[19], seguramente

[19] El concepto de ***Data Warehouse*** es prácticamente sinónimo. En palabras de Félix CUESTA FERNÁNDEZ [1192] —citado por Daniel GARCÍA BRAVO [1191] (p. 225): [...] es el de un almacén de datos que recoge información, tanto interna como externa, reorganizando dichos datos y almacenándolos en un nuevo repositorio, haciéndola accesible a cualquier ubicación para su explotación.»

mediante aplicaciones que caerán dentro de las categorías estándar DSS (*Decision Support Systems*), GDSS (*Group Decision Support Systems*), EIS (*Executive Information Systems*), ESS (*Executive Support Systems*) o MIS (*Management Information Systems*) —*cfr.* García Bravo [1191] (pp. 93ss., 97ss, 102ss., 102ss., 85ss., respectivamente).

Trabajemos de nuevo con el supuesto recogido en §10.1.7. La unión de los conjuntos de niveles es:

$$\Lambda(A_1) \cup \Lambda(A_2) \cup \Lambda(A_3) = \{.4, .5, .6, .7, .8, .9\}$$

La Tabla 10.8 muestra este conjunto de α-cortes considerados.

α-cortes considerados		
${}^{.4}A_1 = \{C_1, C_2, C_3\}$	${}^{.4}A_2 = \{C_1, C_2, C_3\}$	${}^{.4}A_3 = \{C_1, C_2, C_3\}$
${}^{.5}A_1 = \{C_1, C_3\}$	${}^{.5}A_2 = \{C_1, C_2, C_3\}$	${}^{.5}A_3 = \{C_1, C_3\}$
${}^{.6}A_1 = \{C_1, C_3\}$	${}^{.6}A_2 = \{C_2, C_3\}$	${}^{.6}A_3 = \{C_1, C_3\}$
${}^{.7}A_1 = \{C_1, C_3\}$	${}^{.7}A_2 = \{C_2, C_3\}$	${}^{.7}A_3 = \{C_3\}$
${}^{.8}A_1 = \{C_1\}$	${}^{.8}A_2 = \{C_1\}$	${}^{.8}A_3 = \varnothing$
${}^{.9}A_1 = \{C_1\}$	${}^{.9}A_2 = \{C_1\}$	${}^{.9}A_3 = \varnothing$

Tabla 10.8: *Tabla que muestra los α-cortes considerados en el supuesto recogido en §10.1.7.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

En la Tabla 10.9 se recogen las matrices de presencia-ausencia correspondientes a las comparaciones dos a dos entre los α-cortes indicadores ponderados de las alternativas —*cfr.* 10.7—. De cara a simplificar la notación, los notamos como ${}^{\alpha}A$, en vez de ${}^{\alpha}A^w_{\chi}$.

Relaciones de coocurrencia entre objetos					
			s_{12}	s_{13}	s_{23}
${}^{.4}A_1 = (1,1,1)$	${}^{.4}A_2 = (1,1,1)$	${}^{.4}A_3 = (1,1,1)$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
${}^{.5}A_1 = (1,0,1)$	${}^{.5}A_2 = (1,1,1)$	${}^{.5}A_3 = (1,0,1)$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
${}^{.6}A_1 = (1,0,1)$	${}^{.6}A_2 = (0,1,1)$	${}^{.6}A_3 = (1,0,1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
${}^{.7}A_1 = (1,0,1)$	${}^{.7}A_2 = (0,1,1)$	${}^{.7}A_3 = (0,0,1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
${}^{.8}A_1 = (1,0,0)$	${}^{.8}A_2 = (1,0,0)$	${}^{.8}A_3 = (0,0,0)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
${}^{.9}A_1 = (1,0,0)$	${}^{.9}A_2 = (1,0,0)$	${}^{.9}A_3 = (0,0,0)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Tabla 10.9: *Tabla de doble entrada que recoge, entre el objeto i y el objeto j, la relación de co-ocurrencia (acuerdo-desacuerdo, presencia-ausencia), con respecto al supuesto recogido en §10.1.7.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Las Tablas 10.10 y 10.11, muestran, para las «alternativas» ideal y anti-ideal, los α-cortes y sus representaciones bivalentes. En la Tabla 10.12 aparecen las matrices de presencia-ausencia correspondientes a las comparaciones entre los α-cortes indicadores ponderados de las alternativas con los de las «alternativas» ideal y anti-ideal.

En este ejemplo, elegimos, en base a su frecuente uso en la literatura, cinco coeficientes de disimilaridad de entre todos los relacionados en §10.2:

- «Simple-Matching» (δ^{sm}) —*cfr.* Ec. 10.27—,
- «Sneath-Sokal(1)» (δ^{SS1}) —*cfr.* Ec.10.28—,

de la clase $\mathbb{D}_d$ —*cfr.* Ec. 10.92—, y

Ideal: α-cortes considerados	
${}^{.4}\mathcal{I} = \{C_1, C_2, C_3\}$	${}^{.4}\mathcal{I} = (1, 1, 1)$
${}^{.5}\mathcal{I} = \{C_1, C_2, C_3\}$	${}^{.5}\mathcal{I} = (1, 1, 1)$
${}^{.6}\mathcal{I} = \{C_1, C_2, C_3\}$	${}^{.6}\mathcal{I} = (1, 1, 1)$
${}^{.7}\mathcal{I} = \{C_1, C_2, C_3\}$	${}^{.7}\mathcal{I} = (1, 1, 1)$
${}^{.8}\mathcal{I} = \{C_1, C_3\}$	${}^{.8}\mathcal{I} = (1, 0, 1)$
${}^{.9}\mathcal{I} = \{C_1\}$	${}^{.9}\mathcal{I} = (1, 0, 0)$

Tabla 10.10: *Caso de la «alternativa» ideal. α-cortes considerados y sus representaciones bivalentes, en el supuesto recogido en §10.1.7.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Anti-ideal: α-cortes considerados	
${}^{.4}\overline{\mathcal{I}} = \{C_1, C_2, C_3\}$	${}^{.4}\overline{\mathcal{I}} = (1, 1, 1)$
${}^{.5}\overline{\mathcal{I}} = \{C_1, C_3\}$	${}^{.5}\overline{\mathcal{I}} = (1, 0, 1)$
${}^{.6}\overline{\mathcal{I}} = \{C_3\}$	${}^{.6}\overline{\mathcal{I}} = (0, 0, 1)$
${}^{.7}\overline{\mathcal{I}} = \{C_3\}$	${}^{.7}\overline{\mathcal{I}} = (0, 0, 1)$
${}^{.8}\overline{\mathcal{I}} = \varnothing$	${}^{.8}\overline{\mathcal{I}} = (0, 0, 0)$
${}^{.9}\overline{\mathcal{I}} = \varnothing$	${}^{.9}\overline{\mathcal{I}} = (0, 0, 0)$

Tabla 10.11: *Caso de la «alternativa» anti-ideal. α-cortes considerados y sus representaciones bivalentes, en el supuesto recogido en §10.1.7.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

- «Jaccard-Tanimoto» (δ^{J}) —*cfr.* Ec. 10.34—,
- «Czekanowski-Sørensen-Dice-Bray» (δ^{Cz}) —*cfr.* Ec. 10.35—, y
- «Sneath-Sokal(3)» (δ^{SS3}) —*cfr.* Ec. 10.36—,

de la clase $\mathbb{D}_{\neg d}$ —*cfr.* Ec. 10.93.

Consideramos:

$$S(A, \mathcal{I}) = \frac{D^{\mathrm{H}}(A, \overline{\mathcal{I}}; \{0, 1\}, (1/2, 1/2), d_\alpha^{\mathrm{H}}, x)}{D^{\mathrm{H}}(A, \mathcal{I}; \{0, 1\}, (1/2, 1/2), d_\alpha^{\mathrm{H}}, x) + D^{\mathrm{H}}(A, \overline{\mathcal{I}}; \{0, 1\}, (1/2, 1/2), d_\alpha^{\mathrm{H}}, x)} \tag{10.115}$$

donde $\mathfrak{p} = \{.4, .5, .6, .7, .8, .9\}$, $w : \mathfrak{p} \to \mathbb{R}_0^+$ es la función constante $w(\alpha) = 1/|\mathfrak{p}| = 1/6$, y el coeficiente de disimilaridad entre α-cortes indicadores ponderados que empleamos, a saber, $d_\alpha^{\mathrm{H}} \in \{\delta^{\mathrm{sm}}, \delta^{\mathrm{SS1}}, \delta^{\mathrm{J}}, \delta^{\mathrm{Cz}}, \delta^{\mathrm{SS3}}\}$, es el misma para todo $\alpha \in [0, 1]$. De este modo, obtenemos los resultados que aparecen en la Tabla 10.13.

Es decir, obtenemos la estructura de preferencias —*cfr.* Tabla 10.13:

$$A_2 > A_1 > A_3 \tag{10.116}$$

Observación 164 *Podemos apreciar una relación de proximidad o afinidad entre alternativas, hallando una ordenación de las posibles parejas, según su afinidad. Usando las medidas horizontales de disimilitud $D^{\mathrm{H}}_{\varphi,w}$, obtenemos lo que muestra la Tabla 10.14.*

Es decir dos ordenaciones diferentes, correspondientes a las dos «subfamilias» de disimilaridades usadas —cfr. Tabla 10.14:

$$\delta_{1,3}^{\mathrm{sm,SS1}} < \delta_{1,2}^{\mathrm{sm,SS1}} < \delta_{2,3}^{\mathrm{sm,SS1}} \tag{10.117}$$

$$\delta_{1,2}^{\mathrm{J,Cz,SS3}} < \delta_{1,3}^{\mathrm{J,Cz,SS3}} < \delta_{2,3}^{\mathrm{J,Cz,SS3}} \tag{10.118}$$

La primera ordenación (esto es, teniendo en cuenta las coincidencias en ausencias) obtiene como más similares entre sí las alternativas A_1 y A_3, mientras que la segunda ordenación (obviando las coincidencias en ausencias) propone como más similares entre sí las alternativas A_1 y A_2. Obsérvese que en ambos casos, las menos similares son A_2 y A_3. Obsérvese también la coherencia de estos resultados con el orden dado por (10.116). No sería coherente por ejemplo una mayor proximidad entre A_2 y A_3, pues A_1 está «en medio».

Observación 165 *En la identificación que hemos hecho entre α-cortes y vectores binarios, ¿0 significa «ausente» y 1 «presente»?. El hecho de que C_1 no esté presente en ${}^{.7}A_2 = \{C_2, C_3\}$ ni en ${}^{.7}A_3 = \{C_3\}$, ¿hace a estos*

	Relación de coocurrencia respecto de los α-cortes ponderados de la «alternativa» ideal			**«alternativa» anti-ideal**		
α	$(A_1,\mathcal{I})$	$(A_2,\mathcal{I})$	$(A_3,\mathcal{I})$	$(A_1,\overline{\mathcal{I}})$	$(A_2,\overline{\mathcal{I}})$	$(A_3,\overline{\mathcal{I}})$
.4	$\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}$
.5	$\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$
.6	$\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
.7	$\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$
.8	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}$
.9	$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}$

Tabla 10.12: *Tabla de doble entrada que recoge la relación de co-ocurrencia entre la alternativa A_i y las alternativas ideal y anti-ideal, en el supuesto recogido en §10.1.7.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Ejemplo de aplicación de TOPSIS-0/1

	δ^{sm}			δ^{SS1}			δ^{J}		
	$\mathcal{I}$	$\overline{\mathcal{I}}$	S	$\mathcal{I}$	$\overline{\mathcal{I}}$	S	$\mathcal{I}$	$\overline{\mathcal{I}}$	S
A_1	.2222	2/9	1/2	2/15	2/15	1/2	1/4	1/2	2/3
A_2	.1667	5/18	5/8	1/10	1/6	5/8	7/36	5/9	20/27
A_3	.3889	1/18	1/8	4/15	1/30	1/9	5/9	1/12	3/23

	δ^{Cz}			δ^{SS3}		
	$\mathcal{I}$	$\overline{\mathcal{I}}$	S	$\mathcal{I}$	$\overline{\mathcal{I}}$	S
A_1	7/45	4/9	20/27	13/36	5/9	20/33
A_2	11/90	43/90	43/54	5/18	23/36	23/33
A_3	29/60	1/18	10/97	19/30	1/9	10/67

Tabla 10.13: *Resultados de TOPSIS-0/1 utilizando diferentes coeficientes de disimilaridad para el supuesto recogido en §10.1.7.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

dos α-cortes más similares? Es decir, ¿es C_1 una característica de similaridad para ellos? En principio, si la respuesta es sí, elegiríamos medir con alguna disimilaridad de $\mathbb{D}_d$ —cfr. Ec. 10.92—, mientras que si la respuesta es no, utilizaríamos alguna disimilaridad de $\mathbb{D}_{\neg d}$ —cfr. Ec. 10.93.

Observación 166 *Un índice genérico debido a* Gower *[1193], particularmente útil cuando se usan variables de diferentes tipos (binarias, ordinales y numéricas), es el siguiente:*

$$s_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{p} w_{ijk} s_{ijk}}{\sum_{k=1}^{p} w_{ijk}} \tag{10.119}$$

Los pesos w_{ijk} suelen ser 1 o 0, dependiendo de si se considera o no la comparación entre i y j en el atributo o variable k. Si la variable k se desconoce para uno o ambos individuos, $w_{ijk} = 0$. En el caso de variables categóricas, si valen lo mismo en ambos individuos, entonces $s_{ij} = 1$, y en caso contrario, $s_{ij} = 0$. Para variables numéricas:

$$s_{ijk} = 1 - \frac{|x_{ik} - x_{jk}|}{R_k} \tag{10.120}$$

En nuestro ejemplo, su estructura de preferencias no coincide con la hallada anteriormente. Observando la Tabla 10.15, vemos que la estructura de preferencias que se obtiene es:

$$A_3 > A_1 > A_2 \tag{10.121}$$

$180 \times D^{\mathrm{H}}_{\varphi,w}(A,B;\mathfrak{u},w,d^{\mathrm{H}}_{\alpha},\varphi)$					
	δ^{sm}	δ^{SS1}	δ^{J}	δ^{Cz}	δ^{SS3}
(A_1,A_2)	50	36	50	36	63
(A_1,A_3)	30	18	15	70	80
(A_2,A_3)	60	39	105	91	119

Tabla 10.14: *Cálculo de la disimilitud horizontal basada en α-cortes indicadores ponderados, utilizando diferentes coeficientes de disimilaridad, en el supuesto recogido en §10.1.7.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Razones de similaridad		
Candidatos	$\mathcal{I}$	$\overline{\mathcal{I}}$
A_1	.3333	.6666
A_2	.6666	.3333
A_3	.0833	.9166

Tabla 10.15: *Cálculo de la disimilitud horizontal basada en α-cortes indicadores ponderados, utilizando diferentes coeficientes de disimilaridad, en el supuesto recogido en §10.1.7.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Observación 167 *Algo sobre lo que reflexionar son los valores en sí mismos. Por ejemplo, todos los valores que proporciona δ^{sm} son menores que $1/2$, lo que podría interpretarse como que los miembros de cualquiera de las tres parejas de objetos están entre sí* ***«más cerca que lejos»****. Ocurre lo mismo con δ^{SS1}. Los coeficientes de disimilaridad de $\{\delta^{\mathrm{J}},\delta^{\mathrm{Cz}},\delta^{\mathrm{A1}}\}$ actúan similarmente entre ellas, con respecto a lo que estamos comentando, sin embargo su actuación es diferente a la de δ^{sm} y δ^{SS1}. En este caso: A_1 está «más cerca que lejos» de A_2, también A_1 está «más cerca que lejos» de A_3, pero A_2 y A_3 están entre sí* ***«más lejos que cerca»****. ¿Es esta interpretación válida?*

Observación 168 *Diremos que dos índices de similaridad son* ***conjuntamente monótonos****, precisamente si inducen la misma ordenación en el conjunto de parejas. Obviamente esto ocurre si están relacionados por una función monótona en $[0,1]$, por ejemplo, el coeficiente de similaridad de* Hamann *(s^{H}) —cfr. 10.57— está monótamente relacionado con el de* coincidencia simple *(s^{sm}) —cfr. «*Simple-Matching*», Ec. 10.27:*

$$s^{\mathrm{H}} = 2s^{\mathrm{sm}} - 1 \tag{10.122}$$

¿Es extensible lo comentado en la observación anterior a las clases $\mathbb{D}_d$ —cfr. Ec. 10.92— y $\mathbb{D}_{\neg d}$ —cfr. Ec. 10.93? Es decir, ¿son conjuntamente monótonas todas las disimilaridades pertenecientes a $\mathbb{D}_d$? ¿Y todas las de $\mathbb{D}_{\neg d}$?

De todas maneras, seguramente que en el conjunto de índices de disimilaridad que elijamos habrá de $\mathbb{D}_d$ y $\mathbb{D}_{\neg d}$. En general, no habrá monotonicidad sobre el espacio de trabajo. En 1982, Hubalek [1194] apuntaba la realización de un análisis de agrupamientos de los coeficientes, donde los coeficientes residentes en un mismo agrupamiento son conjuntamente monótonos. Más recientemente, se ha sugerido usar estos agrupamientos para elegir coeficientes y mejorar la inferencia aplicando técnicas de fusión sobre ellos —*cfr.* Holliday, Hu y Willett [1156]; Ginn, Willett y Bradshaw [1195].

10.10 Estudio ilustrativo: Elección por valoración de criterios desigualmente importantes

Para medir la disimilaridad entre los α-cortes, hemos utilizado un total de 17 coeficientes de disimilaridad distintos, a saber, todas las disimilitudes que figuran en el apéndice §10.2, en las familias $\mathbb{D}_d$ —*cfr.* (10.92)—, y $\mathbb{D}_{\neg d}$ —*cfr.* (10.93).

Tenemos pues 17 ordenaciones. Para cada alternativa, esto es, para cada candidato, consideramos la media aritmética de las posiciones en cada una de las posibles ordenaciones. De este modo, construimos una ordenación «consensuada», que comparamos con la ordenación «consensuada» a partir de 37 métodos multicriterio, para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8. De entre estas estrategias, las señaladas con «Ⓢ» intervendrán en una simulación posterior —*cfr.* §10.12.

Junto a **TOPSIS** («*Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*») —*cfr.* sección §10.1.6—, será un total de 26 los métodos que participarán en dicha simulación.

10.10.1 Suma ponderada (Laplace) Ⓢ

Llamado *weighted average* por Vincke [104] (pp. 107-108) —*cfr. v. gr.* Leal Millán, Sánchez-Apellániz, Roldán Salgueiro y Vázquez Sánchez [1196] (pp. 258-259); Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 92ss, de la edición española); White [79] (p. 45).

Es el método que habitualmente se emplea para evaluar estudiantes —acerca de esto puede leerse a Schärlig [1197] (cap. 6). Su definición es:

$$\widehat{A} = \arg\max_{A \in \mathcal{A}} \sum_{C \in \mathcal{C}} w(C)A(C) \tag{10.123}$$

En la literatura aparece frecuentemente denominado como *weighted sum model* (WSM) o *simple additive weighting* (SAW), Lo habitual es que la primera denominación se refiera a que se haya normalizado según NOR_3 y la segunda, a que se haya hecho según NOR_2.

Para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, la ordenación que se obtiene es:

$$\text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Hilario} \succ \text{Blanca} \succ \text{Alberto} \succ \text{Emilia} \tag{10.124}$$

10.10.2 Suma ponderada (con normalización por el máximo) Ⓢ

El software DECISION PAD usa suma ponderada pero con normalización por el máximo —*cfr.* Kepner y Tregoe [649]; Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 310-316, de la edición española).

Para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, la ordenación que se obtiene es:

$$\text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Blanca} \succ \text{Hilario} \succ \text{Emilia} \succ \text{Alberto} \tag{10.125}$$

10.10.3 Producto ponderado Ⓢ

El resultado de aplicar este método es algo menos dependiente de los procedimientos de normalización que el anterior, aunque siguen teniendo demasiada influencia los valores extremos —*cfr.* Leal Millán, Sánchez-Apellániz, Roldán Salgueiro y Vázquez Sánchez [1196] (pp. 260-262); Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 97ss, de la edición española):

$$\widehat{A} = \arg\max_{A \in \mathcal{A}} \prod_{C \in \mathcal{C}} w(C)A(C) \tag{10.126}$$

Para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, la ordenación que se obtiene es:

$$\text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Hilario} \succ \text{Alberto} \succ \text{Blanca} \succ \text{Emilia} \tag{10.127}$$

10.10.4 Agregación de Borda Ⓢ

Este método fue propuesto en 1770 por Jean-Charles de Borda —*cfr.* Borda [1198]; Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 124ss, de la edición española).

Se conoce también como «**diferencia de rangos**» —*cfr.* Vansnick [1199] (p. 289); Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 131-132, de la edición española)—, «**suma de rangos**» —*cfr.* Vincke [104] (p. 109)—, y por otros que veremos a continuación.

La estructura de preferencias se define:

$$A \succ A' \iff \sum_{C \in \mathcal{C}} r_C(A) > \sum_{C \in \mathcal{C}} r_C(A') \tag{10.128}$$

$$A \approx A' \iff \sum_{C \in \mathcal{C}} r_C(A) = \sum_{C \in \mathcal{C}} r_C(A') \tag{10.129}$$

para toda $A, A' \in \mathcal{A}$, siendo $r_C(X)$ la posición de la alternativa X según el criterio C.

La Tabla 10.16 muestra el cálculo de la estructura de preferencias, según el método de BORDA, para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, utilizando los *coeficientes canónicos de Borda* $6 > 5 > 4 > 3 > 2 > 1$ para seis alternativas. La última columna muestra el cálculo de la estructura de preferencias, si introducimos directamente ponderaciones en el método de BORDA, para el mismo supuesto —la idea es la misma que nos permitió definir el indicador ponderado equivalente (*cfr.* §10.7).

Alternativas	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	$\sum r_j$	$\preccurlyeq$	$\sum(100 \times w_j)r_j$	$\preccurlyeq$
Alberto	1, 2, 3	4	4	5	6	20, 21, 22	6	385, 410, 435	6
Blanca	6	5	1	1	1, 2	14, 15	2	325, 345	2
Daniel	4, 5	2	6	2	5	19, 20	5	350, 375	3
Emilia	1, 2, 3	6	3	4	4	18, 19, 20	4	365, 390, 415	5
Germán	1, 2, 3	1	5	3	1, 2	11, 12, 13, 14	1	180, ..., 250	1
Hilario	4, 5	3	2	6	3	18, 19	3	375, 400	4
Pesos:	0.25	0.25	0.10	0.20	0.20				

Tabla 10.16: *Estructura de preferencias, según el método de agregación de Borda, correspondiente al supuesto propuesto en la sección §10.1.8*
— *Fuente:* Elaboración propia.

BARBA-ROMERO y POMEROL [1081, 1082] (pp. 129-131, de la edición española), proponen interpretar la agregación de Borda, según lo que ellos denominan «**votación a lo Borda**»: ordenar las alternativas según el número de votos favorables (v_f) —*cfr.* Tabla 10.17 (columna $\preccurlyeq_f$), siendo el número de votos a favor el que no aparece entre paréntesis, utilizando, en caso de igualdad de rangos, la media aritmética de los rangos, como propuso KENDALL.

Como comentan BARBA-ROMERO y POMEROL [1081, 1082] (pp. 132-133, de la edición española), el «**método de los votos a favor menos los votos en contra**» de LUCE y RAÏFFA [538] —también llamado «**método ajustado de Borda**» por BLACK [122]—, también produce la misma estructura de preferencias —*cfr.* Tabla 10.17 (columna $\preccurlyeq_{fc}$); en este caso, en los empates no se suma.

	Alberto	*Blanca*	*Daniel*	*Emilia*	*Germán*	*Hilario*	A favor (v_f)	$\preccurlyeq_f$	$v_f - v_c$	$\preccurlyeq_{fc}$
Alberto	0	2	2	1, 5(1)	1	2	8, 5(8)	6	−8	6
Blanca	3	0	3	4	2, 5(2)	3	15, 5(15)	2	6	2
Daniel	3	2	0	2	1	2, 5(2)	10, 5(10)	5	−4	5
Emilia	3.5(3)	1	3	0	1, 5(1)	2	11(10)	4	−3	4
Germán	4	2, 5(2)	4	3, 5(3)	0	4	18(17)	1	11	1
Hilario	3	2	2, 5(2)	3	1	0	11, 5(11)	3	−2	3
v_c	16, 5(16)	9, 5(9)	14, 5(14)	13, 5(13)	7(6)	13, 5(13)				

Tabla 10.17: *Estructuras de preferencias, según el método ajustado de* BORDA *, bajo las interpretaciones* votación a lo BORDA *y* votos a favor menos votos en contra, *correspondiente al supuesto propuesto en la sección §10.1.8. Igual que v_f representa los votos a favor, v_c representa los votos en contra.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Resumiendo, para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, las ordenaciones que se obtienen son:

$$\text{Borda} \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Blanca} \succ \text{Hilario} \succ \text{Emilia} \succ \text{Daniel} \succ \text{Alberto} \quad (10.130)$$

$$\text{Borda ponderado} \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Blanca} \succ \text{Daniel} \succ \text{Hilario} \succ \text{Emilia} \succ \text{Alberto} \quad (10.131)$$

10.10.5 Votación por mayoría simple o agregación de Condorcet

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat CONDORCET propone que $A \succ A'$ precisamente cuando el número de criterios (votantes) para los que A es mejor que A', sea mayor que el número de criterios para los que A' sea mejor que A —*cfr.* CONDORCET [1200]; VINCKE [104] (p. 110).

La propuesta de CONDORCET es votar sobre todas las parejas posibles de alternativas. La Tabla 10.19 muestra la estructura de preferencias, según el método de CONDORCET, para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8. En ella figuran los votos. Por ejemplo, en la votación de Alberto contra Blanca, Alberto

obtiene 2 votos, mientras que Blanca obtiene 3, por lo que gana Blanca. De este modo, observamos (figura destacada) la la relación de indiferencia entre Germán y Blanca. Además, Germán gana a cualquier alternativa (salvo a Blanca) y Blanca gana a cualquier alternativa (salvo a Germán). Por tanto, a ellos se les asignan los dos primeros puestos en el orden. Observamos también la relación de indiferencia entre Daniel e Hilario. Pero aquí se genera un ciclo de preferencias (una intransitividad), puesto que, Daniel pierde contra Emilia, pero Emilia pierde contra Hilario (que empata cuando se enfrenta con Daniel). Por ello, se les asignan, indiferentemente, los puestos tercero, cuarto y quinto. Finalmente, Alberto pierde contra todos. En resumen, la ordenación que se obtiene es:

$$\text{Blanca} \approx \text{Germán} \succ \text{Daniel} \approx \text{Emilia} \approx \text{Hilario} \succ \text{Alberto} \tag{10.132}$$

	Alberto	*Blanca*	*Daniel*	*Emilia*	*Germán*	*Hilario*	$\preccurlyeq$
Alberto	0	2	2	1,5(1)	1	2	6
Blanca	3	0	3	4	**2,5(2)**	3	1,2
Daniel	3	2	0	**2**	1	**2,5(2)**	3,4,5
Emilia	3.5(3)	1	3	0	1,5(1)	**2**	3,4,5
Germán	4	**2,5(2)**	4	3,5(3)	0	4	1,2
Hilario	3	2	**2,5(2)**	3	1	0	3,4,5

Tabla 10.18: *Estructuras de preferencias, según el método de* CONDORCET *, correspondiente al supuesto propuesto en la sección §10.1.8*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Esta aparición de intransitividades ya la señaló CONDORCET hace más de doscientos años. Actualmente este hecho se conoce como «**paradoja del voto**» o «efecto Condorcet». A medida que se incrementa el número de alternativas, aumenta la probabilidad de aparecer intransitividades —*cfr.* GEHRLEIN [1201]; BARBA-ROMERO y POMEROL [1081, 1082] (p. 144, de la edición española).

10.10.6 Método de Copeland Ⓢ

El método de COPELAND[20] —*cfr.* BARBA-ROMERO y POMEROL [1081, 1082] (pp. 141ss, de la edición española)—, de agregación de preferencias o de «victorias menos derrotas», pues consiste en ordenar las alternativas, de acuerdo al cálculo de la suma de las victorias menos las derrotas, para cada una de ellas, en una votación por mayoría simple. Si el método de CONDORCET genera un preorden total, entonces el de COPELAND genera el mismo preorden, y bastaría contar el número de victorias. Por tanto, es este último el método que simulamos.

Por cierto, que, Peter C. FISHBURN [1203] muestra mediante simulación, que los métodos de BORDA y COPELAND están de acuerdo en más del 80 por ciento de los 1.000 casos que él genera.

La Tabla **??** muestra el cálculo de la estructura de preferencias, según el método de COPELAND, para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8. La ordenación que se obtiene es:

$$\text{Blanca} \approx \text{Germán} \succ \text{Hilario} \succ \text{Emilia} \succ \text{Daniel} \succ \text{Alberto} \tag{10.133}$$

	Alberto	*Blanca*	*Daniel*	*Emilia*	*Germán*	*Hilario*	$V - D$	$\preccurlyeq$
Alberto	0	−1	−1	−1	−1	−1	−5	6
Blanca	1	0	1	1	0	1	4	1,2
Daniel	1	−1	0	−1	−1	0	−2	5
Emilia	1	−1	1	0	−1	−1	−1	4
Germán	1	0	1	1	0	1	4	1,2
Hilario	1	−1	0	1	−1	0	0	3

Tabla 10.19: *Estructuras de preferencias, según el método de* COPELAND *, correspondiente al supuesto propuesto en la sección §10.1.8*
— *Fuente:* Elaboración propia.

[20] R. Duncan LUCE y Howard RAÏFFA [538] afirman —*cfr.* BARBA-ROMERO y POMEROL [1081, 1082] (p. 141, de la edición española)— que este método fue propuesto por COPELAND en un seminario en la Universidad de Michigan —*cfr.* COPELAND [1202].

10.10.7 Método de Arrow y Raynaud Ⓢ

Es un método que se basa en cinco axiomas. El tercero, denominado de respuesta positiva, afirma que la intensidad de la preferencia entre dos alternativas cualesquiera, es una función estrictamente creciente del número de criterios que clasifican una de las dos antes que la otra. De este modo, a partir de la matriz de decisión, se construye una «**matriz de clasificación**» (a_{ij}), en la que cada «coeficiente de clasificación» a_{ij}, representa el número de criterios para los que la alternativa A_i domina a A_j. Es claro que $a_{ji} = |\mathcal{C}| - a_{ij}$. Puede consultarse su descripción, por ejemplo, en: ARROW-RAYNAUD [1204] (pp. 97ss de la edición española); LEAL MILLÁN, SÁNCHEZ-APELLÁNIZ, ROLDÁN SALGUEIRO y VÁZQUEZ SÁNCHEZ [1196] (pp. 282ss); ROMERO [1205] (pp. 147-149).

Su operativa, a modo, de paso, de ejemplo de implementación, es la siguiente:

para i, **desde** $i = 1$ **hasta** $i = |\mathcal{A}|$ **hacer**
  para j, **desde** $j = i + 1$ **hasta** $j = |\mathcal{A}| - 1$ **hacer**
    para k, **desde** $k = 1$ **hasta** $k = |\mathcal{C}|$ **hacer**
      si $A_i(C_k) > A_j(C_k)$ **entonces** $a_{ij} \leftarrow a_{ij} + 1$;
      si $A_j(C_k) > A_j(C_k)$ **entonces** $a_{ij} \leftarrow a_{ij} + 1$;
      si $A_j(C_k) = A_j(C_k)$ **entonces** $a_{ij} \leftarrow a_{ij} + 1/2$;
    fpara;
  fpara;
fpara;
para i, **desde** $i = 1$ **hasta** $i = |\mathcal{A}|$ **hacer**
  para j, **desde** $j = i + 1$ **hasta** $j = |\mathcal{A}| - 1$ **hacer**
    $a_{ji} = |\mathcal{C}| - a_{ij}$;
  fpara;
fpara;
$k \leftarrow 1$;
repetir hasta que $(a_{ij}) = \varnothing$
  $k \leftarrow k + 1$;
  clasificar la alternativa $A_{\widehat{i}} = \arg\min_i \max_j a_{ij}$ en la posición $|\mathcal{A}| - k + 1$;
  {redefinir (a_{ij}), eliminando la fila $\widehat{i}$ y la columna $\widehat{i}$}
  si $k < |\mathcal{A}|$ **entonces**
    para i, **desde** $i = \widehat{i}$ **hasta** $i = |\mathcal{A}| - 1$ **hacer**
      $a_{ij} \leftarrow a_{(i+1)j} + 1$;
    para j, **desde** $j = \widehat{i}$ **hasta** $j = |\mathcal{A}| - 1$ **hacer**
      $a_{ij} \leftarrow a_{i(j+1)} + 1$;
  fsi;
frepetir;

Para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, la ordenación que se obtiene es:

$$\text{Blanca} \approx \text{Germán} \succ \text{Hilario} \succ \text{Emilia} \succ \text{Daniel} \succ \text{Alberto} \tag{10.134}$$

10.10.8 Multicriterio lexicográfico Ⓢ

Las conductas de elección de algunas empresas son lexicográficas, en un sentido eliminatorio. Esto es, una vez ponderados los criterios según su relevancia, se procede a una aplicación secuencial y eliminatoria de los mismos. WHITE [79] (p. 37) cita el caso real de una empresa que ante un puesto vacante, donde primero busca candidatos es entre sus empleados. Si hubiese más de un candidato de promoción interna, utiliza como segundo elemento de decisión las cualificaciones formales de los mismos. Si persiste el empate, considera el candidato que aprecia como mejor para el puesto vacante. De no haber elegido uno aún, considera la repercusión en la organización de las vacantes que dejarían los candidatos, eligiendo aquel cuya vacante ocasione menos trastorno.

El método lexicográfico —*cfr.* FISHBURN [1206]; CHANKONG y HAIMES [1207]; BARBA-ROMERO y POMEROL

[1081, 1082] (pp. 160-163, de la edición española); VINCKE [104] (pp. 108-109)— consiste en construir la estructura de preferencias:

$$A \approx A' \Leftrightarrow (\forall C \in \mathcal{C})(A(C) = A'(C)) \tag{10.135}$$

$$A \succ A' \Leftrightarrow (\exists C \in \mathcal{C})(A(C) > A'(C) \wedge (\forall C' \in \mathcal{C})(w(C) < w(C') \Rightarrow A(C') = A'(C')) \tag{10.136}$$

Es decir, se ordenan los criterios de mayor a menor relevancia. Se ordenan las alternativas con respecto al primer criterio. Se resuelven los empates entre alternativas acudiendo al siguiente criterio en importancia. La Tabla 10.20 muestra el cálculo de la estructura de preferencias, según el método multicriterio lexicográfico, para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8.

Alternativas	C_1	$\preccurlyeq$	C_2	$\preccurlyeq$	C_4	$\preccurlyeq$	C_5	$\preccurlyeq$	C_3	$\preccurlyeq$
Alberto	**6**	1,2,3	**5**	**2**	5		5		28	
Blanca	4	6	2	6	10		9		25	
Daniel	5	4,5	7	4	9		6		35	
Emilia	**6**	1,2,3	**1**	**3**	6		7		27	
Germán	**6**	1,2,3	**8**	**1**	7		9		30	
Hilario	5	4,5	6	5	4		8		26	
Pesos:	5		5		4		4		2	

Tabla 10.20: *Método multicriterio lexicográfico: la ordenación* $8 > 5 > 1$ *en* C_2*, permite resolver el empate producido con respecto a* C_1*.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Como $w(C_1) = w(C_2)$, podemos comenzar, alternativamente, por C_2. En este caso no se producen empates, pero el orden de preferencia es el de C_2:

Alberto	*Blanca*	*Daniel*	*Emilia*	*Germán*	*Hilario*
4	5	2	6	1	3

O sea:

$$\text{Comenzando por } C_1 \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Alberto} \succ \text{Emilia} \succ \text{Daniel} \succ \text{Hilario} \succ \text{Blanca} \tag{10.137}$$

$$\text{Comenzando por } C_2 \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Hilario} \succ \text{Alberto} \succ \text{Blanca} \succ \text{Emilia} \tag{10.138}$$

10.10.9 Estrategia más cercana a la perfección Ⓢ

LEAL MILLÁN, SÁNCHEZ-APELLÁNIZ, ROLDÁN SALGUEIRO y VÁZQUEZ SÁNCHEZ [1196] (pp. 264-266) denominan «**alternativa perfección**», a la que nosotros podríamos denominar «ideal absoluto». Su definición dependerá del espacio de valores. Si, por ejemplo, éste es $[0, 1]$, la alternativa perfección es $(1, \ldots, 1)$. La estrategia es de mínima disimilitud: elegida una función de disimilitud, el orden descendente de preferencia será de menor a mayor disimilitud a la perfección.

Para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, se obtiene:

$$\text{Utilizando } d_1 \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Blanca} \succ \text{Hilario} \succ \text{Alberto} \succ \text{Emilia} \tag{10.139}$$

$$\text{Utilizando } d_2 \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Blanca} \succ \text{Hilario} \succ \text{Alberto} \succ \text{Emilia} \tag{10.140}$$

$$\text{Utilizando } d_{30} \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Alberto} \succ \text{Hilario} \succ \text{Blanca} \succ \text{Emilia} \tag{10.141}$$

10.10.10 Estrategia más lejana a la imperfección Ⓢ

LEAL MILLÁN, SÁNCHEZ-APELLÁNIZ, ROLDÁN SALGUEIRO y VÁZQUEZ SÁNCHEZ [1196] (pp. 262-264) denominan «**alternativa imperfección**», a la que nosotros podríamos denominar «anti-ideal absoluto». Su definición dependerá del espacio de valores. Si, por ejemplo, éste es $[0, 1]$, la alternativa imperfección es $(0, \ldots, 0)$. La estrategia es de máxima disimilitud: elegida una función de disimilitud, el orden descendente de preferencia será de mayor a menor disimilitud a la imperfección.

Para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, se obtiene:

$$\text{Utilizando } d_1 \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Blanca} \succ \text{Hilario} \succ \text{Alberto} \succ \text{Emilia} \quad (10.142)$$

$$\text{Utilizando } d_2 \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Blanca} \succ \text{Hilario} \succ \text{Alberto} \succ \text{Emilia} \quad (10.143)$$

$$\text{Utilizando } d_{30} \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Blanca} \succ \text{Daniel} \succ \text{Hilario} \succ \text{Emilia} \succ \text{Alberto} \quad (10.144)$$

10.10.11 Estrategias maximin y maximin ponderado Ⓢ

WALD (1950) definió el **grado de seguridad** correspondiente a una alternativa A, como el menor valor, tras la elección de la alternativa A, entre los que proporcionan todos los criterios, o sea:

$$s_A = \min_{C \in \mathcal{C}} v_{AC} \quad (10.145)$$

WALD (1950) sugirió elegir la alternativa con un mayor grado de seguridad asociado —*cfr. v. gr.* HWANG y YOON [991]; BARBA-ROMERO y POMEROL [1081, 1082] (p. 259, de la edición española):

$$\widehat{A} = \arg \max_{A \in \mathcal{A}} \min_{C \in \mathcal{C}} v_{AC} \quad (10.146)$$

Si $v_{AC} = w(C)A(C)$, se conoce como estrategia **maximin ponderado** —*cfr. v. gr.* LAMATA [1208] (p. 111); WHITE [79] (p. 45).

Para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, se obtiene:

$$\text{Maximin} \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Alberto} \succ \text{Hilario} \succ \text{Blanca} \succ \text{Emilia} \quad (10.147)$$

$$\text{Maximin ponderado} \longmapsto \text{Hilario} \succ \text{Blanca} \succ \text{Alberto} \succ \text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Emilia} \quad (10.148)$$

10.10.12 Estrategias maximax y maximax ponderado Ⓢ

Se define el **grado de optimismo** correspondiente a una alternativa A, como el mayor valor, tras la elección de la alternativa A, entre los que proporcionan todos los criterios, o sea:

$$o_A = \max_{C \in \mathcal{C}} v_{AC} \quad (10.149)$$

Si se elige la alternativa con un mayor grado de optimismo asociado, estamos ante la que se conoce como **estrategia maximax** —*cfr.* HWANG y YOON [991]; BARBA-ROMERO y POMEROL [1081, 1082] (p. 260, de la edición española):

$$\widehat{A} = \arg \max_{A \in \mathcal{A}} \max_{C \in \mathcal{C}} v_{AC} \quad (10.150)$$

Si $v_{AC} = w(C)A(C)$, se conoce como estrategia **maximax ponderado** —*cfr. v. gr.* LAMATA [1208] (p. 111).

Para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, se obtiene:

$$\text{Maximax} \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Blanca} \succ \text{Daniel} \succ \text{Hilario} \succ \text{Alberto} \approx \text{Emilia} \quad (10.151)$$

$$\text{Maximax ponderado} \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Hilario} \succ \text{Blanca} \succ \text{Alberto} \approx \text{Emilia} \quad (10.152)$$

10.10.13 Estrategia optimista-pesimista de Hurwicz Ⓢ

Hurwicz (1951) sugirió que un decisor frecuentemente intentaría compensar los grados de seguridad y de optimismo. Su recomendación fue elegir —*cfr. v. gr.* LAMATA [1208] (p. 111); WHITE [79] (p. 45):

$$\widehat{A} = \arg \max_{A \in \mathcal{A}} (\alpha o_A + (1 - \alpha) s_A) \quad (10.153)$$

con $\alpha \in [0, 1]$.

Las estructuras de preferencia que se obtienen, para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, para varios valores del parámetro α, son:

$$\alpha = .050 \longmapsto \text{Hilario} \succ \text{Blanca} \succ \text{Alberto} \succ \text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Emilia} \quad (10.154)$$
$$\alpha = .075 \longmapsto \text{Hilario} \succ \text{Blanca} \succ \text{Germán} \succ \text{Alberto} \succ \text{Daniel} \succ \text{Emilia} \quad (10.155)$$
$$\alpha = .100 \longmapsto \text{Hilario} \succ \text{Germán} \succ \text{Blanca} \succ \text{Alberto} \succ \text{Daniel} \succ \text{Emilia} \quad (10.156)$$
$$\alpha = .200 \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Hilario} \succ \text{Blanca} \succ \text{Alberto} \succ \text{Daniel} \succ \text{Emilia} \quad (10.157)$$
$$\alpha = .300 \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Hilario} \succ \text{Daniel} \succ \text{Blanca} \succ \text{Alberto} \succ \text{Emilia} \quad (10.158)$$
$$\alpha = .400 \longmapsto \text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Hilario} \succ \text{Blanca} \succ \text{Alberto} \succ \text{Emilia} \quad (10.159)$$

10.10.14 Minimización del máximo arrepentimiento (*regret*) Ⓢ

Savage definió el valor del **arrepentimiento** (*regret*) r_{AC} asociado al criterio C, tras la elección de la alternativa A, como la diferencia entre el mayor valor posible del criterio C, entre los que proporcionan todas las alternativas, y el valor v_{AC} del criterio C al haber elegido la alternativa A, es decir:

$$r_{AC} = \max_{A' \in \mathcal{A}} v_{A'C} - v_{AC} \quad (10.160)$$

Propuso sustituir la matriz de decisión (v_{AC}) por la **matriz de arrepentimiento** (r_{AC}), y elegir en ella según el criterio pesimista de Wald. Como los arrepentimientos son pérdidas, se le asocia, a cada alternativa, el índice de **máximo arrepentimiento**:

$$\rho_A = \max_{C \in \mathcal{C}} r_{AC} \quad (10.161)$$

que podemos interpretar como un valor indicativo de lo más que nos arrepentiremos por haber elegido la alternativa A. De aquí que, deberemos elegir la alternativa que haga mínimo ρ_A. Así, el **criterio de minimización del máximo arrepentimiento** sugiere elegir:

$$\widehat{A} = \arg \min_{A \in \mathcal{A}} \max_{C \in \mathcal{C}} \left(\max_{A' \in \mathcal{A}} v_{A'C} - v_{AC} \right) \quad (10.162)$$

La Tabla 10.21 muestra el cálculo de la estructura de preferencias, según el criterio de Savage de minimización del máximo arrepentimiento, para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8. La ordenación que se obtiene es:

$$\text{Daniel} \succ \text{Germán} \succ \text{Emilia} \succ \text{Alberto} \succ \text{Hilario} \succ \text{Blanca} \quad (10.163)$$

	$(v_{AC}) = (wA)$					(r_{AC})						
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	ρ_A	$\preccurlyeq$
Alberto (A)	.047	.043	.017	.024	.023	0	.026	.002	.025	.018	.026	4
Blanca (B)	.031	.017	.019	.049	.041	.016	.052	0	0	0	.052	6
Daniel (D)	.039	.060	.013	.044	.027	.008	.009	.006	.005	.014	.014	1
Emilia (E)	.047	.009	.017	.029	.032	0	.060	.002	.020	.009	.020	3
Germán (G)	.047	.069	.016	.034	.041	0	0	.003	.015	0	.015	2
Hilario (H)	.039	.052	.018	.020	.036	.008	.017	.001	.029	.005	.029	5
$\max_{A \in \mathcal{A}} w(C)A(C)$	.047	.069	.019	.049	.041							

Tabla 10.21: *Criterio de Savage de minimización del máximo arrepentimiento. La tabla muestra la matriz de decisión (v_{AC}), la matriz de arrepentimiento (r_{AC}), el índice de arrepentimiento máximo ρ_A, y la estructura de preferencia $\preccurlyeq$ que se deduce de su aplicación al supuesto propuesto en la sección §10.1.8.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

10.10.15 Otras dos estrategias: Semiorden lexicográfico y permutaciones lexicográficas

Aunque describimos estos métodos, no los hemos implementado. Los resultados para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, los recogemos de Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082].

- **Semiorden lexicográfico** —*cfr.* Tversky [1209]; Pirlot y Vincke [1210]—. Todo consiste en aplicar la estrategia multicriterio lexicográfica pero con una condición previa. Se trata de elegir un umbral de indiferencia S_C para cada criterio, de manera que consideremos indiferentes, respecto a un criterio, aquellas alternativas cuya diferencia entre sus valores correspondientes a dicho criterio, sea menor o igual que el umbral. De este modo, la estructura de preferencia está definida por:

$$\begin{array}{lcl} A \approx A' & \Leftrightarrow & (\forall C \in \mathcal{C})\,(|A(C) - A'(C)| \leq S_C) \\ A \succ A' & \Leftrightarrow & (\exists C \in \mathcal{C})(|A(C) - A'(C)| > S_C \\ & & \wedge(\forall C' \in \mathcal{C})(w(C) < w(C') \Rightarrow |A(C) - A'(C)| \leq S_C) \end{array} \quad (10.164)$$

Para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, considerando los umbrales de indiferencia: $s_1 = 1$ (año), $s_2 = 2$ (años), $s_3 = 3$ (años), $s_4 = 3$ (puntos) y $s_5 = 3$ (puntos), la ordenación que se obtiene es —*cfr.* Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (p. 163-165, de la edición española):

$$\text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Alberto} \approx \text{Hilario} \succ \text{Emilia} \succ \text{Blanca} \quad (10.165)$$

Puede generar intransitividades; en concreto, en este supuesto: Germán $\succ$ Daniel $\succ$ Alberto $\approx$ Hilario $\succ$ Germán.

- **Permutaciones lexicográficas** —*cfr.* Massam y Askew [1211]—. Se aplica el método lexicográfico básico a cada una de las $|\mathcal{C}|!$ permutaciones de los índices ponderales. Para cada alternativa, se cuenta el número de veces en que aparece en primer lugar. La estructura de preferencia queda determinada, en orden descendente, de mayor a menor recuento de apariciones. Para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, la ordenación que se obtiene es —*cfr.* Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (p. 166, de la edición española):

$$\text{Blanca (60)} \succ \text{Germán (36)} \succ \text{Emilia (18)} \succ \text{Alberto (6)} \succ \text{Daniel (0)} \approx \text{Hilario (0)} \quad (10.166)$$

10.10.16 Cita de otros métodos: UTA, ELECTREs, PROMETHEEs, AHP, QUALIFLEX

Como bien dice el título, nos limitamos a citar otras estrategias, cuya descripción puede encontrarse en las referencias que hacemos. Los resultados para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, los recogemos de Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082].

- **UTA («UTilité Additive»)** —*cfr.* Jacquet-Lagrèze y Siskos [1212]; Jacquet-Lagrèze [1213]; Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 196-203, de la edición española); Vincke [104] (pp. 48-50)—. Existe el software PREFCALC —*cfr.* Vincke [104] (pp. 50-54)—. Para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, la ordenación que se obtiene es —*cfr.* Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (p. 202, de la edición española):

$$\text{Germán} \succ \text{Hilario} \succ \text{Daniel} \succ \text{Alberto} \succ \text{Blanca} \succ \text{Emilia} \quad (10.167)$$

- **ELECTRE I** («*ELimination Et Choix Traduisant la REalité*») —*cfr.* Roy [1214, 1215]; Romero [1205] (pp. 133-142); Vincke [104] (pp. 58-62); —*cfr.* Leal Millán, Sánchez-Apellániz, Roldán Salgueiro y Vázquez Sánchez [1196] (cap. 3)—. Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 211-223, de la edición española) citan cinco versiones diferentes. En Vincke [104] (pp. 63-69), encontramos descritos también **ELECTRE II** (pp. 63-64) —también en Leal Millán, Sánchez-Apellániz, Roldán Salgueiro y Vázquez Sánchez [1196] (cap. 3)—, cuyo origen son los trabajos de Roy y Bertier [1216, 1217], **ELECTRE III** (pp. 64-67) —*cfr.* Roy [1218]—, y **ELECTRE IV** (pp. 68-69) —*cfr.* Hugonnard y Roy [1219]—. El método que aquí citamos, ELECTRE I, no genera un preorden total. La relación de preferencia final suele expresarse por un grafo de superación. Para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, la ordenación que se obtiene es —*cfr.* Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (p. 202, de la edición española):

Alberto	*Blanca*	*Daniel*	*Emilia*	*Germán*	*Hilario*
3(b)	2(a)	2(b,c)	3(a)	1	3(c)

Las letras entre paréntesis indican los cliques (subgrafos totales) del grafo de superación (mostrado en la Fig. 10.2).

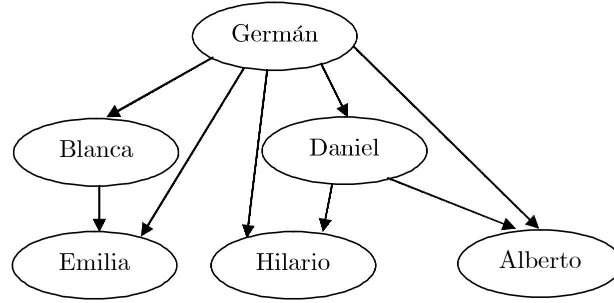


Figura 10.2: *Método UTA. Grafo de superación correspondiente a su aplicación al supuesto propuesto en la sección §10.1.8.*
— *Fuente:* Adaptado de Barba-Romero y Pomerol [1081] (p. 217 de la edición española).

- **PROMETHEE** («*Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations*») —*cfr.* Brans, Mareschal y Vincke [1220]; Brans y Vincke [1221]; Brans, Vincke y Mareschal [1222]; Briggs, Kunsch y Mareschal [1223]; Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 223-229, de la edición española); Vincke [104] (pp. 73-76)—. Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (p. 229, de la edición española) citan cinco versiones diferentes de PROMETHEE. Existe el software PROMCALC (PROMethee CALCulations) —*cfr.* Mareschal [1224]— y GAIA —*cfr.* Mareschal y Brans [1225]—, que permite una representación geométrica del resultado proporcionado por PROMCALC. En nuestro supuesto, los métodos **PROMETHEE I** y **PROMETHEE II (1)** consideran la edad como un pseudo-criterio lineal[21] con umbral de preferencia $p = 5$ y umbral de indiferencia $q = 0$ (un pseudo-criterio de tipo 3, según la terminología del método PROMETHEE. En **PROMETHEE II (2)** se considera la edad como un criterio «normal», en vez de como un pseudo-criterio lineal. El método PROMETHEE I genera un preorden parcial, mientras que mediante PROMETHEE II se obtiene uno total.

  Para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, aplicando los métodos PROMETHEE se obtienen las ordenaciones —*cfr.* Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 227-228, de la edición española):

$$\begin{aligned} \text{I} &\longmapsto \text{Germán} \succ \text{Blanca} \succ \text{Daniel} \succ \text{Emilia} \approx \text{Hilario} \succ \text{Alberto} && (10.169)\\ \text{II(1)} &\longmapsto \text{Germán} \succ \text{Blanca} \succ \text{Daniel} \succ \text{Emilia} \succ \text{Hilario} \succ \text{Alberto} && (10.170)\\ \text{II(2)} &\longmapsto \text{Germán} \succ \text{Blanca} \succ \text{Daniel} \succ \text{Hilario} \succ \text{Emilia} \succ \text{Alberto} && (10.171) \end{aligned}$$

- **AHP («Analytic Hierarchy Process»)** —*cfr.* Saaty [988, 1226]; Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 112-118, de la edición española); Romero [1205] (pp. 143-147)—. Existe el software EXPERT CHOICE —*cfr.* Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 322-328, de la edición española)—. Para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, con respecto a la jerarquía:

$$C_{12345}[1] \mapsto (C_{123}[0.6] \mapsto (C_1[0.25], C_2[0.25], C_3[0.10]), C45[0.4] \mapsto (C_4[0.20], C_5[0.20]))$$

  la ordenación que se obtiene es —*cfr.* Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (p. 326, de la edición española):

$$\text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Hilario} \succ \text{Blanca} \succ \text{Alberto} \succ \text{Emilia} \qquad (10.172)$$

- **QUALIFLEX** —*cfr.* Paenlick [1227]; Janssen, Nijkamp y Rietvelt [1228]; Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 252-258, de la edición española)—. Existe el software MICROQUALIFLEX, que recoge tres variantes del método —*cfr.* Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (pp. 328-331, de la edición española).

[21] Para cada par de alternativas A_i y A_j, para cada criterio C, y para cada par de umbrales p y q, de *preferencia estricta* y de *indiferencia*, respectivamente, se define el **pseudo-criterio con función de preferencia lineal relativa** a C, —*cfr.* Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (p. 224, de la edición española):

$$\begin{aligned} S_C : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow [0,1] \\ (A_i, A_j) &\longmapsto S_C(A_i, A_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } D_{ij}(C) \leq q \\ (D_{ij}(C) - q)/(p - q) & \text{si } q < D_{ij}(C) \leq p \\ 1 & \text{si } p < D_{ij}(C) \end{cases} \end{aligned} \qquad (10.168)$$

donde $D_{ij}(C) = A_i(C) - A_j(C)$.

Para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8, la ordenación que se obtiene es —*cfr.* Barba-Romero y Pomerol [1081, 1082] (p. 331, de la edición española):

$$\text{Germán} \succ \text{Blanca} \succ \text{Daniel} \succ \text{Hilario} \succ \text{Emilia} \succ \text{Alberto} \qquad (10.173)$$

10.10.17 Dodo dice: ¡A correr!

La Tabla 10.22 recoge las ordenaciones de los candidatos según los análisis realizados por cada uno de los métodos anteriores. Aunque en algunas celdas de la tabla aparecen rangos múltiples, en realidad trabajaremos con rangos promedio.

Métodos	Alberto	Blanca	Daniel	Emilia	Germán	Hilario
TOPSIS	5	4	2	6	1	3
Suma ponderada	5	4	2	6	1	3
Suma ponderada (máx)	6	3	2	5	1	4
Producto ponderado	4	5	2	6	1	3
Borda	6	2	5	4	1	3
Borda ponderado	6	2	3	5	1	4
Condorcet	6	1,2	3,4,5	3,4,5	1,2	3,4,5
Copeland	6	1,2	5	4	1,2	3
Arrow y Raynaud	6	1,2	5	4	1,2	3
Multicriterio lexicográfico (1)	2	6	4	3	1	5
Multicriterio lexicográfico (2)	4	5	2	6	1	3
MCP (L_1)	5	3	2	6	1	4
MCP (L_2)	5	3	2	6	1	4
MCP (L_{30})	3	5	2	6	1	4
MLI (L_1)	5	3	2	6	1	4
MLI (L_2)	5	3	2	6	1	4
MLI (L_{30})	6	2	3	5	1	4
Maximin	3	5	2	6	1	4
Maximin ponderado	3	2	5	6	4	1
Maximax	5,6	2	3	5,6	1	4
Maximax ponderado	5,6	4	2	5,6	1	3
Hurwicz (.05)	3	2	5	6	4	1
Hurwicz (.075)	4	2	5	6	3	1
Hurwicz (.1)	4	3	5	6	2	1
Hurwicz (.2)	4	3	5	6	1	2
Hurwicz (.3)	5	4	3	6	1	2
Hurwicz (.4)	5	4	2	6	1	3
Savage	4	6	1	3	2	5
Semiorden lexicográfico	3,4	6	2	5	1	3,4
Permutaciones lexicográficas	4	1	5,6	3	2	5,6
UTA	4	5	3	6	1	2
ELECTRE I	3(b)	2(a)	2(b,c)	3(a)	1	3(c)
PROMETHEE I	6	2	3	4,5	1	4,5
PROMETHEE II (1)	6	2	3	4	1	5
PROMETHEE II (2)	6	2	3	5	1	4
AHP	5	4	2	6	1	3
Qualiflex	6	2	3	5	1	4

Tabla 10.22: *Cuadro que resume los resultados de la aplicación de 37 métodos multicriterios al supuesto propuesto en la sección §10.1.8.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Como muestra la Tabla 10.22, ocurre que no todos los métodos determinan una ordenación estricta de las alternativas. Es por ello que, para cada alternativa A y para cada método de similaridad s, consideramos un conjunto de posiciones $K_s(A)$ en vez de una sóla. Sea S el número de métodos de similaridad bajo estudio. A cada alternativa A le asociamos la colección de conjuntos de rangos $\{K_1(A), \ldots, K_S(A)\}$. Proponemos

«fundir» los rangos para cada alternativa A mediante:

$$\mathrm{SUM_{OR}}(A) = \frac{\sum_{s=1}^{S} \sum_{k \in K_s(A)} k}{\sum_{s=1}^{S} |K_s(A)|} \tag{10.174}$$

Estas nuevas puntuaciones de similaridad para las alternativas definen la estructura de preferencia «consensuada». En la literatura aparecen relatadas ciertas experiencias llevadas a cabo por varios autores en relación a «consensuar métodos de puntuación» (*similarity method fusion*, *consensus scoring methods*), sobre todo en el campo de la Química Informática —*cfr.* Kearsley, Sallamack, Fluder, Andose, Mosley y Sheridan [1229]; Ginn, Turner, Willett, Ferguson y Heritage [1230]; Charifson, Corkery, Murcko y Walters [1231]; Ginn, Willett y Bradshaw [1195].

El fundido de los 37 métodos proporciona la siguiente ordenación:

	Alberto	Blanca	Daniel	Emilia	Germán	Hilario
	189/40 $\simeq$ 4,725	122/40 $\simeq$ 3,05	127/40 $\simeq$ 3,175	215/42 $\simeq$ 5,1190	54/40 $\simeq$ 1,35	145/42 $\simeq$ 3,4524
Consenso de 37	5	2	3	6	1	4

o sea:

$$\text{Germán} \succ \text{Blanca} \succ \text{Daniel} \succ \text{Hilario} \succ \text{Alberto} \succ \text{Emilia} \tag{10.175}$$

El fundido de los 26 métodos que intervienen en la simulación (destacados con una Ⓢ) —*cfr.* §10.12— proporciona la siguiente ordenación:

	Alberto	Blanca	Daniel	Emilia	Germán	Hilario
	130/28 $\simeq$ 4,6429	91/29 $\simeq$ 3,1379	80/28 $\simeq$ 2,8571	152/30 $\simeq$ 5,0666	40/29 $\simeq$ 1,3793	81/26 $\simeq$ 3,1154
Consenso de 26	5	4	2	6	1	3

o sea:

$$\text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Hilario} \succ \text{Blanca} \succ \text{Alberto} \succ \text{Emilia} \tag{10.176}$$

10.10.18 Resolución mediante TOPSIS-01

Recordemos, el supuesto es el de la Sección §10.1.8. La $[0,1]$-normalización llevada a cabo hace que los perfiles de los candidatos puedan representarse por conjuntos borrosos. Concretamente, por los siguientes:

$$\text{Alberto} = .188/C_1 + .172/C_2 + .168/C_3 + .122/C_4 + .114/C_5 \tag{10.177}$$
$$\text{Blanca} = .125/C_1 + .069/C_2 + .188/C_3 + .244/C_4 + .205/C_5 \tag{10.178}$$
$$\text{Daniel} = .156/C_1 + .241/C_2 + .134/C_3 + .220/C_4 + .136/C_5 \tag{10.179}$$
$$\text{Emilia} = .188/C_1 + .034/C_2 + .174/C_3 + .146/C_4 + .159/C_5 \tag{10.180}$$
$$\text{Germán} = .188/C_1 + .276/C_2 + .156/C_3 + .171/C_4 + .205/C_5 \tag{10.181}$$
$$\text{Hilario} = .156/C_1 + .207/C_2 + .180/C_3 + .098/C_4 + .182/C_5 \tag{10.182}$$

Los perfiles ideal ($\mathcal{I}$) y anti-ideal ($\overline{\mathcal{I}}$) vienen representados por los conjuntos borrosos:

$$\mathit{Ideal}\ (\mathcal{I}) = .188/C_1 + .276/C_2 + .188/C_3 + .244/C_4 + .205/C_5 \tag{10.183}$$
$$\mathit{Anti-ideal}\ (\overline{\mathcal{I}}) = .125/C_1 + .034/C_2 + .134/C_3 + .098/C_4 + .114/C_5 \tag{10.184}$$

La unión de los conjuntos de niveles es:

$$\begin{aligned} &\Lambda(\text{Alberto}) \cup \Lambda(\text{Blanca}) \cup \Lambda(\text{Daniel}) \cup \Lambda(\text{Emilia}) \cup \Lambda(\text{Germán}) \cup \Lambda(\text{Hilario}) = \\ &\{.034, .069, .098, .100, .114, .122, .125, .134, .136, \\ &.146, .156, .159, .168, .171, .172, .174, .180, .182, \\ &.188, .200, .205, .207, .220, .241, .244, .250, .276\} \end{aligned} \tag{10.185}$$

Pueden verse los α-cortes considerados en la Tabla 10.27 (pág. 330). El conjunto de índices ponderales es:

$$W = \left\{ \frac{5}{20}, \frac{5}{20}, \frac{2}{20}, \frac{4}{20}, \frac{4}{20} \right\} \quad (10.186)$$

De este modo, la representación ponderada del conjunto $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ es el multiconjunto:

$$\{C_1, C_1, C_1, C_1, C_1, C_2, C_2, C_2, C_2, C_2, C_3, C_3, C_4, C_4, C_4, C_4, C_5, C_5, C_5, C_5\} \quad (10.187)$$

Ejemplo 169 *Con el fin de comparar el perfil de Germán con el perfil ideal, debemos hacerlo para todos los α-cortes. Por ejemplo, la Tabla 10.23 muestra sus .205-cortes indicadores ponderados —cfr. §10.7— correspondientes a los .205-cortes* $^{.205}$*Germán*$= \{C_2, C_2, C_2, C_2, C_2, C_5, C_5, C_5, C_5\}$ *y* $^{.205}\mathcal{I} = \{C_2, C_2, C_2, C_2, C_2\}$.

α-cortes	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_3	C_3	C_4	C_4	C_4	C_4	C_5	C_5	C_5	C_5
$^{.205}\text{Germán}^w_\chi$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$^{.205}\mathcal{I}^w_\chi$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 10.23: *Los .205-cortes correspondientes a Germán y al ideal:* $^{.205}$*Germán*$= \{C_2, C_2, C_2, C_2, C_2, C_5, C_5, C_5, C_5\}$ *y* $^{.205}\mathcal{I} = \{C_2, C_2, C_2, C_2, C_2\}$, *referentes al supuesto propuesto en la sección §10.1.8.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

La matriz de presencia-ausencia para estos α-cortes es, por tanto:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \quad (10.188)$$

Los resultados para los 17 diferentes coeficientes de disimilitud aparecen recogidos en la Tabla 10.29 (pág. 332).

Simplemente haciendo la media aritmética de las posiciones en las diferentes ordenaciones obtenemos:

Métodos	Alberto	Blanca	Daniel	Emilia	Germán	Hilario
Media aritmética	4,8824	3,3530	2,1180	5,9412	1	3,7059
TOPSIS-0/1	5	3	2	6	1	4

De ello, se observa la estructura consensuada de preferencias:

$$\text{Germán} \succ \text{Daniel} \succ \text{Blanca} \succ \text{Hilario} \succ \text{Alberto} \succ \text{Emilia} \quad (10.189)$$

Asimismo, del fundido de (10.189) y de (10.176) podríamos sugerir que:

$$\textbf{Germán} \succ \textbf{Daniel} \succ \textbf{Blanca} \approx \textbf{Hilario} \succ \textbf{Alberto} \succ \textbf{Emilia} \quad (10.190)$$

Observación 170 *La aplicación de TOPSIS con diferentes métricas da lugar a diferentes estructuras de preferencias. Observemos la Tabla 10.24, donde A, B, D, E, G y H, corresponden a las iniciales de Alberto, Blanca, Daniel, Emilia, Germán e Hilario, respectivamente, y d_∞ es la distancia de* TCHEBYCHEFF*:*

$$\begin{aligned} d_\infty(X,Y) &= \lim_{p\to\infty} d_p^w((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) \\ &= \max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\} \end{aligned}$$

Observación 171 *La observación anterior nos proporciona* ***un posible atajo****. Debido a que para las familias de métricas de* MINKOWSKI*, se tiene la relación:*

$$d_1^2 < d_{(2)}^m < d_{(2)}^n < d_2^2 < d_q^2 < d_p^2 < d_\infty^2 \le d_\infty^{2*} \le d_{p'}^{2*} \le d_p^{2*} \le d_1^{2*} \quad (10.191)$$

podemos entonces considerar, como ***soluciones factibles fundamentales****, la correspondiente a la distancia menor (d_1^2):*

$$\begin{aligned} \hat{A}_1^2 &= \arg\min_{A\in\mathcal{A}_F} d_1^2(A,\mathcal{I}) \quad (10.192) \\ &= \arg\min_{A\in\mathcal{A}_F} \frac{1}{|\mathcal{C}|}\sum_{C\in\mathcal{C}} |A(C)-\mathcal{I}(C)| \end{aligned}$$

	$d(\cdot,\mathcal{I})$					$d(\cdot,\overline{\mathcal{I}})$									
$\mathcal{A}$	d_1^w	d_2^w	d_{20}^w	d_{500}^w	d_∞	d_1^w	d_2^w	d_{20}^w	d_{500}^w	d_∞	S_1^w	S_2^w	S_{20}^w	S_{500}^w	S_∞
A	5	4	4	3	3	5	5	5	5	4	5	4	4	4	4
B	4	5	5	5	5	4	4	4	4	2	4	5	5	5	5
D	2	2	2	1	1	2	2	2	2	6	2	2	2	2	2
E	6	6	6	6	6	6	6	6	6	1	6	6	6	6	6
G	1	1	1	2	2	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1
H	3	3	3	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Tabla 10.24: *Diferentes métricas, diferentes estructuras de preferencia. Aplicación al supuesto propuesto en la sección §10.1.8. Los nombres aparecen abreviados por sus iniciales: Alberto(A), Blanca (B), Daniel (D), Emilia (E), Germán(G) e Hilario (H).*
— *Fuente:* Elaboración propia.

las distancias intermedias (d^2_∞ y d^{2*}_∞):

$$\begin{aligned}\hat{A}^{2*}_\infty &= \hat{A}^2_\infty \\ &= \arg\min_{A\in\mathcal{A}_F} d^2_\infty(A,\mathcal{I}) \\ &= \arg\min_{A\in\mathcal{A}_F}\max_{C\in\mathcal{C}}\{|A(C)-\mathcal{I}(C)|\}\end{aligned}$$

y la correspondiente a la distancia mayor (d^{2*}_1):

$$\begin{aligned}\hat{A}^{2*}_1 &= \arg\min_{A\in\mathcal{A}_F} d^{2*}_1(A,\mathcal{I}) \\ &= \arg\min_{A\in\mathcal{A}_F}\sum_{C\in\mathcal{C}}|A(C)-\mathcal{I}(C)|\end{aligned} \quad (10.193)$$

Para el caso del supuesto con el que andamos trabajando, obsérvense las Tablas 10.24, 10.25 y 10.26.

	$d(\cdot,\mathcal{I})$					$d(\cdot,\overline{\mathcal{I}})$									
$\mathcal{A}$	d_∞^*	d_{500}^*	d_{20}^*	d_2^*	d_1^*	d_∞^*	d_{500}^*	d_{20}^*	d_2^*	d_1^*	S_∞^*	S_{500}^*	S_{20}^*	S_2^*	S_1^*
A	3	3	3	4	5	5	5	5	5	5	4	4	4	5	5
B	5	5	5	5	3	4	4	4	4	3	5	5	5	4	3
D	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
E	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
G	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
H	4	4	4	3	4	3	3	3	3	4	3	3	3	3	4

Tabla 10.25: *Diferentes métricas, diferentes estructuras de preferencia (continuación). Aplicación al supuesto propuesto en la sección §10.1.8. Los nombres aparecen abreviados por sus iniciales: Alberto(A), Blanca (B), Daniel (D), Emilia (E), Germán(G) e Hilario (H).*
— *Fuente:* Elaboración propia.

$\mathcal{A}$	S_1^w	S_∞	S_1^*	Posiciones posibles
Alberto	5	4	5	$\{4,5\}$
Blanca	4	5	3	$\{3,4,5\}$
Daniel	2	2	2	$\{2\}$
Emilia	6	6	6	$\{6\}$
Germán	1	1	1	$\{1\}$
Hilario	3	3	4	$\{3,4\}$

Tabla 10.26: *Conjuntos de posiciones posibles determinados por la aplicación de las distancias de* MINKOWSKI *al supuesto propuesto en la sección §10.1.8.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Observación 172

Observación 173 *Mediante una rápida mirada a la Tabla 10.26 vemos que están todas las posibles estructuras de preferencia que pueden generarse a partir de los* ***conjuntos de posiciones posibles****. Parece surgir de inmediato también en este punto la necesidad de profundizar en la investigación.*

Observación 174 *Algo que seguramente esté emparentado con nuestra observación anterior es la idea de «****soluciones de compromiso****» de Milan* ZELENY *[1070], soluciones que pertenezcan a la envolvente convexa de un conjunto de soluciones básicas o fundamentales que, de alguna manera, «acoten» el resto.*

Observación 175 *Pero de lo que no hay lugar a dudas, es de que las distancias de* MINKOWSKI *proporcionan tres* ***posiciones indiscutibles en la ordenación****: el primero, Germán; el segundo, Daniel, y la sexta, Emilia —cfr. Tabla 10.26.*

Observación 176 *La aplicación de TOPSIS-01, con cualquiera de los* 17 *índices de disimilitud, proporciona como* ***ganador indiscutible*** *a Germán —véase la Tabla 10.29 (pág. 332).*

10.11 Una evaluación de TOPSIS-0/1

Sea R el número total de ejecuciones del proceso de simulación. Sea $r \in \{1, \ldots, R\}$ una ejecución concreta. Denotemos mediante $\overline{M}_r$ la estructura de preferencia consensuada generada por la colección de los 26 métodos «clásicos», según SUM_{OR} —*cfr. supra* Ec. 10.174—. Sea $\mathcal{T}_r$ la estructura de preferencia generada por TOPSIS-0/1. De cara a evaluar la actuación de TOPSIS-0/1, comparamos $\overline{M}_r$ con $\mathcal{T}_r$ midiendo el porcentaje de ocurrencias en las que $\overline{M}_r$ y $\mathcal{T}_r$ encuentran la misma m-cadena. Por m-cadena entendemos una subrelación de m elementos consecutivos en la estructura de preferencia.

Cuando $m = 1$, este primer índice mide el porcentaje de ocurrencias en las que $\overline{M}_r$ y $\mathcal{T}_r$ proponen la misma alternativa como la mejor:

$$J_1 = \frac{1}{R} \sum\nolimits_{r=1}^{R} \chi_{\overline{M}_r^{-1}(1) = \mathcal{T}_r^{-1}(1)}(1) \tag{10.194}$$

donde χ_P denota la función característica del predicado P, y $X_r^{-1}(1)$ denota la alternativa que X propone como la mejor, para $X = \overline{M}, \mathcal{T}$.

Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, denotemos mediante $X_r^{-1}(i)$ la alternativa que X sitúa en la posición i de la estructura de preferencia, para $X = \overline{M}, \mathcal{T}$. En general, si $m \in \{1, \ldots, n\}$, entonces, para todo $i \in \{1, \ldots, n - m + 1\}$, consideramos el predicado:

$$P_r(i) \equiv \left(\overline{M}_r^{-1}(i) = \mathcal{T}_r^{-1}(i) \right) \wedge \ldots \wedge \left(\overline{M}_r^{-1}(i + m - 1) = \mathcal{T}_r^{-1}(i + m - 1) \right) \tag{10.195}$$

Proponemos un índice que mide el porcentaje de ocurrencias en las que $\overline{M}_r$ y $\mathcal{T}_r$ obtienen la misma estructura m-parcial de preferencia, es:

$$I_m = \frac{1}{(n - m + 1)R} \sum\nolimits_{r=1}^{R} \sum\nolimits_{i=1}^{n-m+1} \chi_{P_r(i)}(i) \tag{10.196}$$

Destacamos tres casos:

- $m = 1$: cuando medimos el porcentaje de ocurrencias en las que $\overline{M}_r$ y $\mathcal{T}_r$ sitúan a una alternativa en la misma posición en las estructuras de preferencia respectivas;
- $m = 2$ y $m = 3$: buscando las que llamamos «biords» (o sea, parejas de alternativas consecutivas) y «triords» (o sea, tríadas de alternativas consecutivas);
- $m = n$: cuando medimos el porcentaje de ocurrencias en las que $\overline{M}_r$ y $\mathcal{T}_r$ generan la misma estructura de preferencia.

Si suprimimos la condición de «ser consecutivas» de la noción de m-cadena, obtenemos el concepto de subestructura de m-preferencia. Por ejemplo, los predicados para los casos de los «biords» ($m = 2$) y «triords» ($m = 3$) son, respectivamente:

$$P_r(i, j) \equiv \mathcal{T}_r(\overline{M}_r^{-1}(i)) < \mathcal{T}_r(\overline{M}_r^{-1}(i + j)) \tag{10.197}$$

$$P_r(i, j, k) \equiv \mathcal{T}_r(\overline{M}_r^{-1}(i)) < \mathcal{T}_r(\overline{M}_r^{-1}(i + j)) < \mathcal{T}_r(\overline{M}_r^{-1}(i + j + k)) \tag{10.198}$$

Los nuevos índices son:

$$J_2 = \frac{2}{n(n-1)R} \sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \chi_{P_r(i,j)}(i,j) \quad (10.199)$$

$$J_3 = \frac{6}{n(n-2)R} \sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \sum_{k=1}^{n-i-j} \chi_{P_r(i,j,k)}(i,j,k) \quad (10.200)$$

10.12 Simulaciones computacionales

Se ha llevado a cabo una simulación intensiva. Se han considerado 30 valores aleatorios del vector de índices ponderales. Para cada valor, se han generado aleatoriamente 700 matrices de decisión, correspondientes a 9 alternativas y 5 criterios, con valores posibles dentro de los rangos del supuesto 10.1.8. Para cada matriz se ha realizado un análisis de dominancia y uno posterior de satisfacción (los umbrales de satisfacción han permanecido constantes). A cada uno de los $30 \times 700 = 21000$ supuestos aleatoriamente generados, se les ha aplicado TOPSIS-0/1 y los 26 métodos «clásicos». La computación se ha llevado a cabo en un sistema equipado con un procesador AMD Athlon^{TM} XP 1600+, bajo sistema operativo Windows 98.

Los resultados de los índices anteriores para TOPSIS-0/1 son: $J_1 = 1$ (o sea, $\overline{M}_r$ y $\mathcal{T}_r$ siempre proponen la misma alternativa como la mejor), $I_1 = 0.76$ (o sea, $\overline{M}_r$ y $\mathcal{T}_r$ ordenan las alternativas en la misma posición una media del 76%), $I_2 = 0.39$ (o sea, $\overline{M}_r$ y $\mathcal{T}_r$ ordenan las 2-cadenas en la misma posición una media del 39%), $I_3 = 0.17$ (o sea, $\overline{M}_r$ y $\mathcal{T}_r$ ordenan las 3-cadenas en la misma posición una media del 17%), $I_n = 0.05$ (esto es, $\overline{M}_r$ y $\mathcal{T}_r$ generan la misma estructura de preferencia una media del 5%), $J_2 = 0.92$ (o sea, $\overline{M}_r$ y $\mathcal{T}_r$ generan la misma estructura 2-parcial de preferencia una media del 92%), $J_3 = 0.68$ (es decir, $\overline{M}_r$ y $\mathcal{T}_r$ generan la misma estructura 3-parcial de preferencia una media del 68%).

Estamos convencidos de que estos valores obtenidos para J_1, I_1, J_2 y J_3, indican un alto grado de efectividad para TOPSIS-0/1. También indican la consistencia de TOPSIS-0/1 con respecto a la colección de 26 métodos «clásicos» de análisis multicriterio.

10.13 Generalización a objetos borrosos de tipo 2

Pensando, por ejemplo, en la administración con y para las personas, parece claro que a veces, resulta más natural asignar un valor lingüístico concreto de una escala a la destreza de una capacidad (por ejemplo, escasa o normal), en vez de un valor numérico (modelado borroso) o un intervalo numérico (modelado Φ-borroso). Este hecho puede formalizarse usando subconjuntos borrosos de tipo 2 para describir los perfiles de atributos de los objetos. Recordemos, no obstante, que tanto los subconjuntos borrosos como los Φ-borrosos son casos particulares de subconjuntos borrosos de tipo 2.

Como anteriormente —*cfr.* §10.2.1—, denotemos por p_{ik} el valor de la variable p_k para el objeto O_i. Asumimos que los p_{ik} son valores lingüísticos pertenecientes al conjunto de términos L_k. De este modo, cualquier objeto puede describirse mediante un subconjunto borroso de tipo 2 de P. Los p_{ik} son los grados borrosos de O_i.

A modo de ejemplo, fijémonos en un problema de elección de personal. Suponemos que tenemos acceso a un sistema de conocimiento borroso donde reside la información que nos interesa. Los átomos del sistema son las propiedades, en particular, los atributos, plausibles de ser satisfechos por el personal, de forma que el universo de discurso, el referencial, es $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Cada p_i tiene asociado un conjunto de términos, que notaremos con su mismo subíndice, L_i.

$p_1 \equiv$ Edad (se requiere ser joven);

$p_2 \equiv$ Entrenamiento;

$p_3 \equiv$ Experiencia;

$p_4 \equiv$ Entrevista de trabajo;

$L_1 = \{$muy viejo, viejo, muy joven, edad media, joven$\}$;

$L_2 = \{$ninguno(a), muy bajo(a), bajo(a), medio(a), alto(a), muy alto(a), fuera de serie$\}$;

$L_3 = \{$ninguno(a), escaso(a), mejorable, normal, considerable, destacable, fuera de serie$\}$;

$L_4 = \{\widetilde{0}, \widetilde{1}, \widetilde{2}, \widetilde{3}, \widetilde{4}, \widetilde{5}, \widetilde{6}, \widetilde{7}, \widetilde{8}, \widetilde{9}, \widetilde{10}\}$.

Imaginemos que los perfiles profesionales, de acuerdo con P, de dos candidatas Marina y Sara están repre-

sentados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}\mathsf{PP}_{\mathsf{Marina}} &= \mathsf{joven}\diagup\textsc{Edad} + \mathsf{alto}\diagup\textsc{Entrenamiento} + \\ &\quad \mathsf{escasa}\diagup\textsc{Experiencia} + \widetilde{7}\diagup\textsc{Entrevista de Trabajo} \\ \mathsf{PP}_{\mathsf{Sara}} &= \mathsf{muy\ joven}\diagup\textsc{Edad} + \mathsf{medio}\diagup\textsc{Entrenamiento} + \\ &\quad \mathsf{mejorable}\diagup\textsc{Experiencia} + \widetilde{9}\diagup\textsc{Entrevista de Trabajo}\end{aligned}$$

Suponemos que todos estos valores lingüísticos p_{ik} han sido generados, por ejemplo, según el modelo de votación —*cfr.* Gaines [571]—. Proponemos, como candidatos a ser votados, un conjunto finito de números de $[0, 1]$ (los mismos para todos los valores lingüísticos que pertenezcan al mismo conjunto de términos). De este modo, todos los valores lingüísticos son discretos[22]. Entonces, dado un valor o etiqueta lingüística e_L, el valor de pertenencia $e_L(\alpha)$ (para todo $\alpha \in [0, 1]$) es la proporción de expertos que votan a α. En el proceso de estimación de la forma funcional de estos valores lingüísticos, como recogemos información de una votación, podemos asegurar que habrá veces en las que estarán más cercanos los unos de los otros, y veces en las que se alejarán. Una simple consideración ordinal no refleja este hecho. Esta es una de las razones por las que usamos estructuras de preferencia basadas en números.

En definitiva, medimos la disimilaridad entre dos objetos borrosos de tipo 2, O_i y O_j, mediante —*cfr.* §7.1.3:

$$D(O_i, O_j) = \operatorname*{Aggr}_{p \in P} D^{\mathrm{H}}(O_i(p), O_j(p); \mathfrak{u}, w, d^{\mathrm{H}}_{\alpha}, x) \tag{10.201}$$

donde d^{H}_{α} es una función de disimilaridad entre los α-cortes indicadores ponderados de dos valores lingüísticos «emparejados» (en el sentido de que están asociados al mismo atributo potencial). En principio, el α-percentilado que usamos es $\mathfrak{u}$, el uniforme.

10.14 Estudio ilustrativo: Juegos[23] n-personales de votación ponderada

«El ajedrez no es un juego. Es una forma muy precisa y particular de cálculo. Quizá no puedas obtener las soluciones$^{(*)}$*, pero en teoría hay una solución, un procedimiento correcto para cualquier posición. Sin embargo, los juegos reales no son en absoluto así. El mundo real tampoco. La vida real consiste en echar faroles, en llevar a cabo pequeñas tácticas para engañar al otro, en preguntarse qué va a pensar el otro que voy a hacer. Y sobre este tema se ocupan los juegos de mi teoría.»*

—John von Neumann, en respuesta a Jacob Bronowski, mientras circulaban por Londres en taxi, *via* William Poundstone [1234].

$^{(*)}$ *Sólo en las cuatro primeras jugadas de una partida de ajedrez, los dos jugadores disponen de más de 318 mil millones de posibles movimientos. Debido a esta «explosión combinatoria», ni siquiera uniendo la potencia de cálculo de todos los ordenadores existentes, en la actualidad (2003), en nuestro planeta, podríamos calcular la solución al «juego» del ajedrez.*

[22] Por **conjunto borroso discreto** entendemos, un conjunto borroso definido sobre un universo finito de discurso, o un conjunto borroso que puede expresarse por un número finito de α-cortes. Existen métodos para discretizar un número borroso continuo —*cfr. v. gr.* Schmucker [1232]; o el método LIA (*Level Interval Algorithm*) (también conocido como *Vertex Method*) (*cfr.* Dong y Wong [1233]).

[23] Ni de esos juegos, a los que se refiere John Von Neumann en la cita , como el ajedrez —que en definitiva no es más que un tres en raya, pero de dimensiones descomunales—, ni de los juegos electrónicos —cuyo primer modelo, por cierto, fue una partida de tenis, y fue realizado por Nolan Bushnell, en 1972—, trata, en principio, la teoría de juegos. Y matizamos «en principio», porque las dimensiones descomunales del ajedrez hacen, sin embargo, que posea interés para la teoría

Los juegos de salón, dependientes, no sólo del arte de los jugadores, sino también de factores aleatorios (las manos de cartas, los dados, etc.) han sido y son una fuente inagotable de inspiración para la teoría. Podríamos decir que el póquer, cuyo primer modelo fue propuesto por John Von Neumann en 1928 [1235], ha desempeñado un papel similar al que desempeñaron los dados en el nacimiento de la teoría de la probabilidad.

Los juegos de los que hablamos reflejan situaciones en las se interrelacionan dos o más individuos, a los que llamaremos decisores. La finalidad de la teoría de juegos es ayudarnos a comprender y modelar tales situaciones. Podríamos decir que la teoría de juegos es la **teoría del comportamiento estratégico**.

Algunas ideas básicas sobre la teoría de juegos surgieron muy temprano en la historia, pero, el mayor desarrollo se produjo en la década 1920-1930, con los trabajos de Emile Félix Edouard Justin Borel y con la publicación en 1928 de un artículo de John Von Neumann, mencionado anteriormente. Y quizás la fecha decisiva de comienzo, fue 1944, cuando Von Neumann y Oskar Morgenstern publican su libro *The Theory of Games and Economic Behavior* [1236].

Desde 1950, ha sido creciente el número de campos en los que se ha utilizado la teoría de juegos: *economía*, *ciencias políticas*, *psicología*, *biología*, *planificación estratégica militar*, etc.

Sea N un conjunto de n jugadores. Un **juego simple** es —*cfr.* BILBAO ARRESE, FERNÁNDEZ GARCÍA, JIMÉNEZ-LOSADA y LÓPEZ [1244] (p. 1)— una función de conjuntos $v : \mathfrak{P}(N) \to \{0, 1\}$, tal que:

$$v(N) = 1 \tag{10.202}$$

y tal que v es monótona no decreciente, o sea, que para cualesquiera $A, B \in \mathfrak{P}(N)$:

$$B \subseteq A \Longrightarrow v(B) \leq v(A) \tag{10.203}$$

Supongamos que cada jugador $n_i \in N$ tiene un número de votos $w_i > 0$, de manera que cada **coalición**

En 1994, y en reconocimiento a la gran influencia en tantos campos que ha tenido la teoría de juegos, fue concedido el premio Nobel de Economía a tres grandes teóricos de los juegos: John Charles HARSANYI (1920-2000), John Forbes NASH (Jr.) (1928-) y Reinhard SELTEN (1930-).

La vida del segundo de ellos, de NASH, aparece relatada, por ejemplo, en el libro de Sylvia NASAR [1237]: *A Beautiful Mind: A Biography of John Forbes Nash, Jr.*, traducido como «Una Mente Prodigiosa», y más recientemente, en *The Essential John Nash* [1238], de autor el propio NASH, y editado por Harold W. KUHN y Sylvia NASAR. Su vida ha sido llevada al cine, en la película *A Beautiful Mind*, traducida como «Una Mente Maravillosa», del director Ron HOWARD, siendo Russell CROWE el actor elegido para interpretar el papel de John Forbes NASH (Jr.) El éxito alcanzado por la película, y las peculiaridades y avatares de su vida, han hecho que el público se interese por sus contribuciones a la teoría de juegos, aportaciones que fundamentalmente se centran en la *teoría del equilibrio estratégico* y en los *modelos de negociación* (tanto desde el punto de vista axiomático como desde el punto de vista estratégico).

Un juego se describe por sus **reglas** (lo que cada uno puede hacer y cuando puede hacerlo), por sus **estrategias** (los planes de acción para cada situación posible del juego) y por sus **pagos** (las cantidades que los jugadores ganan o pierden en una situación particular del juego). Una vez conocidas las reglas, las estrategias y las ganancias y pérdidas, podemos pensar en hallar las mejores estrategias. Por lo general, las mejores estrategias para un jugador dependen de lo que haga el resto de jugadores. Si una de tales mejores estrategias no depende del resto, se llama **estrategia dominante**. La **mejor estrategia** o respuesta para un jugador es aquella que, dadas las estrategias del resto de jugadores, maximiza los pagos al jugador.

El **equilibrio de Nash** se alcanza cuando la elección de cada jugador es la mejor respuesta a las elecciones de los demás jugadores. Es decir, cuando cada jugador responde con su mejor estrategia. Como en un equilibrio de NASH, la estrategia elegida por cada jugador es su mejor estrategia, los jugadores carecen de incentivos para cambiar de estrategia.

Los jugadores pueden **alcanzar el equilibrio de Nash**, básicamente de dos formas. Una manera —*eductiva*— en la que los jugadores alcanzan el equilibrio pasa por razonamientos extraordinariamente profundos, que casi seguramente comenzarían «si él piensa que yo pienso que él piensa que ...», o sea, supone que los jugadores «piensan todo de antemano». Otra manera —*evolutiva*— corresponde a pensar que los jugadores ajustan su conducta por tanteo, a medida que juegan. La posición del jugador humano suele ser intermedia entre lo eductivo y lo evolutivo.

En realidad, en muchas situaciones coexisten **múltiples equilibrios de Nash**, y el verdadero problema es el de la selección del equilibrio «más equilibrado». Ténganse en cuenta las palabras de NASH: «cualquier teoría normativa del comportamiento racional podrá considerarse acabada, cuando proporcione un medio para seleccionar un único punto de equilibrio para cada juego». El problema es que para esta selección se necesita información extra, es decir, información proveniente de fuera del juego en sí. De procedimientos para realizar esta selección tratan los trabajos de John Charles HARSANYI y Reinhard SELTEN [1239].

Un típico **ejemplo** de juego con múltiples equilibrios de NASH involucra a dos amigos —por ejemplo, Marina y Alejandro— que desean salir juntos una noche. Se plantean dos posibilidades: ir a una fiesta o al cine. Marina quiere ir a la fiesta, pero Alejandro quiere ir al cine. Lo realmente importante, lo que ellos valoran, es hacer algo juntos. La matriz de pagos (en *unidades de felicidad*) puede ser la siguiente:

		Alejandro	
		Fiesta	**Cine**
Marina	**Fiesta**	(2, 1)	(-2, -2)
	Cine	(-2, -2)	(1, 2)

Esta matriz muestra que el juego tiene dos equilibrios de NASH, uno en el que ambos van a la fiesta, y otro en el que ambos van al cine.

En palabras de Juan Luis ARSUAGA [1240], famoso por sus trabajos en Atapuerca —*cfr.* ARSUAGA y MARTÍNEZ [1241]— y el descubrimiento del *Homo antecesor*, NASH «trata de ver cómo es posible que los individuos cooperen entre sí». Y observe el lector que ARSUAGA habla de individuos, que no de seres humanos.

De hecho, la teoría de juegos cada vez cobra un papel más protagonista en biología, antropología y etología, y en especial a la hora de explicar la **evolución de la vida** en nuestro planeta. No sólo debemos pensar en el proceso de selección natural propuesto por Charles DARWIN [1242], quien a fin de cuentas, sólo hablaba de individuos, sino que la teoría de juegos, y en particular la dedicada a juegos entre varios individuos, en los que se contemple la posibilidad de cooperación entre ellos, nos ayuda a comprender el proceso de selección natural de grupos, y el porqué del triunfo de algunos de ellos. Quizás uno de los máximos ponentes de todo ello sea John Maynard SMITH [1243].

Y cómo no, la teoría de juegos parece fundamental para entender la **sociología** y la **filosofía social**. Los teóricos de los juegos están seguros de poder demostrar que hasta el individuo más egoísta (ya se sabe, esa persona que define al propio egoísta como todo aquél o aquella que no piensa en ella), puede sacar provecho de **cooperar con los demás**, si no a corto plazo, seguro que sí a medio o largo plazo. Para ello, los investigadores estudian los equilibrios de juegos que los jugadores juegan una y otra vez (juegos con repetición).

En teoría de juegos, se conoce como **nivel de seguridad** de un jugador en un juego al mayor beneficio o pago esperado que el jugador o jugadora puede asegurarse con independencia de lo que haga el resto de jugadores. Para calcular su nivel de seguridad, un jugador debe considerar el peor de los casos, o sea, debe suponer que cualquiera de los otros jugadores será capaz de predecir su estrategia y que actuará para minimizar su beneficio.

$S \subseteq N$ reúne la suma de los votos de los jugadores que la componen

$$w(S) = \sum_{i \in S} w_i \tag{10.204}$$

Establecida una **cuota** q —menor o igual que $w_1 + w_2 + \ldots + w_n$— para adoptar decisiones, S es una **coalición ganadora**, precisamente si:

$$w(S) \geq q \tag{10.205}$$

y es **perdedora** en caso contrario.

Un **juego de votación ponderada** (j.v.p.) —*cfr.* Algaba, Bilbao Arrese, Fernández García y y López [1245] (p. 1).— es un juego simple $v : \mathfrak{P}(N) \rightarrow \{0, 1\}$ tal que:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } w(S) \geq q \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{10.206}$$

de manera que todo j.v.p. se puede representar por:

$$v \equiv [q; w_1, \ldots, w_n] \tag{10.207}$$

Definamos un **juego borroso simple** como una función de conjuntos $\widetilde{v} : \mathfrak{F}(N) \rightarrow [0, 1]$, tal que:

$$\widetilde{v}(N) = 1 \tag{10.208}$$

y:

$$B \subseteq A \Longrightarrow \widetilde{v}(B) \leq \widetilde{v}(A) \tag{10.209}$$

para cualesquiera $A, B \in \mathfrak{F}(N)$.

Se satisface que si existe un juego simple $v : \mathfrak{P}(N) \rightarrow \{0, 1\}$ tal que para todo $\alpha \in \Lambda(A) \cup \Lambda(B)$:

$$^{\alpha}B ^{\alpha}A \Longrightarrow v(^{\alpha}B) \leq v(^{\alpha}A) \tag{10.210}$$

entonces:

$$\widetilde{v}(A) = \underset{\alpha \in \Lambda(A) \cup \Lambda(B)}{\text{Aggr}} v(^{\alpha}A) \tag{10.211}$$

es un juego borroso simple (observemos que según los axiomas de una operación esencial de agregación Aggr —*cfr.* Def. 69 (pág. 106)—, se tiene que $\widetilde{v}(\varnothing) = 0$ (si $v(\varnothing) = 0$) y que $\widetilde{v}(N) = 1$ (si $v(N) = 1$)).

Ejemplo 177 *Consideremos un juego de votación ponderada en una de tantas asambleas políticas, cuya composición fuese la siguiente:* P_1 *posee* 13 *escaños,* P_2 *tiene* 12*,* P_3 *tiene* 6 *y* P_4 *sólo cuenta con* 2 *escaños. En principio, el juego está definido por:*

$$v \equiv [17; 13, 12, 6, 2] \tag{10.212}$$

Dada la coalición $N = \{P_1, P_2\}$*, sus miembros discuten entre las opciones* A *y* B*. De los* 13 *de* P_1*,* 6 *prefieren* A*,* 5 *prefieren* B *y* 2 *no saben; de los* 12 *de* P_2*, los* 12 *preferirían* B*, pero si no quedase más remedio,* 7 *votarían* A*. La opción* B *es la preferida, pues intuitivamente calculamos las esperanzas:*

$$E[A] = \frac{6}{13}\frac{13}{33} + \frac{7}{12}\frac{12}{33} = \frac{13}{33} \simeq .39394 \tag{10.213}$$

$$E[B] = \frac{5}{13}\frac{13}{33} + \frac{12}{12}\frac{12}{33} = \frac{17}{33} \simeq .51515 \tag{10.214}$$

Pero, ¿por qué ha de suponer que el resto de jugadores quiere perjudicarle? ¿No resulta más coherente suponer que cualquier jugador actuará para maximizar su beneficio en vez de hacerlo para minimizar el de sus contrarios?

Puede que no siempre. Por ejemplo, un juego de dos jugadores en los que los intereses de ambos sean diametralmente opuestos entre sí. En tal caso, maximizar el beneficio de uno equivale a minimizar el beneficio del otro. Estos juegos estrictamente competitivos se conocen en la teoría como **juegos de suma nula**. A primera vista, por poner un ejemplo, podríamos pensar en el póquer o en el backgammon. Sin embargo, la realidad es que depende del entorno donde se jueguen. En algunos casinos, la banca se queda con un 10% de las apuestas. Por otro lado, hemos de considerar si los jugadores tienen o no aversión al riesgo. Si no la tienen, es decir, si son neutrales al riesgo, podemos considerar estos juegos como de suma cero. Por ejemplo, es una buena hipótesis si tales juegos se juegan en familia. Pero, en general, no deberían ser considerados como juegos de suma cero, pues las personas muestran aversión al riesgo.

En definitiva, la **hipótesis de racionalidad del decisor** —*cfr.* pág. 8— puede ser un buen punto de partida.

De manera alternativa, decidimos representar las opciones mediante los conjuntos borrosos:

$$A = (6/13)/P_1 + (7/12)/P_2 \quad (10.215)$$
$$B = (5/13)/P_1 + (12/12)/P_2 \quad (10.216)$$

Trabajemos con α-cortes. La unión de los conjuntos de niveles es:

$$\Lambda(A) \cup \Lambda(B) = \{5/13, 6/13, 7/12, 1\} \quad (10.217)$$

Los α-cortes de A y B son:

$$\begin{array}{llll} {}^{5/13}A = \{P_1, P_2\}, & {}^{6/13}A = \{P_1, P_2\}, & {}^{7/12}A = \{P_2\}, & {}^{1}A = \varnothing \\ {}^{5/13}B = \{P_1, P_2\}, & {}^{6/13}B = \{P_2\}, & {}^{7/12}B = \{P_2\}, & {}^{1}B = \{n_2\} \end{array} \quad (10.218)$$

por lo que, si por ejemplo, en la Ec. 10.211, usamos como Aggr *la media aritmética, entonces:*

$$\widetilde{v}(A) = \frac{1+1+0+0}{4} = 1/2 \quad (10.219)$$
$$\widetilde{v}(B) = \frac{1+0+0+0}{4} = 1/4 \quad (10.220)$$

resultado que es contrario a nuestra intuición anterior.

Apliquemos TOPSIS 0/1. La opción preferencial ideal es

$$\mathcal{I} = (6/13)/P_1 + 1/P_2 \quad (10.221)$$

y la anti-ideal es:

$$\overline{\mathcal{I}} = (5/13)/P_1 + (7/12)/P_2 \quad (10.222)$$

De este modo:

$$\begin{array}{llll} {}^{5/13}\mathcal{I} = \{P_1, P_2\}, & {}^{6/13}\mathcal{I} = \{P_1, P_2\}, & {}^{7/12}\mathcal{I} = \{P_2\}, & {}^{1}\mathcal{I} = \{P_2\} \\ {}^{5/13}\overline{\mathcal{I}} = \{P_1, P_2\}, & {}^{6/13}\overline{\mathcal{I}} = \{P_2\}, & {}^{7/12}\overline{\mathcal{I}} = \{P_2\}, & {}^{1}\overline{\mathcal{I}} = \varnothing \end{array} \quad (10.223)$$

El conjunto de pesos de los criterios en TOPSIS-0/1 es:

$$w = \left\{ \frac{13}{33}, \frac{12}{33}, \frac{6}{33}, \frac{2}{33} \right\} \quad (10.224)$$

Entonces, en realidad, trabajamos con los α-cortes indicadores ponderados; por ejemplo, el indicador ponderado del $\frac{5}{13}$-corte del ideal $\mathcal{I}$ es:

$${}^{5/13}\mathcal{I}^w_\chi = (\overbrace{1, \ldots, 1}^{13\ veces}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{12\ veces}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{6\ veces}, 0, 0) \quad (10.225)$$

Definimos así el juego borroso simple $\widetilde{v}$ como la razón de similitud al ideal modificada —cfr. Ec. 10.6:

$$\widetilde{v}(A) = \frac{\delta^{\mathrm{J}}(A, \overline{\mathcal{I}})}{\delta^{\mathrm{J}}(A, \mathcal{I}) + \delta^{\mathrm{J}}(A, \overline{\mathcal{I}})} \quad (10.226)$$

El cálculo de las razones de similitud al ideal —cfr. Ec. 10.6— para A y B, usando, por ejemplo, la disimilitud δ^{J} —correspondiente al coeficiente σ^{J} de Jaccard-Tanimoto *(cfr. 10.34)— provee la elección de B por:*

$$\widetilde{v}(B) \simeq .65789$$

frente a:

$$\widetilde{v}(A) \simeq .34211$$

El empleo, aquí ejecutado, de TOPSIS-0/1 constituye, sin duda, un incremento del **apoyo empírico** a su utilidad —en el sentido de la *variedad* argumentada por Carl G. Hempel [41] (p. 58).

10.15 Síntesis reflexiva del capítulo

En este capítulo, desarrollamos y evaluamos TOPSIS-0/1, una técnica modificadora de TOPSIS, que nos permitirá eludir los argumentos basados en subsunción en los sistemas basados en conocimiento borroso, que han sido los que hemos elegido para interpretar el papel de los sistemas de conocimiento basados en unidades vagamente perfiladas.

Como decíamos en §2.3, suponemos que cualquier objeto y cualquier clase —de cara a nuestros fines, clase será sinónimo de tipo, e incluso de vista (clase virtual)—, se representa en el sistema por un *perfil descriptivo* consistente en un conjunto de puntuaciones relativas a unos atributos pertenecientes a una colección finita preestablecida. Cada una de estas puntuaciones denota el grado en el que el atributo al que se refiere la puntuación es satisfecho por el objeto o clase.

Comenzamos recordando TOPSIS —*cfr.* §10.1.6—, ilustrando nuestra exposición mediante su aplicación a dos situaciones, según que los criterios posean igual o distinta relevancia —*cfr.* §10.1.7 y §10.1.8, respectivamente.

Algo básico para TOPSIS-0/1 es que definimos la presencia o ausencia de cualquier propiedad en la descripción borrosa de un objeto o de una clase a partir de la combinación de los resultados de la evaluación de la presencia o ausencia de la propiedad en todos los α-cortes del objeto o clase. En el proceso, proponemos identificar cada α-corte con una tupla bivalente que llamaremos **α-corte indicador ponderado** —*cfr.* §10.7—. La bivalencia expresa para cada propiedad corresponde a su presencia o ausencia en el α-corte según el grado en el que el objeto la satisfaga. Para medir la distancia entre α-cortes indicadores ponderados, utilizamos índices de disimilaridad entre conjuntos bivalentes finitos; por ello, dedicamos §10.2 a su estudio, analizando cómo conceder mayor importancia a algunas características —*cfr.* §10.3—, aplicando nuestros resultados al caso de conjuntos nítidos finitos —*cfr.* §10.4— y al de subintervalos de [0,1] —*cfr.* §10.5—, como antesalas del posterior desarrollo de TOPSIS-0/1. A continuación, en §10.6, vemos un ejemplo de aplicación de TOPSIS sobre perfiles bivalentes en diagnosis clínica: la discriminación entre tipos de personalidad A y B (según la tipología de Friedman, Rosenman y Carroll).

En §10.8 entramos de lleno en la descripción de nuestra propuesta TOPSIS-0/1, basada en que definimos la presencia o ausencia de cualquier propiedad en la descripción borrosa de un objeto o de una clase a partir de la combinación de los resultados de la evaluación de la presencia o ausencia de la propiedad en todos los α-cortes del objeto o clase. La bivalencia expresa para cada propiedad corresponde a su presencia o ausencia en el α-corte según el grado en el que el objeto la satisfaga. De este modo, proponemos identificar cada α-corte con un α-corte indicador ponderado —*cfr.* §10.7—. Como resultado, TOPSIS-0/1 proporciona una estructura de preferencia, basada en el mecanismo de TOPSIS —*cfr.* §10.1—, o sea, en la razón de similitud al ideal —*cfr.* §10.8.

A modo de ejemplo, trabajamos con supuestos de elección de personal, distinguiendo entre valorar criterios igualmente importantes —*cfr.* §10.9—, o desigualmente importantes —*cfr.* §10.10—. En este último supuesto hacemos un estudio extenso. Medimos la disimilaridad entre los α-cortes indicadores ponderados mediante 17 índices de disimilaridad entre conjuntos bivalentes finitos. Tenemos pues 17 ordenaciones. Proponemos como posición final de cada candidato la media aritmética de las posiciones en cada una de las posibles ordenaciones.

Esta ordenación «consensuada», a su vez, la «consensuamos» con la deducida a partir de 37 métodos «clásicos» de análisis multicriterio, y en especial de 26 de ellos, para el supuesto propuesto en la sección §10.1.8. De entre estas estrategias, las señaladas con Ⓢ intervendrán en una simulación posterior —*cfr.* §10.12—. Junto a TOPSIS, será un total de 26 los métodos que participarán en dicha simulación.

Esta simulación pretende ser un primer acercamiento a la evaluación de TOPSIS-0/1. Concretamente, para evaluar TOPSIS-0/1 —*cfr.* §10.11—, definimos varios indicadores relativos a su eficiencia y consistencia, y lo comparamos con los 37 métodos clásicos de análisis multicriterio considerados. Los resultados obtenidos —*cfr.* §10.12— indican un alto grado de efectividad para TOPSIS-0/1. También indican la consistencia de TOPSIS-0/1 con respecto a la colección de 26 métodos participantes en la simulación. Finalmente, en §10.13, extendemos estas ideas a objetos descritos por subconjuntos borrosos de tipo 2.

Por último, en §10.14, vemos un ejemplo ilustrativo de aplicación de TOPSIS-0/1 en el ámbito de los juegos de votación ponderada para n jugadores, en concreto, para la elección de una opción conjunta de posicionamiento, entre los miembros de una coalición de dos partidos en una cualquiera de tantas asambleas políticas.

* * *

Lo propuesto en este capítulo evita que tengamos que usar argumentos de subsunción al trabajar en sistemas

	Alberto	Blanca	Daniel	Emilia	Germán	Hilario
.034	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
.069	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
.098	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
.100	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_2, C_3, C_5\}$
.114	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_2, C_3, C_5\}$
.122	$\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_2, C_3, C_5\}$
.125	$\{C_1, C_2, C_3\}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_2, C_3, C_5\}$
.134	$\{C_1, C_2, C_3\}$	$\{C_3, C_4, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_2, C_3, C_5\}$
.136	$\{C_1, C_2, C_3\}$	$\{C_3, C_4, C_5\}$	$\{C_1, C_2, C_4, C_5\}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_2, C_3, C_5\}$
.146	$\{C_1, C_2, C_3\}$	$\{C_3, C_4, C_5\}$	$\{C_1, C_2, C_4\}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_2, C_3, C_5\}$
.156	$\{C_1, C_2, C_3\}$	$\{C_3, C_4, C_5\}$	$\{C_1, C_2, C_4\}$	$\{C_1, C_3, C_5\}$	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_2, C_3, C_5\}$
.159	$\{C_1, C_2, C_3\}$	$\{C_3, C_4, C_5\}$	$\{C_2, C_4\}$	$\{C_1, C_3, C_5\}$	$\{C_1, C_2, C_4, C_5\}$	$\{C_2, C_3, C_5\}$
.168	$\{C_1, C_2, C_3\}$	$\{C_3, C_4, C_5\}$	$\{C_2, C_4\}$	$\{C_1, C_3\}$	$\{C_1, C_2, C_4, C_5\}$	$\{C_2, C_3, C_5\}$
.171	$\{C_1, C_2\}$	$\{C_3, C_4, C_5\}$	$\{C_2, C_4\}$	$\{C_1, C_3\}$	$\{C_1, C_2, C_4, C_5\}$	$\{C_2, C_3, C_5\}$
.172	$\{C_1, C_2\}$	$\{C_3, C_4, C_5\}$	$\{C_2, C_4\}$	$\{C_1, C_3\}$	$\{C_1, C_2, C_5\}$	$\{C_2, C_3, C_5\}$
.174	$\{C_1\}$	$\{C_3, C_4, C_5\}$	$\{C_2, C_4\}$	$\{C_1, C_3\}$	$\{C_1, C_2, C_5\}$	$\{C_2, C_3, C_5\}$
.180	$\{C_1\}$	$\{C_3, C_4, C_5\}$	$\{C_2, C_4\}$	$\{C_1\}$	$\{C_1, C_2, C_5\}$	$\{C_2, C_3, C_5\}$
.182	$\{C_1\}$	$\{C_3, C_4, C_5\}$	$\{C_2, C_4\}$	$\{C_1\}$	$\{C_1, C_2, C_5\}$	$\{C_2, C_5\}$
.188	$\{C_1\}$	$\{C_3, C_4, C_5\}$	$\{C_2, C_4\}$	$\{C_1\}$	$\{C_1, C_2, C_5\}$	$\{C_2\}$
.200	$\varnothing$	$\{C_4, C_5\}$	$\{C_2, C_4\}$	$\varnothing$	$\{C_2, C_5\}$	$\{C_2\}$
.205	$\varnothing$	$\{C_4, C_5\}$	$\{C_2, C_4\}$	$\varnothing$	$\{C_2, C_5\}$	$\{C_2\}$
.207	$\varnothing$	$\{C_4\}$	$\{C_2, C_4\}$	$\varnothing$	$\{C_2\}$	$\{C_2\}$
.220	$\varnothing$	$\{C_4\}$	$\{C_2, C_4\}$	$\varnothing$	$\{C_2\}$	$\varnothing$
.241	$\varnothing$	$\{C_4\}$	$\{C_2\}$	$\varnothing$	$\{C_2\}$	$\varnothing$
.244	$\varnothing$	$\{C_4\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{C_2\}$	$\varnothing$
.250	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{C_2\}$	$\varnothing$
.276	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{C_2\}$	$\varnothing$

Tabla 10.27: *α-cortes de los perfiles de cada candidato considerando criterios de igual importancia. Cfr. supuesto propuesto en la sección §10.1.8.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

de bases de datos orientados a objetos borrosos, y por tanto, evita los problemas que suelen acompañarlos. De nuevo, llamamos la atención del lector sobre la ventaja conceptual de ver un conjunto borroso como una colección de conjuntos nítidos apilados. Suponiendo los objetos representados por conjuntos borrosos, y teniendo esto en cuenta, hemos estudiado la presencia o ausencia de cualquier propiedad, en particular de cualquier atributo, en el objeto a partir de la coalescencia de los resultados de evaluar la presencia o la ausencia de la misma propiedad en todos los α-cortes del objeto. Estamos reivindicando la composicionalidad de los conceptos, que la sintaxis y el contenido de un concepto complejo está normalmente determinado por la sintaxis y el contenido de sus constituyentes —*cfr.* Fodor [652]—. Las propiedades (en nuestro caso, atributos) también pueden definirse mediante perfiles descriptivos cuyos referentes sean propiedades (atributos) secundarias. Entonces, parece adecuado representar cualquier objeto mediante un subconjunto borroso de nivel 2 cuyos referentes (las propiedades) sean subconjuntos borrosos de tipo 2 del conjunto de características secundarias (el universo de discurso). Este punto de vista permite expresiones más naturales.

En cuanto a TOPSIS-0/1, decir que es necesario continuar las simulaciones computacionales, al menos con dos comprobaciones inmediatas:

- Hacer el estudio de todos los índices propuestos, pero variando el número de alternativas y el número de criterios.
- Analizar la estabilidad, robustez o sensibilidad de TOPSIS-0/1, relativa al cambio de una alternativa, que no sea la mejor, por otra peor que ella. Esto nos indicaría la proporción en la que TOPSIS-0/1 cambia su propuesta de mejor alternativa cuando se ha realizado tal operación. En definitiva, debemos analizar la estabilidad de TOPSIS-0/1 relativa a la mejor alternativa.

Diversos autores, por ejemplo Markova [1246] y Ozernoy [1247] nos recuerdan la cuestión de que preguntarnos **qué método elegir para un problema concreto de decisión multicriterio**, puede plantearse como un nuevo problema de decisión multicriterio que deberá ser abordado, a su vez, utilizando algún método de decisión multicriterio. Desconocemos si existen modelos estándares establecidos, pero, en cualquier caso, éstos debieran referirse no sólo a las cualidades teóricas y técnicas sino también a la tecnología de desarrollo software. Hobbs [1248] establece algunos criterios básicos, como adecuación y aplicabilidad al problema concreto, coste computacional, validez de los resultados o facilidad de uso —su amabilidad (*user-friendliness*).

	$\mathcal{I}$	$\overline{\mathcal{I}}$
.034	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
.069	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$
.098	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3, C_4, C_5\}$
.100	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3, C_5\}$
.114	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3, C_5\}$
.122	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3\}$
.125	$\mathcal{A}$	$\{C_1, C_3\}$
.134	$\mathcal{A}$	$\{C_3\}$
.136	$\mathcal{A}$	$\varnothing$
.146	$\mathcal{A}$	$\varnothing$
.156	$\mathcal{A}$	$\varnothing$
.159	$\mathcal{A}$	$\varnothing$
.168	$\mathcal{A}$	$\varnothing$
.171	$\mathcal{A}$	$\varnothing$
.172	$\mathcal{A}$	$\varnothing$
.174	$\mathcal{A}$	$\varnothing$
.180	$\mathcal{A}$	$\varnothing$
.182	$\mathcal{A}$	$\varnothing$
.188	$\mathcal{A}$	$\varnothing$
.200	$\{C_2, C_4, C_5\}$	$\varnothing$
.205	$\{C_2, C_4, C_5\}$	$\varnothing$
.207	$\{C_2, C_4\}$	$\varnothing$
.220	$\{C_2, C_4\}$	$\varnothing$
.241	$\{C_2, C_4\}$	$\varnothing$
.244	$\{C_2, C_4\}$	$\varnothing$
.250	$\{C_2\}$	$\varnothing$
.276	$\{C_2\}$	$\varnothing$

Tabla 10.28: *α-cortes de los perfiles del ideal y del anti-ideal, considerando criterios de igual importancia. Cfr. supuesto propuesto en la sección §10.1.8.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

	$D^{\mathrm{H}}_{\varphi,w}(A, B; \mathfrak{u}, w, d^{\mathrm{H}}_{\alpha}, \varphi)$											
	Alberto				Blanca				Daniel			
d^{H}_{α}	$\mathcal{I}$	$\overline{\mathcal{I}}$	S	O	$\mathcal{I}$	$\overline{\mathcal{I}}$	S	O	$\mathcal{I}$	$\overline{\mathcal{I}}$	S	O
δ^{sm}	.3926	.2815	.4176	5	.3426	.3315	.4918	4	.2463	.4278	.6346	2
δ^{SS1}	.6629	.5274	.4431	5	.7143	.6623	.4811	3	.4821	.6993	.5919	2
δ^{RT}	.5168	.3856	.4273	5	.4889	.4663	.4882	4	.3409	.5558	.6199	2
δ^{BUB}	.5556	.5076	.4774	5	.3803	.7009	.6483	3	.3232	.7259	.6919	2
δ^{SS4}	.8148	.5875	.4189	5	.7507	.7126	.4870	3	.5375	.8519	.6131	2
δ^{SS5}	.8148	.6208	.4324	5	.7997	.7608	.4876	3	.5568	.8519	.6047	2
δ^{tam}	.2107	.1331	.3872	5	.1412	.1427	.5026	4	.1132	.2395	.6790	2
δ^{fo}	.1819	.1483	.4492	5	.2014	.1888	.4839	3	.1331	.1882	.5859	2
δ^{di}	39.2593	28.1481	.4176	5	34.2593	33.1481	.4918	4	24.6296	42.7778	.6346	2
δ^{E}	2.4925	1.906	.4333	5	2.4821	2.3394	.4852	4	1.7155	2.6625	.6082	2
δ^{J}	.5555	.5264	.4865	5	.4256	.7278	.6310	3	.3393	.7259	.6815	2
δ^{Cz}	.4788	.4902	.5059	5	.2915	.6979	.7054	3	.2626	.6906	.7245	2
δ^{SS3}	.6332	.5651	.4716	5	.5692	.7601	.5718	3	.4200	.7616	.6446	2
δ^{MC}	.2593	.1190	.3146	3	.3886	.0981	.2017	6	.2281	.1333	.3689	2
δ^{K2}	.4259	.4669	.5229	5	.2313	.6787	.7458	2	.2252	.6593	.7454	3
δ^{OC}	.4544	.4797	.5135	5	.2623	.6892	.7243	3	.2445	.6772	.7347	2
δ^{SI}	.9648	.6860	.4155	5	.9408	.9062	.4906	2	.9468	.8741	.4800	3

Tabla 10.29: Primera parte de la tabla. En la siguiente página se comenta.
— *Fuente:* Elaboración propia.

	$D^{\mathrm{H}}_{\varphi,w}(A,B;\mathfrak{u},w,d^{\mathrm{H}}_{\alpha},\varphi)$											
	Emilia				Germán				Hilario			
d^{H}_{α}	$\mathcal{I}$	$\overline{\mathcal{I}}$	S	O	$\mathcal{I}$	$\overline{\mathcal{I}}$	S	O	$\mathcal{I}$	$\overline{\mathcal{I}}$	S	O
δ^{sm}	.4296	.2444	.3626	6	.1111	.5630	.8352	1	.3130	.3611	.5357	3
δ^{SS1}	.7635	.4634	.3777	6	.3426	.7934	.6984	1	.6711	.6218	.4809	4
δ^{RT}	.5712	.3335	.3686	6	.1797	.6728	.7892	1	.4480	.4745	.5143	3
δ^{BUB}	.5926	.4755	.4452	6	.1169	.8370	.8774	1	.4329	.6122	.5858	4
δ^{SS4}	.9630	.4566	.3216	6	.3351	.9630	.7419	1	.8056	.6472	.4455	4
δ^{SS5}	.9630	.5068	.3448	6	.3748	.9630	.7198	1	.8339	.7035	.4576	4
δ^{tam}	.2269	.1196	.3453	6	.0267	.4017	.9377	1	.1294	.1975	.6042	3
δ^{fo}	.2028	.1248	.3810	6	.0844	.1613	.6564	1	.1836	.1636	.4712	4
δ^{di}	42.9630	24.4444	.3626	6	11.1111	56.2963	.8352	1	31.2963	36.1111	.5357	3
δ^{E}	2.8092	1.6642	.3720	6	1.0552	3.1924	.7516	1	2.3081	2.3159	.5008	3
δ^{J}	.5926	.4988	.4570	6	.1553	.8370	.8435	1	.4546	.6343	.5825	4
δ^{Cz}	.5034	.4741	.4850	6	.9432	.8018	.8947	1	.3624	.6006	.6237	4
δ^{SS3}	.6876	.5245	.4327	6	.2317	.8728	.7902	1	.5591	.6713	.5456	4
δ^{MC}	.2963	.0914	.2357	5	.1553	.1333	.4619	1	.2695	.1157	.3005	4
δ^{K2}	.4444	.4531	.5048	6	.0776	.7704	.9084	1	.3199	.5764	.6430	4
δ^{OC}	.4762	.4650	.4941	6	.0861	.7883	.9015	1	.3422	.5901	.6330	4
δ^{SI}	.9648	.6846	.4150	6	.9278	.9852	.5150	1	.9550	.7977	.4551	4

Tabla 10.29: *En la columna d^H_α se listan los diferentes coeficientes de disimilitud empleados. A continuación, las disimilitudes ponderadas al ideal ($\mathcal{I}$) y al anti-ideal ($\overline{\mathcal{I}}$), la razón de similitud al ideal (S) y la ordenación de las alternativas (O). La co-monotonía de la distancia euclidea δ^E y su cuadrado δ^{E2} es trivial, de ahí que la segunda no aparezca en la tabla. La «diferencia de patrones»δ^{pat} no se lista porque no decide: en todos los casos es cero ($\mathsf{bc} = 0$). Cfr. supuesto propuesto en la sección §10.1.8.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

11

Primer ensayo: Comparación de conjuntos nítidos



«Los hombres se distinguen
por lo que muestran,
y se parecen por lo que ocultan.»
—Paul VALÉRY (1871-1946) <Misceláneas>

Como decíamos en páginas anteriores, empezando por el capítulo 5, una de nuestras metas es la definición de un marco de trabajo adecuado para comparar conjuntos borrosos, ordinarios o no. Dedicábamos el comienzo de dicho capítulo, a definir los conceptos de asignación de medida de comparación, de similitud y de disimilitud entre objetos. En este capítulo, seguimos construyendo dicho marco, extendiendo las ideas anteriores para objetos al caso de conjuntos nítidos. Estas definiciones se establecen para los conjuntos de una σ-álgebra $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, aunque las extendemos, de manera natural, a una colección cualquiera S de subconjuntos de $\mathcal{U}$. Usando una asignación básica de medida μ, en lugar de la medida discreta (el cardinal), extendemos, de manera natural, las definiciones de coeficiente de similaridad y de coeficiente de disimilaridad, que resultarán ser casos particulares de las medidas de parecido y distinción, respectivamente, que aquí también definiremos. Las definiciones anteriores pueden extenderse al caso de conjuntos borrosos, utilizando la σ-álgebra borrosa en vez de la σ-álgebra nítida. Finalizamos considerando valoraciones lingüísticas de una comparación, como es natural en nuestros actos corrientes de lenguaje, por lo que proponemos la definición de asignación básica de medida de conjuntos con valoración borrosa. En el capítulo 17, concretamente en §17.2, completamos estos conceptos, definiendo los de asignación lingüística de medida de conjuntos, cuasi-probabilidad lingüística, y probabilidad lingüística.

11.1 Asignación de comparación entre subconjuntos

Comencemos por establecer la definición de *medida* de comparación entre conjuntos. Según BOUCHON-MEUNIER, RIFQI y BOTHOREL [1249], una *medida de comparación* entre dos conjuntos A y B, en el sentido más general, debe tener en cuenta características comunes (relativas a $A \cap B$), y distintivas (relativas a los conjuntos $A - B$ y $B - A$).

Pero, al ser posible reescribir:

$$A = ((A \cap B) \cup (A - B)) - (B - A) \tag{11.1}$$
$$B = ((A \cap B) \cup (B - A)) - (A - B) \tag{11.2}$$

tal afirmación es vana.

Por nuestra parte, proponemos la siguiente definición de asignación (parcial o total) de comparación entre conjuntos, que extiende la noción de asignación (parcial o total) de comparación entre objetos —*cfr.* Def. 43—. Sea $\mathcal{U}$ un conjunto referencial o universal no vacío. Sea $P = (C, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.).

Definición 178 *Denominamos **asignación** (parcial o total) **de comparación** entre subconjuntos de $\mathcal{U}$, a cualquier función (parcial o total) $m : \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \to P$, tal que satisfaga las siguientes condiciones:*

1. $\operatorname{Ran} m$*, el recorrido o rango de la función m, es completo en el c.p.o., o sea, que posee mínimo y máximo;*

2. $(\forall A \in \mathfrak{P}(\mathcal{U}))\,(m(A, A) = \min \operatorname{Ran} m) \vee (\forall A \in \mathfrak{P}(\mathcal{U}))\,(m(A, A) = \max \operatorname{Ran} m)$.

Observación 179 *Sea $S \subseteq \mathcal{U}$. Dada una asignación básica de similitud —cfr. Def. 44— o de disimilitud —cfr. Def. 45— $h : S \times S \to \operatorname{Ran} h$, entonces:*

$$m(\{x\}, \{y\}) = h(\chi^{-1}_{\{x\}}(1), \chi^{-1}_{\{y\}}(1)) \tag{11.3}$$

es una asignación de comparación entre conjuntos unitarios, siendo $\chi^{-1}_A(1)$ la imagen recíproca[1] *de 1 por χ_A, y ésta la función característica de un conjunto dado A.*

Recíprocamente, dada una asignación de comparación, no constante —cfr. Prop. 46—, entre conjuntos unitarios $m : \mathfrak{S}(S) \times \mathfrak{S}(S) \to \operatorname{Ran} m$, entonces[2]*:*

$$h(x, y) = m(\{x\}, \{y\})$$

donde:

$$h \rightleftharpoons \frac{m(\{x\}, \{x\}) - m_1}{m_0 - m_1} d + \frac{m(\{x\}, \{x\}) - m_0}{m_1 - m_0} s$$

es, o bien una asignación básica de similitud:

$$m(\{x\}, \{x\}) = m_1$$

o bien, una asignación básica de disimilitud:

$$m(\{x\}, \{x\}) = m_0$$

Es decir, a nuestro parecer, debemos exigir que al comparar un objeto consigo mismo, el valor de la asignación de comparación sea el «máximo» o el «mínimo» permitido. Estos casos extremos corresponden, como apreciamos en el ejemplo anterior, respectivamente, a considerar únicamente las coincidencias (por ejemplo, una *similitud*) y a tener en cuenta sólo las diferencias (por ejemplo, una *disimilitud*).

11.2 Asignaciones básicas de medida de conjuntos

Según las definiciones de los coeficientes de similaridad —Def. 155— y disimilaridad —Def. 156—, y las de las funciones a, b, c y d —Ecs. 10.10-10.13—, y notando mediante γ un coeficiente, ya sea de similaridad o disimilaridad, éste está definido funcionalmente como:

$$\gamma(A, B) = g_\gamma(|A \cap B|, |A \cap \overline{B}|, |\overline{A} \cap B|, |\overline{A} \cap \overline{B}|) \tag{11.4}$$

[1] Dada una aplicación $f : A \to B$, si la **imagen recíproca** $f^{-1}(b)$ de $b \in B$, consta de un único elemento, se llamará imagen recíproca de b a dicho único elemento y no al conjunto formado por él —*cfr. v. gr.* Burgos [1250] (p. 15)— De este modo, si $\chi_{\{a\}}$ es la función característica de un conjunto unitario $\{a\}$, entonces $\chi^{-1}_{\{a\}}(1) = a$. En definitiva, una forma fácil de «quitar formalmente las llaves» a un conjunto unitario, de extraer el elemento.

[2] El poder «poner las llaves» a un objeto del universo y «transformarlo» así en un subconjunto unitario suyo, puede considerarse un axioma de la teoría de conjuntos —*cfr.* Levy [398]; Alonso, Borrego, Pérez, Ruiz [267] (p. 6); Reinhardt y Soeder [1251] (v. 1, p. 29); Mosterín [548] (pp. 191ss.)—. No obstante, como sentencia René Thom [1252] (p. 77), no es habitual la preocupación por los fundamentos, ni siquiera en el quehacer matemático habitual (a no ser, claro está, que tal quehacer incluya precisamente la investigación en los fundamentos):

> *«Todo el mundo usa la teoría de conjuntos desde el momento en que existe, igual que M. Jourdain, en Le Bourgeois Gentilhomme de Moliere, usa la prosa sin conocerla.»*

Si, como debe ser, consideramos los coeficientes de similaridad y disimilaridad, casos particulares de asignaciones de comparación entre subconjuntos —*cfr.* Def. 178—, entonces:

$$\gamma(A,A) = g_\gamma(|A|, 0, 0, |\overline{A}|) \in \{\min \operatorname{Ran} g_\gamma, \max \operatorname{Ran} g_\gamma\} \tag{11.5}$$

y como, para todo $A \neq \varnothing$, debe ocurrir:

$$\delta(A,A) < \sigma(A,A) \tag{11.6}$$

entonces:

$$g_\sigma(|A|, 0, 0, |\overline{A}|) = \max \operatorname{Ran} g_\sigma \tag{11.7}$$

$$g_\delta(|A|, 0, 0, |\overline{A}|) = \min \operatorname{Ran} g_\delta \tag{11.8}$$

El cardinal de un conjunto es una medida particular, la **medida discreta** (*«counting measure»*), también llamada *medida cardinal*, de un conjunto —*cfr.* Rudin [1253] (p. 12); Ash [1254] (p. 7).

Recordemos que una **medida**, definida sobre una σ-álgebra $\mathfrak{M}$, es —*cfr.* Rudin (p. 11); Ash [1254] (p. 6)— una función $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ numerablemente aditiva, o sea, que si $\{A_i\}$ es una colección numerable de elementos de $\mathfrak{M}$, disjuntos dos a dos, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \tag{11.9}$$

Quizás la suposición de la aditividad sea desmesurada como punto de partida. Toda medida definida sobre una σ-álgebra $\mathfrak{M}$, verifica la **propiedad de minimalidad**:

$$\mu(\varnothing) = 0 \tag{11.10}$$

y la **propiedad de monotonía**, $\forall A, B \in \mathfrak{M}$:

$$B \subseteq A \Longrightarrow \mu(B) \leq \mu(A) \tag{11.11}$$

—*cfr.* Rudin [1253] (teor. 1.5.2).

Pensando en el cardinal de conjuntos, como medida del número de elementos, la reunión de estas dos propiedades parece ser algo tan básico, o más, que la propiedad de aditividad numerable. Esta intuición elemental hace que propongamos la siguiente definición:

Definición 180 *Sea $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso y $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$. Decimos que una función $\mu : \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \to [0, +\infty]$ es una **asignación básica de medida de conjuntos** en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, precisamente si, para todo $A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U})$:*

$$\begin{array}{ll} i) & \mu(\varnothing) = 0 \\ ii) & B \subseteq A \Longrightarrow \mu(B) \leq \mu(A) \end{array}$$

Definición 181 *Sea $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso y $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$. Llamamos **asignación básica normalizada de medida de conjuntos** en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, a toda asignación básica de medida de conjuntos $\mu : \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \to \operatorname{Ran} \mu$ tal que, para todo $A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U})$,*

$$\begin{array}{ll} iii) & \operatorname{Ran} \mu \subseteq [0, 1] \\ iv) & \mu(\mathcal{U}) = 1 \end{array}$$

Observación 182 *Una atenta mirada a nuestro concepto de asignación básica de medida de conjuntos hace que observemos lo siguiente:*

1. *Toda **medida** —en el sentido clásico— es una asignación básica de medida, mas el recíproco no tiene por qué ser cierto.*

2. *Lo más parecido sintácticamente a una asignación básica de medida de conjuntos, puede ser una **medida exterior** —cfr.* Ash *[1254] (p. 16);* Ibarrola, Pardo *y* Quesada *[417] (p. 88)—. No obstante, una medida exterior se define en la potencia del universal y no en una σ-álgebra cualquiera suya. Por otro lado, y de ahí procede su nombre, una medida exterior es subaditiva numerable.*

3. *Si en vez de una σ-álgebra $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, usamos una colección genérica no vacía $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $\mathcal{U}$ —que usualmente satisfará ciertas propiedades convenientes (anillos, semianillos, σ-álgebras, etc.)—, entonces vemos una asignación básica normalizada de medida de conjuntos como un caso particular de una* ***medida borrosa***[3] *en $\mathcal{U}$ —cfr.* Sugeno *[1256];* Wang *y* Klir *[1257];* Klir *y* Yuan *[46] (pp. 177ss.).*

Ejemplo 183 *Sea $\mathcal{U}$ un conjunto de trabajadores de una empresa. Supongamos que producen los mismos productos. Sea $A \subset \mathcal{U}$ un subconjunto de trabajadores cuyo desempeño es altamente efectivo. Sea $\mu(A)$ el número de productos que produce A en una hora. La medida μ puede ser considerada como una medida de productividad. Si se normaliza μ dividiendo entre $\mu(\mathcal{U})$ se obtiene una medida borrosa —cfr.* Reche *y* Salmerón *[1255].*

Observación 184 *Quizás inspirado por el principio filosófico de la navaja de William de* Ockham*: «Lo que puede hacerse partiendo de menos [hipótesis], se hace en vano a partir de más», o quizás por nuestra observación 182.3, acerca del concepto de información parcial coherente, propuesto por Fernando* Reche *y Antonio* Salmerón *[1255] (Def. 2), puede que alguien nos acuse de exigir demasiado por requerir de la colección referente de conjuntos a medir, sea σ-álgebra. Sin embargo, a nuestro entender, si así no lo hiciésemos, sería del todo inapropiado utilizar el término «medida».*

11.3 Propuesta de extensión a $S - \mathfrak{M}(\mathcal{U})$ de una asignación básica de medida de conjuntos

En un sistema de información imperfecta puede ocurrir que no todo conjunto sea medible con la medida estándar del sistema. Una idea de cómo aproximarnos a su medida nos la proporciona la definición de *contenido de Jordan* —*cfr.* Reinhardt y Soeder [1258] (p. 357)—. Esta idea puede ser utilizada para extender de manera natural la definición de una asignación básica de medida de conjunto en una σ-álgebra $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ a otra colección S de subconjuntos de $\mathcal{U}$. Esta idea tiene sus puntos de coincidencia con la expuesta por Reche y Salmerón [1255].

La *extensión natural* es un procedimiento matemático genérico para calcular nuevas previsiones a partir de juicios iniciales —*cfr.* Walley [1259]—. En esta sección proponemos un método para inferir, de manera parecida a una extensión natural, la medida de un elemento de $S\backslash\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, a partir de la asignación básica (normalizada) de medida conocida de los elementos de la σ-álgebra $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$.

Definición 185 *Sea $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso, $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$, μ una asignación básica de medida de conjuntos en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ y $S \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{U})$. Definimos la* ***extensión natural interior*** *de μ a S como $\mu_* : S \to [0, +\infty]$, como una medida interior, y la definimos, para todo $A \in S$, como:*

$$\mu_*(A) = \chi_{(\exists B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(B \subseteq A)} \times \sup\{\mu(B) : B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \wedge B \subseteq A\} \tag{11.12}$$

Proposición 186 *Sean $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso, $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$ y μ una asignación básica normalizada de medida de conjuntos en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$. Entonces, μ_*, su extensión natural interior a $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$, es una asignación básica normalizada de medida de conjuntos en $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$ —es decir, una medida borrosa en $\mathcal{U}$ (cfr.*

[3] Recordemos que una medida borrosa se dice que es **continua desde abajo**, precisamente si ocurre que para cualquier sucesión de elementos de $\mathcal{C}$:

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

sucede que:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C} \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

que es **continua desde arriba**, precisamente si ocurre que para cualquier sucesión de elementos de $\mathcal{C}$:

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$$

sucede que:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C} \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

y que es **semicontinua**, precisamente si es continua desde abajo o desde arriba. Para las medidas borrosas en universos finitos, Fernando Reche y Antonio Salmerón proponen el nombre de **información parcial coherente** [1255] (Def. 2).

Obs. 182.3)—. Es decir, μ_* satisface las propiedades de acotación:

$$\mu_*(\varnothing) = 0 \tag{11.13}$$
$$\mu_*(\mathcal{U}) = 1 \tag{11.14}$$

y la propiedad de monotonía:

$$B \subseteq A \Rightarrow \mu_*(B) \leq \mu_*(A) \tag{11.15}$$

Demostración. En efecto, siendo $A = \varnothing$ en (11.17), entonces, $\chi_{(\exists B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(B \subseteq \varnothing)} \equiv 1$ (por ser $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$, $\varnothing \in \mathfrak{M}(\mathcal{U})$, por lo que $B = \varnothing$). Así:

$$\begin{aligned} \mu_*(\varnothing) &= \sup\{\mu(B) : B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \wedge B \subseteq \varnothing\} \\ &= \mu(\varnothing) \\ &= 0 \end{aligned}$$

por ser μ una asignación básica normalizada de medida de conjuntos en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$.

Veamos que $\mu_*(\mathcal{U}) = 1$. Siendo $A = \mathcal{U}$ en (11.17), entonces, $\chi_{(\exists B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(B \subseteq \mathcal{U})} \equiv 1$. Por otro lado, al ser $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}(\mathcal{U})$, por lo que el supremo de las medidas será la medida de $B = \mathcal{U}$, que por ser μ una asignación básica normalizada de medida de conjuntos en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, vale 1:

$$\begin{aligned} \mu_*(\mathcal{U}) &= \sup\{\mu(B) : B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \wedge B \subseteq \mathcal{U}\} \\ &= \mu(\mathcal{U}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

Definición 187 *Sea $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso, $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$, μ una asignación básica de medida de conjuntos en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ y ρ una asignación básica normalizada de medida de conjuntos en $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$ —es decir, una medida borrosa en $\mathcal{U}$ (cfr. Obs. 182.3)—. Diremos que ρ **extiende** a μ de $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ a $\mathcal{U}$, si para todo $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{U})$, $\rho(A) = \mu(A)$.*

Proposición 188 *Sean $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso, $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$, μ una asignación básica de medida de conjuntos en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, μ_* su extensión natural interior a $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$, y ρ una medida borrosa en $\mathcal{U}$, que extiende a μ. Entonces, para todo $A \in \mathfrak{P}(\mathcal{U})$:*

$$\mu_*(A) \leq \rho(A) \tag{11.16}$$

Demostración. Supongamos que $A \notin \mathfrak{M}(\mathcal{U})$ (el caso contrario es trivial, debido a que ρ extiende a μ). Si $(\forall B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(B \nsubseteq A)$, entonces, $0 = \mu_*(A) \leq \rho(A)$. Así que supongamos que $(\exists B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(B \subseteq A)$. Por extender ρ a μ, coinciden en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, por lo que $\sup\{\mu(B) : B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \wedge B \subseteq A\} = \sup\{\rho(B) : B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \wedge B \subseteq A\}$. Por ser ρ una medida borrosa en $\mathcal{U}$, $(\forall B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(\rho(B) \leq \rho(A))$. Finalmente, por la monotonía del supremo, se tiene que $(\forall A \notin \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(\mu_*(A) \leq \rho(A))$. ■

Definición 189 *Sea $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso, $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$, μ una asignación básica normalizada de medida de conjuntos en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ y $S \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{U})$. Definimos la **extensión natural exterior** de μ a S como $\mu^* : S \rightarrow [0,1]$, como una medida exterior, y se define, para todo $A \in S$, como:*

$$\mu^*(A) = \chi_{(\exists B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(A \subseteq B)} \times \inf\{\mu(B) : B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \wedge A \subseteq B\} + \chi_{(\forall B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(A \nsubseteq B)} \tag{11.17}$$

Proposición 190 *Sean $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso, $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$ y μ una asignación básica normalizada de medida de conjuntos en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$. Entonces, μ^*, su extensión natural exterior a $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$, es una medida borrosa en $\mathcal{U}$. Es decir, μ^* satisface las propiedades de acotación:*

$$\mu^*(\varnothing) = 0 \tag{11.18}$$
$$\mu^*(\mathcal{U}) = 1 \tag{11.19}$$

y la propiedad de monotonía:

$$B \subseteq A \longrightarrow \mu^*(B) \leq \mu^*(A) \tag{11.20}$$

Demostración. En efecto, siendo $A = \varnothing$ en (11.17), entonces, $\chi_{(\exists B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(\varnothing \subseteq B)} \equiv 1$ y $\chi_{(\forall B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(\varnothing \nsubseteq B)} \equiv 0$. Por otro lado, al ser $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$, $\varnothing \in \mathfrak{M}(\mathcal{U})$, y por tanto:

$$\begin{aligned} \mu^*(\varnothing) &= \inf\{\mu(B) : B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \wedge \varnothing \subseteq B\} \\ &= \mu(\varnothing) \\ &= 0 \end{aligned}$$

por ser μ una asignación básica normalizada de medida de conjuntos en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$.

Veamos que $\mu^*(\mathcal{U}) = 1$. Siendo $A = \mathcal{U}$ en (11.17), entonces, $\chi_{(\exists B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(\mathcal{U} \subseteq B)} \equiv 1$ (por ser $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}(\mathcal{U})$, por lo que $B = \mathcal{U}$), lo que también implica que $\chi_{(\forall B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(\mathcal{U} \nsubseteq B)} \equiv 0$. Así:

$$\begin{aligned} \mu^*(\mathcal{U}) &= \inf\{\mu(B) : B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \wedge \mathcal{U} \subseteq B\} \\ &= \mu(\mathcal{U}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

porque el único $B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U})$ tal que $\mathcal{U} \subseteq B$, es $B = \mathcal{U}$, y al ser μ una asignación básica normalizada de medida de conjuntos en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, se tiene finalmente que $\mu(\mathcal{U}) = 1$. ■

Proposición 191 *Sean $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso, $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$, μ una asignación básica normalizada de medida de conjuntos en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, μ^* su extensión natural exterior a $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$, y ρ una medida borrosa en $\mathcal{U}$, que extiende a μ. Entonces, para todo $A \in \mathfrak{P}(\mathcal{U})$:*

$$\rho(A) \leq \mu^*(A) \tag{11.21}$$

Demostración. Supongamos que $A \notin \mathfrak{M}(\mathcal{U})$ (el caso contrario es trivial, debido a que ρ extiende a μ). Si $(\forall B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(A \nsubseteq B)$, entonces, $\rho(A) \leq \mu^*(A) = 1$. Así que supongamos que $(\exists B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(A \subseteq B)$. Por extender ρ a μ, coinciden en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, por lo que $\inf\{\mu(B) : B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \wedge A \subseteq B\} = \sup\{\rho(B) : B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \wedge A \subseteq B\}$. Por ser ρ una medida borrosa en $\mathcal{U}$, $(\forall B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(\rho(A) \leq \rho(B))$. Finalmente, por la monotonía del supremo, se tiene que $(\forall A \notin \mathfrak{M}(\mathcal{U}))(\rho(A) \leq \mu^*(A))$. ■

Definición 192 *Sea $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso, $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$, μ una asignación básica normalizada de medida de conjuntos en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ y $S \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{U})$. Definimos la* ***extensión natural*** *de μ a S como el par (μ_*, μ^*).*

Proposición 193 *Sean $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso, $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$, μ una asignación básica normalizada de medida de conjuntos en $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, (μ_*, μ^*) su extensión natural a $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$ y $\diamondsuit$ un operador idempotente en $[0,1]$ —esto es, $(\forall x \in [0,1])(\diamondsuit(x,x) = x)$— y monótono en $[0,1]$ —esto es, $(\forall x, y, x', y' \in [0,1])(x \leq x' \wedge y \leq y' \longrightarrow \diamondsuit(x,y) \leq \diamondsuit(x',y'))$—. Sea:*

$$\rho(A) = \diamondsuit(\mu_*(A), \mu^*(A)) \tag{11.22}$$

Entonces, ρ es una medida borrosa en $\mathcal{U}$, que extiende a μ.

Demostración. Primero, veamos que ρ es una medida borrosa en $\mathcal{U}$. En efecto, por las proposiciones 186 y 190, y por ser $\diamondsuit$ idempotente en $[0,1]$:

$$\begin{aligned} \rho(\varnothing) &= \diamondsuit(\mu_*(\varnothing), \mu^*(\varnothing)) \\ &= \diamondsuit(0,0) \\ &= 0 \\ \rho(\mathcal{U}) &= \diamondsuit(\mu_*(\mathcal{U}), \mu^*(\mathcal{U})) \\ &= \diamondsuit(1,1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Las proposiciones 186 y 190, junto al hecho de ser $\diamondsuit$ monótono en $[0,1]$, implican la monotonía de ρ. Si $B \subseteq A$, entonces:

$$\mu_*(B) \leq \mu_*(A) \wedge \mu_*(B) \leq \mu_*(A)$$

de donde:

$$\begin{aligned}\rho(B) &= \diamondsuit(\mu_*(B), \mu^*(B)) \\ &\leq \diamondsuit(\mu_*(A), \mu^*(A)) \\ &= \rho(A)\end{aligned}$$

Finalmente, veamos que ρ es una extensión de μ. En efecto, para todo $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{U})$:

$$\mu_*(A) = \mu(A) = \mu^*(A)$$

de donde:

$$\begin{aligned}\rho(A) &= \diamondsuit(\mu_*(A), \mu^*(A)) \\ &= \diamondsuit(\mu(A), \mu(A)) \\ &= \mu(A)\end{aligned}$$

por ser $\diamondsuit$ idempotente en $[0, 1]$. ■

De este modo, conseguimos inferir, de manera parecida a una extensión natural, y basándonos en la idea de contenido de JORDAN, una asignación de medida borrosa de un subconjunto nítido de $\mathcal{U}$, elemento de S y no de $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, donde $S \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{U})$, a partir de la medida conocida de los elementos de la σ-álgebra $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$.

11.4 Asignaciones de similaridad y disimilaridad entre conjuntos nítidos

Si en lugar de la medida discreta (el cardinal), usamos una asignación básica de medida μ, entonces podemos extender, de manera natural, las definiciones de coeficiente de similaridad y de coeficiente de disimilaridad —*cfr.* Defs. 155 y 156—, a las de *asignación de medida de similaridad* y *asignación de medida de disimilaridad* entre conjuntos nítidos.

Definición 194 *Decimos que una función total $f : \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ es una **asignación básica de (medida de) similaridad**, precisamente si existe una asignación básica de medida de conjuntos μ en $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$, y una función total $g_f : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to \operatorname{Ran} g_f \subseteq \mathbb{R}$, tal que:*

$$\begin{aligned}&i) \quad f(A, B) = g_f(\mu(A \cap B), \mu(A \cap \overline{B}), \mu(\overline{A} \cap B), \mu(\overline{A} \cap \overline{B})) \\ &ii) \quad \forall a, d \in [0, +\infty),\ g_f(a, 0, 0, d) = \max \operatorname{Ran} g_f\end{aligned}$$

Definición 195 *Decimos que una función total $f : \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ es una **asignación (de medida) de similaridad**, precisamente si es una asignación básica de similaridad cuya función asociada g_f satisface:*

$$\begin{aligned}&iii) \quad \forall a, b \in (0, +\infty), \forall c \in [0, +\infty),\ g_f \text{ es no decreciente en } a \\ &iv) \quad \forall b \in (0, +\infty), \forall c \in [0, +\infty),\ g_f \text{ es no creciente en } b \\ &v) \quad \forall b \in (0, +\infty), \forall c \in [0, +\infty),\ g_f \text{ es no creciente en } c\end{aligned}$$

Definición 196 *Decimos que una función total $f : \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ es una **asignación básica de disimilaridad**, precisamente si existe una asignación básica de medida de conjuntos μ en $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$, y una función total $g_f : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to \operatorname{Ran} g_f \subseteq \mathbb{R}$, tal que:*

$$\begin{aligned}&i) \quad f(A, B) = g_f(\mu(A \cap B), \mu(A \cap \overline{B}), \mu(\overline{A} \cap B), \mu(\overline{A} \cap \overline{B})) \\ &ii) \quad \forall a, d \in [0, +\infty),\ g_f(a, 0, 0, d) = \min \operatorname{Ran} g_f\end{aligned}$$

Definición 197 *Decimos que una función total $f : \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ es una **asignación de disimilaridad**, precisamente si es una asignación básica de disimilaridad cuya función asociada g_f satisface:*

$$\begin{aligned}&iii) \quad \forall a \in (0, +\infty),\ g_f \text{ es no creciente en } a \\ &iv) \quad \forall b \in (0, +\infty),\ g_f \text{ es no decreciente en } b \\ &v) \quad \forall c \in [0, +\infty),\ g_f \text{ es no decreciente en } c\end{aligned}$$

Notaremos por σ cualquier asignación de similaridad y por δ las asignaciones de disimilaridad. Los coeficiente de similaridad (resp., disimilaridad) es un caso particular de asignación de medida de similaridad (resp., disimilaridad), considerando la medida discreta (el cardinal) como asignación básica de medida de conjuntos.

Observación 198 *Observemos que las condiciones de minimalidad —cfr. Def. 196 (ii):* $\delta(A,A) = \min \operatorname{Ran} g_\delta$*; y Def. 194 (ii):* $\sigma(A,A) = \max \operatorname{Ran} g_\sigma$*—, implican que:*

1. *toda asignación (básica o no) de similaridad es una* ***asignación básica de similitud*** *—cfr. Def. 44;*
2. *toda asignación (básica o no) de disimilaridad es una* ***asignación básica de disimilitud*** *—cfr. Def. 45;*
3. *los recíprocos no son ciertos.*

Observación 199 *Dada una asignación de similaridad* σ*, una regla sencilla para definir una asignación de disimilaridad basada en aquella es que el valor de la asignación de disimilaridad entre dos objetos disminuya a medida que aumente el correspondiente a la asignación de similaridad entre ambos. En particular, asociada a toda asignación de similaridad acotada entre* 0 *y* 1*, podemos considerar la asignación de disimilaridad:*

$$\delta(x,y) = 1 - \sigma(x,y) \tag{11.23}$$

Es una relación de complemento a la unidad. Algunos autores utilizan el prefijo «co-» (de complemento) para este tipo de relaciones. Así, en este caso, y por ejemplo, dada σ*, ellos dirían que* δ *es una* ***«co-similaridad»****.*

11.4.1 Redefinición a partir de la diferencia simétrica

Debido al comportamiento parejo de g_f en b y c, las definiciones de asignación de similaridad y disimilaridad pueden enunciarse, de manera equivalente, en función de la operación diferencia simétrica Δ entre conjuntos, definida por:

$$A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \tag{11.24}$$
$$= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \tag{11.25}$$

Para ello, una condición suficiente es que la asignación básica de medida de conjuntos μ en $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$, sea **existencial**[4]:

$$\forall A \in \mathfrak{P}(\mathcal{U}), \mu(A) = 0 \Longleftrightarrow A = \varnothing \tag{11.26}$$

y **finitamente aditiva**:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \tag{11.27}$$

Por ejemplo, en el caso de las asignaciones de disimilaridad, las definiciones (o caracterizaciones, como se prefiera), que proponemos, son las siguientes.

Definición 200 *Decimos que una función total* $f : \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ *es una* ***asignación básica de disimilaridad****, precisamente si existe una asignación básica existencial y finitamente aditiva de medida de conjuntos* μ *en* $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$*, y una función total* $h_f : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to \operatorname{Ran} h_f \subseteq \mathbb{R}$*, tal que:*

$$\begin{array}{rl} i) & f(A,B) = h_f(\mu(A \cap B), \mu(A\Delta B), \mu(\overline{A} \cap \overline{B})) \\ ii) & \forall u, w \in [0,+\infty),\ h_f(u,0,w) = \min \operatorname{Ran} h_f \end{array}$$

Definición 201 *Decimos que una función total* $f : \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ *es una* ***asignación de disimilaridad****, precisamente si es una medida básica de disimilaridad cuya función asociada* h_f *satisface:*

$$\begin{array}{rl} iii) & \forall u \in (0,+\infty),\ h_f \text{ es no creciente en } u \\ iv) & \forall v \in (0,+\infty),\ h_f \text{ es no decreciente en } v \end{array}$$

Ejemplo 202 *Si* μ *es una asignación básica existencial y finitamente subaditiva de medida de conjuntos (por ejemplo, la medida discreta), entonces,* $\mu \circ \Delta : \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \to [0,+\infty)$*, definida como:*

$$(\mu \circ \Delta)(A,B) = \mu(A\Delta B)$$

[4] Este nombre para esta propiedad, lo hemos tomado de Didier Dubois y Henri Prade [783] (p. 6).

es una ***métrica*** *entre conjuntos. En efecto:*

$$
\begin{array}{rl}
i) & \mu(A\Delta B)=0 \overset{\mu\ existencial}{\iff} A\Delta B=\varnothing \overset{Def.\ de\ \Delta}{\iff} A=B \\
ii) & A\Delta B \overset{Def.\ de\ \Delta}{=} B\Delta A \overset{\mu\ monótona}{\Longrightarrow} \mu(A\Delta B)=\mu(B\Delta A) \\
iii) & A\Delta C \underset{de\ conjuntos}{\overset{álgebra}{\subseteq}} (A\Delta B)\cup(B\Delta C) \overset{\mu\ monótona}{\Longrightarrow} \mu(A\Delta C)\leq\mu((A\Delta B)\cup(B\Delta C)) \\
 & \overset{\mu\ subaditiva}{\Longrightarrow} \mu(A\Delta C)\leq\mu(A\Delta B)+\mu(B\Delta C)
\end{array}
$$

Si, además, μ es finitamente superaditiva —la Def. 201 exige la aditividad finita de μ—, entonces $\mu\circ\Delta$ es asignación de disimilaridad, además de métrica; proponemos decir que es una ***asignación métrica de disimilaridad****.*

11.4.2 Concordancias y discrepancias

La *similaridad total* o **concordancia absoluta** corresponde a:

$$\sigma(A,A)=\max\operatorname{Ran}g_\sigma$$

es decir, $a+d=n$, o sea, $b+c=0$.

La *disimilaridad total* o **discrepancia absoluta** corresponde a:

$$\sigma(A,B)=\min\operatorname{Ran}g_\sigma$$

o sea, $a+d=0$, o lo que es lo mismo, $b+c=n$.

Desde una perspectiva de conjuntos:

$$\sigma(A,B)=\max\operatorname{Ran}g_\sigma,\ \text{si}\ |A\Delta B|=0 \tag{11.28}$$

es decir, precisamente si sólo hay elementos en la intersección (**concordancia positiva**) y en el complementario de la unión (**concordancia negativa**). Análogamente:

$$\sigma(A,B)=\min\operatorname{Ran}g_\sigma,\ \text{si}\ \left|\overline{A\Delta B}\right|=0 \tag{11.29}$$

esto es, si no existe ninguna coincidencia, ni positiva ni negativa.

11.4.3 Parecidos y distinciones

Definición 203 *Decimos que una asignación (básica) de similaridad σ es una* ***asignación (básica) de parecido*** *en $\mathcal{U}$, precisamente si σ es simétrica en b y c, es decir, precisamente si es tal que $g_\sigma(a,b,c,d)=g_\sigma(a,c,b,d)$.*

Decimos que una asignación (básica) de disimilaridad δ es una ***asignación (básica) de distinción*** *en $\mathcal{U}$, precisamente si δ es simétrica en b y c, es decir, precisamente si es tal que $g_\delta(a,b,c,d)=g_\delta(a,c,b,d)$.*

Ejemplo 204 *Recordemos el Análisis Jerárquico de Agrupamientos. Los* ***coeficientes de similaridad*** *utilizados en él son asignaciones de parecido. Los* ***coeficientes de disimilaridad*** *son asignaciones de distinción.*

Observación 205 *Si γ es una asignación de similaridad o disimilaridad, entonces, la simetría $g_\gamma(a,b,c,d)=g_\gamma(a,c,b,d)$ equivale a la simetría $\gamma(A,B)=\gamma(B,A)$. Por ello:*

1. *toda asignación de parecido (básica o no) es una* ***asignación de similitud*** *—cfr. Def. 48;*
2. *toda asignación de distinción (básica o no) es una* ***asignación de disimilitud*** *—cfr. Def. 49;*
3. *los recíprocos no son ciertos.*

Observación 206 *Pero nada obliga a que $\delta(A,B)=\min\operatorname{Ran}g_\delta$, implique $A=B$. Por tanto:*

1. *Una asignación básica de distinción $\delta:\mathfrak{P}(\mathcal{U})\times\mathfrak{P}(\mathcal{U})\to\mathbb{R}$, es una* ***distancia*** *(de* Birkhoff*), si $\operatorname{Ran}g_\delta=[0,+\infty]$, y si además, para todo $A,B\in\mathfrak{P}(\mathcal{U})$, $\delta(A,B)=0$ implica $A=B$.*

2. *Una asignación básica de distinción* $\delta : \mathfrak{P}(\mathcal{U})\times\mathfrak{P}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$, *es una* ***métrica****, si es distancia (de* BIRKHOFF*) y además verifica la desigualdad triangular.*

Observación 207 *De aquí en adelante, nos permitiremos abusar del lenguaje y usar* ***similaridad*** *por asignación (no básica) de similaridad,* ***disimilaridad*** *por asignación (no básica) de disimilaridad,* ***parecido*** *por asignación (no básica) de parecido y* ***distinción*** *por asignación (no básica) de distinción.*

Con la Fig. 14.3 (pág. 398) intentamos mostrar algunas de **las relaciones de inclusión entre las diferentes asignaciones de medida** que hemos propuesto en este primer ensayo y que propondremos en los siguientes.

11.5 Extensión de las asignaciones de similaridad y disimilaridad a conjuntos borrosos

Las definiciones anteriores pueden extenderse al caso de conjuntos borrosos. Dado un universo no vacío de discurso $\mathcal{U}$, la definición de σ-álgebra borrosa $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ en $\mathcal{U}$, es análoga a la de σ-álgebra, sólo que las operaciones de unión y complementariedad son entre conjuntos borrosos, siendo las dos primeras una t-norma y una t-conorma, respectivamente. En la literatura, se han establecido, al menos dos denominaciones, correspondientes a dos casos particulares de las asignaciones básicas de medidas de conjuntos:

- Las *medidas de conjuntos borrosos —cfr.* BOUCHON-MEUNIER, RIFQI y BOTHOREL [1249]; RICK, BOTHOREL, BOUCHON-MEUNIER, MULLER y RIFQI [1260] (p. 320)—, son un caso particular de nuestras asignaciones básicas de medida de conjuntos. Estas «medidas» se definen en un subconjunto $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$, y se valoran en $\mathbb{R}^+$. Pueden, por tanto, definirse en $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$, la mayor de las σ-álgebras borrosas, en vez de en una σ-álgebra borrosa genérica $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$. En todo caso, preferimos utilizar el nombre de «asignación básica de medida», y evitar así la posible confusión, sobre todo para conjuntos nítidos, con la definición de medida en una σ-álgebra, que supone aditividad (11.9).
- Los *evaluadores escalares de conjuntos borrosos* («*scalar fuzzy set evaluators*») de Didier DUBOIS y Henri PRADE [783] (p. 6), son un caso particular de nuestras asignaciones básicas normalizadas de medida de conjuntos. Tales «evaluadores» se definen en $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$ (la mayor de las σ-álgebras borrosas), en vez de en una σ-álgebra genérica $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, y se valoran en $[0,1]$. Verifican además que la valoración del universal es 1.

Observemos que la comparación entre dos conjuntos la hemos hecho en base a una partición del espacio basada en ambos conjuntos: $\Pi = \{A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}\}$. En vez de esta partición, podríamos coger «sintácticamente», otra cualquiera. El problema es semántico, la partición Π es fácilmente interpretable.

La extensión de las asignaciones de similaridad y disimilaridad de $\mathfrak{P}(\mathcal{U})\times\mathfrak{P}(\mathcal{U})$ a $\mathfrak{F}(\mathcal{U})\times\mathfrak{F}(\mathcal{U})$, exige además, la existencia de una medida μ de conjuntos borrosos (en el sentido de BOUCHON-MEUNIER *et alii*, *cfr. supra*), esto es, de una asignación básica de medida de conjuntos.

Una segunda posibilidad es hacer la extensión de las asignaciones de similaridad y disimilaridad a partir de la definición de diferencia simétrica —Def. 11.24—, es decir, extender las definiciones (200) y (201). En este caso, la diferencia simétrica resultante, una vez introducida la borrosidad, además de depender de la t-norma y de la t-conorma usadas, es *imprecisa*. Si, por ejemplo, usamos la t-norma min y la t-conorma max, se mantiene la igualdad (11.24):

$$(A\widetilde{\Delta}B)(x) = \max\{\min\{1 - A(x), B(x)\}, \min\{A(x), 1 - B(x)\}\} \tag{11.30}$$

$$= \min\{\max\{A(x), B(x)\}, \max\{1 - A(x), 1 - B(x)\}\} \tag{11.31}$$

Sin embargo, si se usan la t-norma $\max\{0, x + y - 1\}$ y la t-conorma $\min\{1, x + y\}$, entonces:

$$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \rightsquigarrow (A\widetilde{\Delta}^- B)(x) = |A(x) - B(x)| \tag{11.32}$$

$$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \rightsquigarrow (A\widetilde{\Delta}^+ B)(x) = \min\{A(x) + B(x), 2 - A(x) - B(x)\} \tag{11.33}$$

y, en general, para cada pareja (t-norma, t-conorma) se obtienen otras expresiones. Los conjuntos borrosos $A\widetilde{\Delta}^- B$ y $A\widetilde{\Delta}^+ B$ acotan al conjunto borroso diferencia simétrica que buscamos, es decir, lo que vamos a obtener en general es que $A\widetilde{\Delta}B$ está acotada entre dos conjuntos borrosos diferencia simétrica, uno inferior y otro superior, o sea, para todo $x \in \mathcal{U}$ se satisface:

$$(A\widetilde{\Delta}^- B)(x) \leq (A\widetilde{\Delta}B)(x) \leq (A\widetilde{\Delta}^+ B)(x) \tag{11.34}$$

11.6 Asignaciones valoradas borrosamente

Hasta ahora la valoración de las medidas que hemos propuesto ha sido nítida, esto es, ha venido dada por números reales. Opcionalmente, podemos usar números borrosos. Así, en vez de $[0,+\infty]$ podríamos utilizar $\mathfrak{N}(\mathbb{R}_0^+)$, el conjunto de todos los números borrosos no negativos, entendiendo por estos últimos aquéllos cuyo valor modal es mayor o igual a cero.

Por ejemplo, en el caso de la asignación básica de medida de conjuntos tendremos:

Definición 208 *Sea $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso y $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$. Decimos que una función $\mu : \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \to \mathfrak{N}(\mathbb{R}_0^+)$ es una **asignación básica de medida de conjuntos con valoración borrosa** («fuzzy-valued basic set measure assignment» sería una expresión posible en inglés), precisamente si:*

$$\begin{array}{rl} i) & \mu(\varnothing) = \widetilde{0} \\ ii) & (\forall A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))\,(B \subseteq A \Longrightarrow \mu(B) \preccurlyeq \mu(A)) \end{array}$$

donde $\preccurlyeq$ es un orden definido en $\mathfrak{N}(\mathbb{R}_0^+)$.

Definición 209 *Sea $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso y $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$. Llamamos **asignación básica normalizada de medida de conjuntos con valoración borrosa**, a toda asignación básica de medida de conjuntos $\mu : \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \to \operatorname{Ran}\mu$ tal que:*

$$\begin{array}{rl} iii) & \operatorname{Ran}\mu \subseteq \mathfrak{N}([0,1]) \\ iv) & \mu(\mathcal{U}) = \widetilde{1} \end{array}$$

Definición 210 *Decimos que una asignación básica normalizada de medida de conjuntos con valoración borrosa, $\mu : \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \to \mathfrak{N}([0,1])$ es **subaditiva**, precisamente si:*

$$(\forall A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))\,(A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \mu(A \cup B) \subseteq \mu(A) \oplus \mu(B)) \tag{11.35}$$

***aditiva**, precisamente si:*

$$(\forall A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))\,(A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) \oplus \mu(B)) \tag{11.36}$$

*y **superaditiva**, precisamente si:*

$$(\forall A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))\,(A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \mu(A) \oplus \mu(B) \subseteq \mu(A \cup B)) \tag{11.37}$$

*siendo $\subseteq$ una relación de inclusión entre ubconjuntos borrosos —cfr. Obs. 41—, y $\oplus$ la operación suma entre números borrosos —cfr. Ec. 4.31—. A estas definiciones les añadimos los calificativos de finitud o de numerabilidad según se trate de una colección finita (más de dos) o numerable de elementos de $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$. Así se dirá, por ejemplo, **numerablemente subaditiva** (o σ-subaditiva) precisamente si:*

$$\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{U}) : \left((\forall i,j \in \mathbb{N})(A_i \cap A_{j(\neq i)} \neq \varnothing) \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \subseteq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \right) \tag{11.38}$$

Proposición 211 *Sea $\mu : \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \to \mathfrak{N}([0,1])$ una asignación básica normalizada de medida de conjuntos con valoración borrosa, entonces, si μ es subaditiva:*

$$\widetilde{1} \subseteq \mu(A) \oplus \mu(A^c) \tag{11.39}$$

si μ es aditiva:

$$\widetilde{1} = \mu(A) \oplus \mu(A^c) \tag{11.40}$$

mientras que si μ es superaditiva:

$$\mu(A) \oplus \mu(A^c) \subseteq \widetilde{1} \tag{11.41}$$

Obsérvese que, debido a la asociatividad de la suma de números borrosos, ser subaditiva (resp., aditiva) implica ser finitamente y numerablemente subaditiva (resp., aditiva). En §17.2, definimos los conceptos de *asignación lingüística de medida de conjuntos*, de *cuasi-probabilidad lingüística*, y de *probabilidad lingüística*, y explicamos por qué la subaditividad y la aditividad —y no la superaditividad— son de interés para nosotros.

11.7 Resumen

Como decíamos en capítulos anteriores, empezando por el capítulo 5, una de nuestras metas es la definición de un marco de trabajo adecuado para comparar conjuntos borrosos, ordinarios o no. Dedicábamos el comienzo de dicho capítulo, a definir los conceptos de asignación de medida de comparación, de similitud y de disimilitud entre objetos. En este capítulo, seguimos construyendo dicho marco, extendiendo las ideas anteriores para objetos al caso de conjuntos nítidos. En §11.1, proponemos la definición de **asignación (parcial o total) de comparación entre conjuntos**, que extiende la noción de asignación (parcial o total) de comparación entre objetos —*cfr.* Def. 43—. En §11.2, proponemos la definición de **asignación básica de medida de conjuntos**, basándola únicamente en la propiedad de *minimalidad* y en la de *monotonía*. Estas definiciones se establecen para los conjuntos de una σ-álgebra $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$. Observamos, entre otras cosas, que si $\mathfrak{M}(\mathcal{U}) = \mathfrak{P}(\mathcal{U})$, entonces una asignación básica normalizada de medida de conjuntos, no es más que una **medida borrosa** en $\mathcal{U}$.

En §11.3 extendemos, de manera natural, la definición de una asignación básica de medida de conjunto en una σ-álgebra $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ a una colección S de subconjuntos de $\mathcal{U}$, basándonos en la noción de contenido de JORDAN, de manera que podemos inferir la medida de un elemento de $S\backslash\mathfrak{M}(\mathcal{U})$, a partir de la asignación básica (normalizada) de medida conocida de los elementos de la σ-álgebra $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$.

En §11.4, usando una asignación básica de medida μ, en lugar de la medida discreta (el cardinal), extendemos, de manera natural, las definiciones de coeficiente de similaridad y de coeficiente de disimilaridad —*cfr.* Defs. 155 y 156—, proponiendo las de **asignación de medida de similaridad** y **asignación de medida de disimilaridad entre conjuntos nítidos**. En §11.4.1, redefinimos los conceptos de asignación de similaridad y de disimilaridad, de manera equivalente, en función de la operación *diferencia simétrica* entre conjuntos, y los relacionamos con las nociones de similitud y disimilitud. Además, definimos lo que entendemos por **asignación métrica de disimilaridad**. A continuación, definimos los conceptos de **concordancia** y **discrepancia absoluta**, **positivas** o **negativas** —*cfr.* §11.4.2—. En §11.4.3 definimos **asignación (básica o no) de parecido** y **asignación (básica o no) de distinción**, relacionándolos con las nociones de similitud y disimilitud. Los coeficientes de similaridad y de disimilaridad —*cfr. supra* §10.2.2— son casos particulares de las medidas de parecido y distinción, respectivamente, que aquí definimos.

Las definiciones anteriores pueden **extenderse al caso de conjuntos borrosos**. Ésto lo hacemos en §11.5, utilizando la σ-álgebra borrosa en vez de la σ-álgebra nítida. Las *medidas de conjuntos borrosos* y los *evaluadores escalares* de conjuntos borrosos, nociones asentadas en la literatura, son un caso particular de asignación básica de medida de conjuntos.y de asignación básica normalizada de medida de conjuntos, respectivamente. En cualquier caso, esta extensión requiere la existencia de una medida de conjuntos borrosos, como asignación básica a partir de la que poder definir la similaridad o la disimilaridad. Una posible forma de evitar esto último, es hacer la extensión de las asignaciones de similaridad y disimilaridad a partir de la definición de diferencia simétrica —*cfr.* Def. 11.24—, es decir, extender las definiciones (200) y (201). En este caso, la diferencia simétrica resultante, una vez introducida la borrosidad, además de depender de la t-norma y de la t-conorma usadas, es *imprecisa*.

Finalmente, pensamos en la posibilidad de valorar lingüísticamente la comparación, por ejemplo con números borrosos, por lo que proponemos, en §11.6, la definición de **asignación básica de medida de conjuntos con valoración borrosa**. En §17.2, completamos estos conceptos, definiendo los de **asignación lingüística de medida de conjuntos**, **cuasi-probabilidad lingüística**, y **probabilidad lingüística**.

12

Segundo ensayo: ¿Cuál es la más cercana? ¿Y la más lejana?



«El verdadero progreso democrático
no consiste en rebajar la élite al nivel de la plebe,
sino en elevar la plebe a la élite.»
—Gustave Le Bon (1841-1931) <Ayer y mañana>

En este capítulo, introducimos el concepto de relación de cercanía desde un punto de vista intuitivo: si algo es cercano a nosotros dos, es que es cercano a tí o a mí, y recíprocamente, si algo es cercano a tí o a mí, es cercano a nosotros dos (si lo es a mí, lo es a tí, a través de mí). De manera similarmente intuitiva, introducimos la noción de relación de lejanía: si algo está lejos de nosotros dos, es que está lejos de tí y de mí, recíprocamente, si algo está lejos de tí y de mí, entonces, está lejos de nosotros dos.
Una relación de cercanía no tiene que ser simétrica. Por ejemplo, una relación de cercanía entre diferentes puntos de una ciudad, bajo el supuesto de que todos los desplazamientos se hacen en coche, cumpliendo el código de circulación. En este caso, el hecho de que un punto A esté cercano a un segundo punto B, no implica el recíproco: basta con imaginar que A y B sean los puntos extremos de una calle de una sola dirección, y que ir (en coche) desde B hasta A, suponga dar un rodeo considerablemente largo.
Extendemos estas relaciones a conectivas distintas a la disyunción y la conjunción y, en §12.2, a relaciones entre subconjuntos completos de un retículo, definiendo la cercanía sup-inf entre dos de ellos, como el agregado (según la conectiva elegida) entre las cercanías entre los extremos. Para conseguir gradaciones intermedias en la valoración de verdad de «ser cercano a», introducimos, en §12.3, la noción de cercanía borrosa, y demostramos que podemos interpretar el grado de pertenencia como un grado de cercanía.
Prestando, en todo momento, una atención particular a los problemas de categorización de prototipos y de clasificación de ejemplares, en §12.10, proponemos indicadores de cercanía y lejanía para intervalos α-percentilados; en §12.11, extendemos estos indicadores a intervalos de tipo 2; y en §12.12, los extendemos a subconjuntos Φ-borrosos, considerando dos aproximaciones: una basada en secciones verticales, y la otra basada en α-cortes.

12.1 Relaciones de cercanías y lejanías entre subconjuntos nítidos

Sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso no vacío. Denote $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$ el conjunto potencia de $\mathcal{U}$ y $\mathfrak{S}(\mathcal{U})$ la clase de todos los conjuntos unitarios de $\mathcal{U}$. En esta sección definimos los relaciones de cercanía entre subconjuntos de $\mathcal{U}$.

Definición 212 *Sean $\mathcal{S}$ un subconjunto de $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$, $R : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \{0,1\}$ una relación binaria definida en $\mathcal{S}$, y $A, B, C \in \mathcal{S}$. Decimos que la relación R es:*

i) ***reflexiva elemental*** *en $\mathcal{S}$, precisamente si $R(A,A) \Longleftrightarrow A \neq \varnothing$;*

ii) ***irreflexiva elemental*** *en $\mathcal{S}$, precisamente si $R(A,A) \Longleftrightarrow A = \varnothing$;*

iii) ***simétrica*** *en $\mathcal{S}$, precisamente si $R(B,A) = R(A,B)$;*

iv) ***aditiva*** *en $\mathcal{S}$, con respecto a la conectiva lógica $\diamond$ precisamente si $R(B \cup C, A) \Longleftrightarrow R(B,A) \diamond R(C,A)$;*

v) ***subaditiva*** *en $\mathcal{S}$ (resp.,* ***superaditiva*** *en $\mathcal{S}$) con respecto a la conectiva lógica $\diamond$, precisamente si $R(B \cup C, A) \Longrightarrow R(B,A) \diamond R(C,A)$ (resp., $\Longleftarrow$).*

Definición 213 *Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto de $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$. Llamamos* ***cercanía*** *en $\mathcal{S}$ a cualquier relación binaria $\nu : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \{0,1\}$, tal que sea reflexiva elemental y aditiva en $\mathcal{S}$ con respecto a $\vee$ (disyunción bivalente), o sea, precisamente si[1]:*

i) $\nu(A,A) \Longleftrightarrow A \neq \varnothing$

ii) $\nu(B \cup C, A) \Longleftrightarrow \nu(B,A) \vee \nu(C,A)$

para todo $A, B, C \in \mathcal{S}$. Si ν es subaditiva (resp., superaditiva) diremos que ν es una ***cercanía subaditiva*** *(resp., superaditiva) en $\mathcal{S}$.*

Ejemplo 214 *Pensemos en dos agentes B y C que tengan que describir la coincidencia que existe entre ellos mediante un conjunto de valores asignados a ciertos atributos. La descripción que haga B (intersección de B hacia C) no tiene por qué coincidir con la que haga C (intersección de C hacia B). Ciertos atributos aparecerán en una descripción y no en otra. Esta relación es reflexiva, debido a la descripción que hace cualquier agente A de la coincidencia consigo (independientemente de que el conocimiento de sí mismo sea o no completo, seguro que será el mismo en el mismo instante de tiempo —la introducción de los dos argumentos A y A en la evaluación de la cercanía ν es simultánea—). Es aditiva, pues si a los agentes B y C originales, añadimos un un tercer agente A, entonces si piensa que coincide por ejemplo con B, posiblemente pensará que alguna de las características coincidentes con B esté también presente en el equipo $\{B, C\}$. Recíprocamente, si encuentra características comunes con el equipo $\{B, C\}$, entonces seguro que compartirá alguna con alguno de ellos. El universo de discurso $\mathcal{U}$ es un conjunto de características; $A, B, C \in \mathfrak{P}(\mathcal{U})$ son subconjuntos de características.*

Definición 215 *Dado un subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$ y una cercanía ν en $\mathcal{S}$, llamamos* ***espacio de cercanía*** *al par $(\mathcal{S}, \nu)$. Si ν es una cercanía subaditiva (resp., superaditiva) en $\mathcal{S}$, diremos que $(\mathcal{S}, \nu)$ es un espacio de cercanía subaditiva (resp., superaditiva).*

Observación 216 *Una relación de cercanía no tiene que ser* ***simétrica****, esto es, no tiene por qué verificar la propiedad (212.iii): $\nu(A,B) \Longleftrightarrow \nu(B,A)$. Por ejemplo, una relación de cercanía entre diferentes puntos de una ciudad, bajo el supuesto de que todos los desplazamientos se hacen en coche, cumpliendo el código de circulación. En este caso, el hecho de que un punto A esté cercano a un segundo punto B, no implica el recíproco: basta con imaginar que A y B sean los puntos extremos de una calle de una sola dirección, y que ir (en coche) desde B hasta A, suponga dar un rodeo considerablemente largo.*

Observación 217 *La única diferencia con una* ***relación de proximidad****, un concepto anterior bien establecido, es que esta última es simétrica[2]. Observemos que la aditividad (213.ii) está «orientada»: la cercanía*

[1] Acerca de esta definición, consideremos la opinión de August De Morgan (1806-1871), quien pensaba que la relación «de», es en ciertos aspectos, como la operación $\times$ en Aritmética o Álgebra. Por ejemplo, la ley numérica $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ es una *tautología relacional* si $\times, +, =$ se traducen por «de», «o» y $\equiv$, respectivamente. De este modo, el significado de la ley de aditividad de las cercanías —*cfr.* Def. 213.*ii*)— queda:

A está cerca *de* (B *o* C) precisamente si (A está cerca *de* B) *o* (A está cerca *de* C).

La **Lógica de Relativos** de Charles Sanders Peirce (1839-1914) subsume este hecho. La notación para expresar «B *de* A» que él usaba era $(A : B)$. La notación que nosotros adoptamos conserva la esencia de esta «orientación».

[2] La noción de **espacio de proximidad** se debe a Efremovič [1261], aunque claros precedentes son los pensamientos de T. De Laguna [1262] (1922) y Alfred North Whitehead [1263] (1929). Una muy buena referencia sobre espacios de proximidad es el libro de S.A. Naimpally and B.D. Warrak [1264].

*es desde A a $B \cup C$. Observemos, que no se hace ninguna suposición sobre inclusión conjuntista. Es posible pensar en situaciones en las que dado A, la conjunción de los hechos de que $B \subset C$ y no $\nu(C, A)$ no implica que $\nu(B, A)$ (aunque $A \subset C^c$). Tampoco se afirma nada sobre **distancias** o conceptos similares, ni sobre **subsunción** entre conceptos. Dada una **ontología** concreta, dos conceptos pueden ser considerados lejanos según una distancia particular definida en un espacio representacional, pero cercanos de acuerdo a una cierta relación de cercanía.*

Observación 218 *En cierta manera, podríamos ver una **relación superaditiva como una cercanía inferior**, de manera similar a como la **medida de creencia** (belief) de* DEMPSTER-SHAFER *—cfr.* SHAFER *[1265];* GUAN *y* BELL *[1266, 1267]— es una **probabilidad inferior** —cfr.* DEMPSTER *[1268]—, de un conjunto de medidas de probabilidad. Un ejemplo de «cercanía superaditiva» es la inclusión conjuntista. Así, podríamos escribir:*

$$A \subseteq B \leq \nu(A, B)$$

*y decir que «es posible que A esté cerca de B (por ejemplo, si A interseca a B) aunque A no sea un subconjunto de B.» Análogamente podríamos ver una **relación subaditiva como una cercanía superior**.*

Ejemplo 219 *Dado un universo de discurso no vacío $\mathcal{U}$, entonces:*

i) la intersección $\cap$, interpretada como la relación bivalente «tener intersección», es simétrica y aditiva en $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$, respecto de $\vee$;

ii) la inclusión $\subseteq$ es superaditiva en $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$, respecto de $\vee$.

En este contexto, cobra de nuevo sentido lo trivial:

«aunque B no sea un subconjunto de A, B puede intersecar a A»,

o sea, que en un sentido aditivo, la intersección conjuntista $\cap$ es una cota superior de la inclusión conjuntista $\subseteq$. Esto es parecido a cuando decimos que una medida de creencia puede ser interpretada como una probabilidad inferior que caracteriza un conjunto de medidas de probabilidad.

Definición 220 *Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto de $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$. Llamamos **lejanía** en $\mathcal{S}$ a cualquier relación binaria $\varphi : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \{0, 1\}$, que sea irreflexiva elemental y aditiva en $\mathcal{S}$ con respecto a $\wedge$ (conjunción bivalente clásica), esto es, precisamente si[3]:*

i) $\varphi(A, A) \Longleftrightarrow A = \varnothing$, y

ii) $\varphi(B \cup C, A) \Longleftrightarrow \varphi(B, A) \wedge \varphi(C, A)$.

*para cualesquiera $A, B, C \in \mathcal{S}$. Si φ es subaditiva (resp., superaditiva) diremos que φ es una **lejanía subaditiva** (resp., superaditiva) en $\mathcal{S}$.*

Definición 221 *Dado un subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$ y una lejanía φ en $\mathcal{S}$, llamamos **espacio de lejanía** al par $(\mathcal{S}, \varphi)$. Si φ es una lejanía subaditiva (resp., superaditiva) en $\mathcal{S}$, diremos que $(\mathcal{S}, \varphi)$ es un espacio de lejanía subaditiva (resp., superaditiva).*

Observación 222 *Dados un subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$ y una cercanía ν definida en $\mathcal{S}$, entonces $\neg\nu$ (negación de ν) es una lejanía en $\mathcal{S}$. Además, si ν es subaditiva en $\mathcal{S}$ (resp., superaditiva en $\mathcal{S}$), $\neg\nu$ es superaditiva en $\mathcal{S}$ (resp., subaditiva en $\mathcal{S}$). Debido a esto, bastará estudias las relaciones de cercanía.*

Ciertas generalizaciones de las relaciones de proximidad, se obtienen a partir de cercanías que son simétricas y satisfacen ciertos axiomas complementarios —*cfr.* POLIAKOV [1269]—, por ejemplo, la **proximidad de Hausdorff**:

$$\nu(\{x\}, \{y\}) \Longleftrightarrow x = y \tag{12.1}$$

[3]En consonancia con la nota anterior, obsérvese que ley de aditividad de las lejanías queda:

A está lejos *de* (B *o* C) precisamente si (A está lejos *de* B) *y* (A está lejos *de* C).

(y además, en lugar de la reflexividad, basta aceptar su corolario $\neg\nu(\varnothing,\varnothing)$), o la **proximidad normal**:

$$\neg\nu(A,B) \Longrightarrow \exists V,W \in \mathfrak{P}(\mathcal{U}), \neg\nu(A,\mathcal{U}\backslash V) \wedge \neg\nu(B\mathcal{U}\backslash W)$$

Definiendo una estructura topológica a partir de la estructura de proximidad:

$$x \in \operatorname{adh} K \Longleftrightarrow \nu(\{x\},K) \tag{12.2}$$

puede sustituirse el axioma de normalidad por otros más débiles, por ejemplo, la **proximidad de Lodato**:

$$\neg\nu(A,B) \Longrightarrow \neg\nu(A,\operatorname{adh} B) \tag{12.3}$$

o la **proximidad de** Vitaly V. **Fedorchuk** (*θ-proximidad*): si $\mathfrak{O}(\mathcal{U})$ son los abiertos de $\mathcal{U}$ en la topología anterior, entonces:

$$\neg\nu(A,B) \Longleftrightarrow \exists O \in \mathfrak{O}(\mathcal{U}), \operatorname{int}\operatorname{adh} O = A \wedge \neg\nu(A,\mathcal{U}\backslash \operatorname{adh} O) \tag{12.4}$$

Ejemplo 223 *Obsérvese que toda disimilitud d definida en un conjunto $\mathcal{U} \neq \varnothing$, podría extenderse a $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$; clásicamente se considera:*

$$d(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x,y) \tag{12.5}$$

que como es bien sabido, no verifica (5.12). A partir de ella puede generarse una relación de cercanía, con la propiedad de Hausdorff*, entre subconjuntos de $\mathcal{U}$, a saber, para todo $A,B \in \mathfrak{P}(\mathcal{U})$:*

$$\nu_d(A,B) \Longleftrightarrow d(A,B) = 0 \tag{12.6}$$

Considerando un umbral $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, podemos definir alternativamente:

$$\nu_{d,\varepsilon}(A,B) \Longleftrightarrow d(A,B) < \varepsilon \tag{12.7}$$

Así, por ejemplo, podríamos definir una ***relación de cercanía entre intervalos de números reales****, como extensión de una relación de cercanía entre números reales. Esto es, para todo $I,J \in \mathbb{IR}$, y cualquier $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$:*

$$\nu_{d,\varepsilon}(I,J) \Longleftrightarrow \inf_{x\in I, y\in J} d(x,y) < \varepsilon \tag{12.8}$$

12.2 Cercanía y lejanía «sup-inf» entre subconjuntos completos de un retículo

Sea $(L,\preceq)$ un retículo y $\mathfrak{C}(L)$ la colección de todos sus subconjuntos completos. Dado $A \in \mathfrak{C}(L)$, considerando que puede ser interpretado como un prototipo, nos interesa conocer el significado de «estar cerca de A», para cualquier otro subconjunto $B \in \mathfrak{C}(L)$. Podríamos pensar de la siguiente manera:

$$B \text{ está cerca de } A \Longleftrightarrow (b_0 \text{ está cerca de } a_0) \diamond (b_1 \text{ está cerca de } a_1)$$

donde $\diamond$ es una conectiva lógica.

Obsérvese que si $\diamond$ es la conjunción, se daría mayor importancia a la lejanía (puesto que $0 \wedge \cdot = 0$), mientras que la disyunción destaca la cercanía ($1 \vee \cdot = 1$).

Definición 224 *Sea $\nu : \mathfrak{S}(L) \times \mathfrak{S}(L) \to \{0,1\}$ una relación reflexiva elemental y $\diamond$ una conectiva lógica bivalente. Llamamos* ***cercanía sup-inf*** *en $\mathfrak{C}(L)$ a cualquier relación $\nu^\diamond : \mathfrak{C}(L) \times \mathfrak{C}(L) \to \{0,1\}$ definida a partir de ν mediante:*

$$\nu^\diamond(A,B) = \nu(\{a_0\},\{b_0\}) \diamond \nu(\{a_1\},\{b_1\}) \tag{12.9}$$

Observación 225 *Notemos que:*

i) si $0 \diamond 0 = 0$, entonces $\nu^\diamond$ es una relación reflexiva elemental en $\mathfrak{C}(L)$, o sea, para todo $A \in \mathfrak{C}(L)$, $\nu^\diamond(A,A)$;

ii) si $\diamond$ es $\wedge$ o $\vee$, entonces $\nu^\diamond$ es simétrica, es decir, $\nu^\diamond(A,B) = \nu^\diamond(B,A)$;

iii) $\nu^\diamond$ *es subaditiva*[4] *con respecto a* $\diamond = \vee$*, y superaditiva con respecto a* $\diamond = \wedge$*.*

De estas observaciones deducimos el siguiente resultado:

Corollary 226 *La cercanía sup-inf* $\nu^\vee$ *(resp.,* $\nu^\wedge$*) es una cercanía simétrica y subaditiva (resp., superaditiva) en* $\mathfrak{C}(L)$*.*

Un primer inconveniente de $\nu^\diamond$, es que si $(L\ ,\preceq)$ es un retículo completo, entonces el subconjunto $A = \{a_1, a_2\} \subseteq L$, está cerca de todo subconjunto $B = \{x : a_1 \preceq x \preceq a_2\} \subseteq L$, independientemente del cardinal de B. Por ejemplo, para números reales, tanto el conjunto finito $\{0, 1\}$ como el intervalo abierto $]0, 1[$ están cerca del intervalo cerrado $[0, 1]$. Sin embargo, la cercanía desde el intervalo cerrado $[\varepsilon, 1]$ a $[0, 1]$, con $\varepsilon \in]0, 1[$, depende tanto de la cercanía desde ε a 0, como de la conectiva lógica $\diamond$ utilizada.

Observación 227 *Si en la definición (12.9) usamos:*

$$\nu_{d,\varepsilon}(\{x\}, \{y\}) \Longleftrightarrow d(\{x\}, \{y\}) < \varepsilon \tag{12.10}$$

en vez de $\nu(\{x\}, \{y\})$*, entonces, siendo* d *una disimilitud y* $\nu_{d,\varepsilon}$ *una relación de cercanía en* $\mathfrak{S}(L)$*, la relación* $\nu^\diamond_{d,\varepsilon} : \mathfrak{C}(L) \times \mathfrak{C}(L) \to \{0, 1\}$ *es la que llamaremos* ***ε-cercanía sup-inf*** *—suponiendo que* $d(\{x, z\}, \{y\}) = \inf\{d(\{x\}, \{y\}), d(\{z\}, \{y\})\}$*—. Esta relación* $\nu^\diamond_{d,\varepsilon}$ *verifica lo advertido en la observación (225) para* $\nu^\diamond$*.*

Observación 228 *Consideremos la siguiente propiedad que podríamos denominar de* ***«aditividad interior»****:*

$$\nu(B \cup C, A) \Longleftrightarrow \exists D \subseteq A, \nu(B, D) \vee \nu(C, A \backslash D)$$

y las correspondientes propiedades de ***subaditividad interior*** *(*$\Longrightarrow$*) y* ***superaditividad interior*** *(*$\Longleftarrow$*). La subaditividad implica la subaditividad interior, así por ejemplo, la inclusión conjuntista es subaditiva interiormente. Tenemos el siguiente resultado: Si en (12.9) consideramos que* ν *es aditiva interiormente, entonces* $\nu^\diamond$ *es una relación de cercanía subaditiva interiormente. A partir de este punto, emplearemos el término relación de cercanía para referirnos indistintamente a una relación de cercanía aditiva o aditiva interiormente.*

12.3 Cercanías borrosas

Otro inconveniente significativo de la cercanía sup-inf $\nu^\diamond$ es que no permite representar **gradaciones intermedias** en la valoración de verdad de «ser cercano a», esto es, según ella, un conjunto es cercano a otro o no lo es (dos grados de cercanía posibles, representados, por ejemplo, por 0 y 1). Para permitir tal gradación, introducimos borrosidad en la cercanía sup-inf $\nu^\diamond$.

Definición 229 *Sean* $\mathcal{S}$ *un subconjunto de* $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$*,* $\widetilde{R} : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to [0, 1]$ *una relación borrosa —cfr. supra Def. 14— definida en* $\mathcal{S}$*, y* $A, B, C \in \mathcal{S}$*. Las extensiones al caso borroso de las propiedades definidas en la Def. 212 son las siguientes. Decimos que la relación* $\widetilde{R}$ *es* ***reflexiva elemental*** *en* $\mathcal{S}$ *precisamente si* $\widetilde{R}(A, A) = 1 \Longleftrightarrow A = \varnothing$*,* ***irreflexiva elemental*** *en* $\mathcal{S}$ *precisamente si* $\widetilde{R}(A, A) = 0 \Longleftrightarrow A \neq \varnothing$ *y* ***simétrica*** *en* $\mathcal{S}$ *precisamente si* $\widetilde{R}(B, A) = \widetilde{R}(A, B)$*. Sea* $\mathcal{T}$ *una t-conorma, se dice que* $\widetilde{R}$ *es* ***aditiva*** *en* $\mathcal{S}$ *con respecto a la t-conorma* $\mathcal{T}$ *precisamente si* $\widetilde{R}(B \cup C, A) = \mathcal{T}(\widetilde{R}(B, A), \widetilde{R}(C, A))$*,* ***subaditiva*** *en* $\mathcal{S}$ *(resp.,* ***superaditiva*** *en* $\mathcal{S}$*) con respecto a la t-conorma* $\mathcal{T}$ *precisamente si* $\widetilde{R}(B \cup C, A) \leq \mathcal{T}(\widetilde{R}(B, A), \widetilde{R}(C, A))$ *(resp.,* $\geq$*).*

Definición 230 *Sea* $\mathcal{S}$ *un subconjunto de* $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$ *y* $\mathcal{T}$ *una t-conorma. Llamamos* ***cercanía borrosa*** *en* $\mathcal{S}$ *a cualquier relación borrosa* $\widetilde{v} : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to [0, 1]$*, que sea reflexiva elemental y aditiva en* $\mathcal{S}$ *con respecto a la t-conorma* $\mathcal{T}$*. Si* $\widetilde{v}$ *es subaditiva (resp., superaditiva) llamamos a* $\widetilde{v}$ *una cercanía subaditiva (resp., superaditiva) borrosa en* $\mathcal{S}$*.*

A continuación, proporcionamos varios ejemplos de cercanías borrosas, con los que trabajaremos en el futuro.

Definición 231 *Decimos que una función* $f : [0, 1]^n \to [0, 1]$*, satisface la* ***propiedad TC****, precisamente si, para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$*:*

$$f_i(a) = a \tag{12.11}$$

donde $f_i(a) = f(0, \ldots, 0, \overset{(i)}{a}, 0, \ldots, 0)$*, para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$*.*

[4] Tanto la subaditividad como la superaditividad se deben a que según (12.9) y por la definición de unión conjuntista, $\nu^\diamond(B \cup C, A) = \nu(\min\{a_0, b_0\}, c_0) \diamond \nu(\max\{a_1, b_1\}, c_1)$.

Observación 232 *La cercanía* v *es continua (también en* 1*),* ν^1 *es continua (también en* 1*). No obstante,* ν^1 *no es continua (discontinuidades tipo salto) en* $(x, 0), (0, y)$*:* $\nu^1(\{x\}, \{0\}) = \nu^1(\{0\}, \{y\}) = \nu^1(\{0\}, \{0\}) = 0$*, pero* $\nu^1(\{\simeq 0\}, \{\simeq 0\}) \simeq 1$*.*

Definición 233 *Sea* ν *una relación reflexiva elemental en* $\mathfrak{S}([0, 1])$ *(def. 212). Sea* $\nu^1 : \mathfrak{S}([0, 1]) \times \mathfrak{S}([0, 1]) \to [0, 1]$ *definida como:*

$$\nu^1(\{x\}, \{y\}) = \begin{cases} 0 & si\ \min\{x, y\} = 0 \\ v(\{x\}, \{y\}) & si\ 0 < x, y < 1 \\ \min\{x, y\} & si\ \max\{x, y\} = 1 \end{cases} \tag{12.12}$$

Dada una operación de agregación $\mathrm{Aggr} : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ *(def. 69), consideraremos aplicaciones del tipo* $\widetilde{v} : \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \to [0, 1]$*, definidas por:*

$$\widetilde{v}(A, B) = \operatorname*{Aggr}_{u \in \mathcal{U}} \nu^1(\{A(u)\}, \{B(u)\}) \tag{12.13}$$

Observación 234 *Para entender el significado de (12.12) debemos pensar en* $[0, 1]$ *como el espacio de valoración de las funciones de pertenencia definitorias de los subconjuntos borrosos. Para interpretar la fórmula:*

$$si\ \min\{x, y\} = 0,\ entonces,\ \nu^1(\{x\}, \{y\}) = 0 \tag{12.14}$$

debemos entender x *e* y *como los valores de pertenencia asociados por dos subconjuntos borrosos* A *y* B*, al mismo referente* u *—cfr. Ec. 12.13:* $x = \arg A(u)$ *e* $y = \arg B(u)$*—. De este modo, (12.14) significa que si algún valor de pertenencia* x *o* y *es nulo (esto es, el referente no pertenece nítidamente a* A *o a* B*), entonces es nulo el aporte al valor final de la cercanía. Observemos la relación conceptual entre estos pensamientos y los relativos a la influencia de la* ***concordancia negativa*** *(esto es, entre variables ausentes de su definición descriptiva) en el cálculo de disimilaridades en el Análisis Jerárquico de Agrupamientos.*

Teorema 235 *Si la operación de agregación* Aggr*, que figura en la Ec. (12.13), satisface la propiedad TC —cfr. Def. 231—, entonces, para todo* $A \in \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \backslash \mathfrak{P}(\mathcal{U})$ *y para todo* $\{c\} \in \mathfrak{S}(\mathcal{U})$*:*

$$\begin{aligned} \widetilde{v}(A, \{c\}) &= \widetilde{v}(\{c\}, A) \\ &= A(c) \end{aligned} \tag{12.15}$$

Demostración. En efecto. Sea $\chi_{\{c\}}$ la función característica de $\{c\}$. Por definición, $\chi_{\{c\}}(c) = 1$, y $\chi_{\{c\}}(u) = 0$, si $u \neq c$. Por tanto, si $u \neq c$, entonces, por (12.12), $\nu^1(\{A(u)\}, \{0\}) = 0$. Por otro lado, por (12.12), $\nu^1(\{A(c)\}, \{1\}) = \min\{A(c), 1\} = A(c)$. Esquemáticamente:

$$\begin{aligned} \widetilde{v}(A, \{c\}) &= \operatorname*{Aggr}_{u \in \mathcal{U}} \nu^1(\{A(u)\}, \{\chi_{\{c\}}(u)\}) && (i) \\ &= \mathrm{Aggr}(0, \dots, 0, \nu^1(\{A(c)\}, \{1\}), 0, \dots, 0) && (ii) \\ &= \nu^1(\{A(c)\}, \{\chi_{\{c\}}(c)\}) && (iii) \\ &= \nu^1(\{A(c)\}, \{1\}) && (iv) \\ &= \min\{A(c), 1\} && (v) \\ &= A(c) && (vi) \end{aligned}$$

donde la satisfacción por parte de Aggr de la propiedad TC, permite deducir (iii) a partir de (ii). ■

De este modo, y a consecuencia de nuestra definición de cercanía borrosa (Def. 233):

Medimos lo cercano que está un subconjunto unitario de un referencial de un subconjunto borroso del mismo referencial, mediante el valor de la función de pertenencia definitoria del subconjunto borroso, evaluada en el referente integrante del subconjunto unitario.

En esta Tesis, trabajamos con la cercanía de un ejemplar a un prototipo (problemas de **clasificación de ejemplares**) y con la cercanía entre dos ejemplares (problemas de **categorización de ejemplares**). Respecto a la *categorización de prototipos*, remitimos al lector a la Obs. 238 (*infra*).

El siguiente teorema demuestra que $\widetilde{v}$ —def. (230)— es una **cercanía borrosa**, cuando se comparan ejemplares entre sí o se calculan cercanías de ejemplares a prototipos.

Teorema 236 *Consideremos* $\widetilde{v} : \mathfrak{F}(\mathcal{U})\times\mathfrak{F}(\mathcal{U}) \to [0,1]$*, definida como en la Def. (230). Sea* Aggr *una operación de agregación que satisface la propiedad TC y además es asociativa. Entonces:*

i) $\widetilde{v}$ *es reflexiva elemental en* $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$*, y*

ii) si $\mathcal{T}$ *denota una t-conorma y si suponemos que dado* $(A,B) \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})\times\mathfrak{F}(\mathcal{U})$*,* A *y* B *no son prototipos a la vez, entonces* $\widetilde{v}$ *es aditiva con respecto a* $\mathcal{T}$ *en* $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$*.*

Demostración.

i) $\widetilde{v}$ es reflexiva elemental en $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$, porque ν es reflexiva elemental en $\mathfrak{S}([0,1])$.

ii) Supongamos que queremos medir la cercanía desde un ejemplar puntual nítido a un prototipo puntual borroso. En este caso, y suponiendo además que para definir la unión borrosa se usa la t-conorma $\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned}\widetilde{v}(B\cup C,\{a\}) &= (B\cup C)(a)\\ &= \mathcal{T}\,(B(a),C(a))\\ &= \mathcal{T}(\widetilde{v}(B,\{a\}),\widetilde{v}(C,\{a\}))\end{aligned}$$

Supongamos ahora que queremos comparar dos ejemplares nítidos. Entonces, por un lado:

$$\begin{aligned}&\widetilde{v}(\{b\}\cup\{c\},\{a\})\\ &= \text{Aggr}\left(\nu^1(\{\chi_{\{b\}\cup\{c\}}(a)\},\{\chi_{\{a\}}(a)\}),\nu^1(\{\chi_{\{b\}\cup\{c\}}(b)\},\{\chi_{\{a\}}(b)\}),\nu^1(\{\chi_{\{b\}\cup\{c\}}(c)\},\{\chi_{\{a\}}(c)\})\right)\\ &= \text{Aggr}\left(\nu^1\left(\left\{\begin{array}{ll}1 & (a=b)\\ 1 & (a=c)\\ 0 & (b=c)\end{array}\right\},\{1\}\right),\nu^1\left(\{1\},\left\{\begin{array}{ll}1 & (a=b)\\ 0 & (a=c)\\ 0 & (b=c)\end{array}\right\}\right),\nu^1\left(\{1\},\left\{\begin{array}{ll}0 & (a=b)\\ 1 & (a=c)\\ 0 & (b=c)\end{array}\right\}\right)\right)\\ &= \begin{array}{ll}\text{Aggr}\,(1,1,0) & (a=b)\\ \text{Aggr}\,(1,0,1) & (a=c)\\ \text{Aggr}\,(0,0,0) & (b=c)\end{array}\end{aligned} \tag{(*)}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}(\widetilde{v}(\{b\},\{a\}),\widetilde{v}(\{c\},\{a\}))\\ &= \mathcal{T}\left(\begin{array}{c}\text{Aggr}\left(\nu^1(\{\chi_{\{b\}}(a)\},\{\chi_{\{a\}}(a)\}),\nu^1(\{\chi_{\{b\}}(b)\},\{\chi_{\{a\}}(b)\})\right),\\ \text{Aggr}(\nu^1(\{\chi_{\{c\}}(a)\},\{\chi_{\{a\}}(a)\}),\nu^1(\{\chi_{\{c\}}(c)\},\{\chi_{\{a\}}(c)\}))\end{array}\right) \qquad ((**))\\ &= \mathcal{T}\left(\begin{array}{c}\text{Aggr}\left(\nu^1(\{\begin{array}{ll}1 & (a=b)\\ 0 & (a=c)\\ 0 & (b=c)\end{array}\},\{\chi_{\{a\}}(a)\}),\nu^1(\{\chi_{\{b\}}(b)\},\{\begin{array}{ll}1 & (a=b)\\ 0 & (a=c)\\ 0 & (b=c)\end{array}\})\right),\\ \text{Aggr}(\nu^1(\{\begin{array}{ll}0 & (a=b)\\ 1 & (a=c)\\ 0 & (b=c)\end{array}\},\{\chi_{\{a\}}(a)\}),\nu^1(\{\chi_{\{c\}}(c)\},\{\begin{array}{ll}0 & (a=b)\\ 1 & (a=c)\\ 0 & (b=c)\end{array}\}))\end{array}\right)\\ &= \begin{array}{ll}\mathcal{T}(\text{Aggr}\,(1,1)\,,\text{Aggr}\,(0,0)) & (a=b)\\ \mathcal{T}(\text{Aggr}\,(0,0)\,,\text{Aggr}\,(1,1)) & (a=c)\\ \mathcal{T}(\text{Aggr}\,(0,0)\,,\text{Aggr}\,(0,0)) & (b=c)\end{array} \qquad (12.16)\\ &= \begin{array}{ll}\mathcal{T}(1,0) & (a=b)\\ \mathcal{T}(0,1) & (a=c)\\ \mathcal{T}(0,0) & (b=c)\end{array} \qquad (12.17)\\ &= \begin{array}{ll}1 & (a=b)\\ 1 & (a=c)\\ 0 & (b=c)\end{array} \qquad (12.18)\end{aligned}$$

Como Aggr es asociativa y satisface la propiedad TC —aplíquense en la Ec. (∗)—, tenemos:

$$\widetilde{v}(\{b\} \cup \{c\}, \{a\}) = \mathcal{T}(\widetilde{v}(\{b\}, \{a\}), \widetilde{v}(\{c\}, \{a\})) \tag{12.19}$$

obteniendo así lo perseguido. ■

Observación 237 *En este ambiente de ejemplares y prototipos, mediante el Teorema 235, podemos decir que medimos lo cercano que está un ejemplar nítido de un prototipo borroso.*

Observación 238 *La aditividad (resp., subaditividad) de $\widetilde{v}$ respecto de una t-conorma $\mathcal{T}$, en el caso de dos prototipos equivale a que:*

$$\begin{aligned} \widetilde{v}(B \cup C, A) &= \operatorname*{Aggr}_{u \in \mathcal{U}} \nu^1(\{(B \cup C)(u)\}, \{A(u)\}) \\ &= \operatorname*{Aggr}_{u \in \mathcal{U}} \nu^1(\{\mathcal{T}\,(B(u), C(u))\}, \{A(u)\}) \end{aligned} \tag{12.20}$$

sea igual a (resp., menor que):

$$\mathcal{T}(\widetilde{v}(B, A), \widetilde{v}(C, A)) = \mathcal{T}\left(\operatorname*{Aggr}_{u \in \mathcal{U}} \nu^1(\{B(u)\}, \{A(u)\}), \operatorname*{Aggr}_{u \in \mathcal{U}} \nu^1(\{C(u)\}, \{A(u)\})\right) \tag{12.21}$$

En el conjunto de condiciones suficientes para llegar a la igualdad, además de ciertas hipótesis de distributividad, quizás necesite estar la exigencia de que sólo puedan agregarse las pertenencias respecto a un mismo referente. Quizás pudiera imponerse en la Def. 233, esta dependencia de ν^1 respecto de A y B:

$$(\neg\exists u \in \mathcal{U})(x = \arg A(u) \wedge y = \arg B(u)) \Longrightarrow \nu^1(\{x\}, \{y\}) = 0 \tag{12.22}$$

No obstante, si $\exists u, u' \in \mathcal{U}$ tal que $x = \arg A(u)$ e $y = \arg B(u) = \arg B(u')$, sigue siendo indistinguible elegir el y procedente de u, del y procedente de u'. Lo que parece claro es que no tenemos ningún interés en comparar valores procedentes de referentes distintos. La integración de esta regla en nuestra construcción es uno de esos fines cuyo estudio se aplaza a tiempos posteriores a la elaboración de la presente Tesis.

12.4 Medida de un conjunto borroso mediante la agregación de su función de pertenencia

La definición de $\widetilde{v}$ subsume la idea de medir un conjunto borroso usando la cercanía borrosa desde él al universo de discurso $\mathcal{U}$. Así y debido a los requerimientos axiomáticos de la operación de agregación esencial Aggr —*cfr.* Def. 69—, la medida de cualquier conjunto borroso A está entre la cercanía desde $\varnothing$ a $\mathcal{U}$ (que es 0), y la cercanía desde $\mathcal{U}$ a $\mathcal{U}$ (que es 1). Estamos suponiendo también que $\widetilde{v}(A, \varnothing) = \widetilde{v}(\varnothing, A) = 0$ (la cercanía entre nada y algo, o entre algo y nada, es 0).

Resumimos todo esto, a continuación, en el Teorema 240. Primero recordemos la definición de una medida de conjuntos borrosos, propuesta por Bernadette Bouchon-Meunier, Rifqi y Bothorel [1249] —*cfr. item* Rick, Bothorel, Bouchon-Meunier, Muller y Rifqi [1260] (p. 320).

Definición 239 *Sean $\mathcal{U}$ un universo de discurso y $\mathcal{C}$ una familia no vacía de subconjuntos borrosos de $\mathcal{U}$. Se denomina* ***medida de conjuntos borrosos*** [5] *en $\langle \mathcal{U}, \mathcal{C} \rangle$ a cualquier aplicación $m : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$, tal que:*

i) $m(\varnothing) = 0$ (condición de acotación inferior), y

ii) para todo $A, B \in \mathcal{C}$, si $B \subseteq A$ entonces $m(B) \leq m(A)$ (condición de monotonía).

Observemos que, si $\mathcal{C}$ fuese una σ-álgebra borrosa en $\mathcal{U}$, podríamos considerarla una extensión de una asignación básica de medida de conjuntos —*cfr. supra* Def. 180; *item supra* §11.5.

Teorema 240 *Sea $\mathcal{U}$ un universo finito de discurso. La función $\mathfrak{h} : \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \to [0, 1]$ definida para todo $A \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ como $\mathfrak{h}(A) = \widetilde{v}(\mathcal{U}, A)$ es una medida de conjuntos borrosos. Esta medida es:*

$$\mathfrak{h}(A) = \operatorname*{Aggr}_{u \in \mathcal{U}} A(u) \tag{12.23}$$

[5] El **modelo de contraste** de Amos Tversky [239] —véase la Observación 274, en la pág. 393— es un ejemplo de medida de conjuntos borrosos.

Demostración. Según las definiciones de función característica y de ν^1, obtenemos:

$$\begin{aligned}\widetilde{v}(\mathcal{U}, A) &= \operatorname*{Aggr}_{u\in\mathcal{U}} \nu^1(\{\chi_{\mathcal{U}}(u)\}, \{A(u)\}) \\ &= \operatorname*{Aggr}_{u\in\mathcal{U}} \nu^1(\{1\}, \{A(u)\}) \\ &= \operatorname*{Aggr}_{u\in\mathcal{U}} A(u)\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathfrak{h}$ se define como $\mathfrak{h}(A) = \text{Aggr}_{u\in\mathcal{U}} A(u)$. Las condiciones de contorno del operador Aggr implican la condición de contorno de $\mathfrak{h}$, o sea, $\mathfrak{h}(\varnothing) = \text{Aggr}_{u\in\mathcal{U}} \varnothing(u) = 0$ (obsérvese además que $\mathfrak{h}(\mathcal{U}) = \text{Aggr}_{u\in\mathcal{U}} \mathcal{U}(u) = 1$). La monotonía de Aggr implica la monotonía de $\mathfrak{h}$: si $B \subseteq A$ entonces $\mathfrak{h}(B) = \widetilde{v}(\mathcal{U}, B) = \text{Aggr}_{u\in\mathcal{U}} B(u) \leq \text{Aggr}_{u\in\mathcal{U}} A(u) = \widetilde{v}(\mathcal{U}, A) = \mathfrak{h}(A)$. ■

12.5 Lejanías borrosas

Definición 241 *Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto de $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$ y $\mathcal{T}$ una t-norma. Llamamos* ***lejanía borrosa*** *en $\mathcal{S}$ a cualquier relación borrosa $\widetilde{\varphi} : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to [0, 1]$, que sea irreflexiva elemental y aditiva en $\mathcal{S}$ con respecto a $\mathcal{T}$. Llamamos espacio de lejanía borrosa al par $(\mathcal{S}, \widetilde{\varphi})$. Si $\widetilde{\varphi}$ is subaditiva (resp., superaditiva) recibe la denominación de lejanía borrosa subaditiva (resp., superaditiva) en $\mathcal{S}$ y $(\mathcal{S}, \widetilde{\varphi})$ es el espacio de lejanía borrosa subaditiva (resp., superaditiva).*

Un ejemplo de lejanía borrosa con el que trabajaremos es el siguiente.

Definición 242 *Sea φ una relación irreflexiva elemental en $\mathfrak{S}([0, 1])$ (def. 212). Sea $\varphi^1 : \mathfrak{S}([0, 1])\times\mathfrak{S}([0, 1]) \to [0, 1]$ definida como:*

$$\varphi^1(\{x\}, \{y\}) = \begin{cases} 0 & si\ \min\{x, y\} = 0 \\ \varphi(\{x\}, \{y\}) & si\ 0 < x, y < 1 \\ \max\{1 - x, 1 - y\} & si\ \max\{x, y\} = 1 \end{cases} \tag{12.24}$$

Dada una operación de agregación $\text{Aggr} : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ *(def. 69), consideraremos aplicaciones del tipo $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \to [0, 1]$, definidas por:*

$$\widetilde{\varphi}(A, B) = \operatorname*{Aggr}_{u\in\mathcal{U}} \varphi^1(\{A(u)\}, \{B(u)\}) \tag{12.25}$$

Los comentarios que aparecen en la Obs. 234 son igualmente válidos para las lejanías borrosas. Observemos además que, para los puntos $x, y \in [0, 1]$ tales que $\max\{x, y\} = 1$, el valor de φ^1 es el complementario borroso estándar de ν^1:

$$\begin{aligned}\varphi^1(\{x\}, \{y\}) &= \max\{1 - x, 1 - y\} \\ &= 1 - \min\{x, y\} \\ &= 1 - \nu^1(\{x\}, \{y\})\end{aligned}$$

El siguiente teorema para lejanías borrosas, corresponde al Teorema 235 para cercanías borrosas.

Teorema 243 *Si la operación de agregación* Aggr*, que figura en la Ec. (12.25), satisface la propiedad TC —cfr. Def. 231—, entonces, para todo $A \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})\backslash\mathfrak{P}(\mathcal{U})$ y para todo $\{c\} \in \mathfrak{S}(\mathcal{U})$:*

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(A, \{c\}) &= \widetilde{\varphi}(\{c\}, A) \\ &= 1 - A(c) \qquad (12.26) \\ &= \overline{A}(c) \qquad (12.27)\end{aligned}$$

Demostración. En efecto. Sea $\chi_{\{c\}}$ la función característica de $\{c\}$. Por definición, $\chi_{\{c\}}(c) = 1$, y $\chi_{\{c\}}(u) = 0$, si $u \neq c$. Por tanto, si $u \neq c$, entonces, por (12.12), $\varphi^1(\{A(u)\}, \{0\}) = 0$. Por otro lado, por

(12.12), $\varphi^1(\{A(c)\},\{1\}) = 1 - \min\{A(c),1\} = 1 - A(c) = \overline{A}(c)$. Esquemáticamente:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(A,\{c\}) &= \operatorname*{Aggr}_{u\in\mathcal{U}} \varphi^1(\{A(u)\},\{\chi_{\{c\}}(u)\}) && ((i))\\
&= \mathrm{Aggr}(0,\dots,0,\varphi^1(\{A(c)\},\{1\}),0,\dots,0) && ((ii))\\
&= \varphi^1(\{A(c)\},\{\chi_{\{c\}}(c)\}) && ((iii))\\
&= \varphi^1(\{A(c)\},\{1\}) && ((iv))\\
&= 1 - \min\{A(c),1\} && ((v))\\
&= 1 - A(c) && ((vi))\\
&= \overline{A}(c) && ((vii))
\end{aligned}$$

donde la satisfacción por parte de Aggr de la propiedad TC, permite deducir (iii) a partir de (ii). ∎

La conjunción de los Teoremas 235 y 243 hace que podamos decir que *la lejanía borrosa de un* **ejemplar nítido** *a un* **prototipo borroso** *es igual a la cercanía borrosa del ejemplar al complemento estándar del prototipo*:

$$\widetilde{\varphi}(A,\{c\}) = \widetilde{\nu}(\overline{A},\{c\})$$

Por el siguiente teorema —el equivalente al Teorema 240 referente a cercanías borrosas—, establecemos como **medida de un conjunto borroso**, en el sentido de Bouchon-Meunier, Rifqi y Bothorel [1249] —*cfr. supra* Def. 239—, **la negación estándar de su lejanía al universal**.

Teorema 244 *Sea $\mathcal{U}$ un universo finito de discurso. La función $\mathfrak{h}:\mathfrak{F}(\mathcal{U})\to[0,1]$ definida para todo $A\in\mathfrak{F}(\mathcal{U})$ como:*

$$\mathfrak{h}(A) = 1 - \widetilde{\varphi}(\mathcal{U},A) \tag{12.28}$$

es una medida de conjuntos borrosos. Esta medida es:

$$\mathfrak{h}(A) = 1 - \operatorname*{Aggr}_{u\in\mathcal{U}}(1 - A(u)) \tag{12.29}$$

Demostración. Según las definiciones de función característica y de ν^1, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(\mathcal{U},A) &= \operatorname*{Aggr}_{u\in\mathcal{U}} \varphi^1(\{\chi_{\mathcal{U}}(u)\},\{A(u)\})\\
&= \operatorname*{Aggr}_{u\in\mathcal{U}} \varphi^1(\{1\},\{A(u)\})\\
&= \operatorname*{Aggr}_{u\in\mathcal{U}} (1 - A(u))
\end{aligned}$$

Definimos, pues, para todo $A\in\mathfrak{F}(\mathcal{U})$, $\mathfrak{h}(A) = 1 - \mathrm{Aggr}_{u\in\mathcal{U}}(1-A(u))$. Las condiciones de contorno del operador Aggr implican la condición de contorno de $\mathfrak{h}$, o sea, $\mathfrak{h}(\varnothing) = 1 - \mathrm{Aggr}_{u\in\mathcal{U}}(1-\varnothing(u)) = 0$ (obsérvese además que $\mathfrak{h}(\mathcal{U}) = 1 - \mathrm{Aggr}_{u\in\mathcal{U}}(1-\mathcal{U}(u)) = 1$). La monotonía de Aggr implica la monotonía de $\mathfrak{h}$: si $B\subseteq A$ entonces $\mathfrak{h}(B) = \widetilde{\varphi}(\mathcal{U},B) = 1 - \mathrm{Aggr}_{u\in\mathcal{U}}(1-B(u)) \le 1 - \mathrm{Aggr}_{u\in\mathcal{U}}(1-A(u)) = \widetilde{\varphi}(\mathcal{U},A) = \mathfrak{h}(A)$. ∎

Observación 245 *La extensión de este resultado a negaciones que no sean la estándar se aplaza a momentos de reflexión posteriores a la terminación de la presente Tesis.*

12.6 Introducción de borrosidad en la cercanía «sup-inf»

Sea $(L,\preceq)$ un retículo. Dado $l\in L$, pensemos en él como en un prototipo. Entonces, podemos representar «estar cerca de l» mediante la asignación de una función apropiada de pertenencia a l. Denotaremos por $\widetilde{l}$, el equivalente borrosificado de l. Si $l\in\mathfrak{C}(L)$, nuestro objetivo, en un principio, es introducir borrosidad en él a partir de la introducción de borrosidad en sus puntos extremos l_0 y l_1. La introducción de borrosidad en la descripción de un punto extremo l_b puede interpretarse como la asignación del significado «estar cerca de l_b».

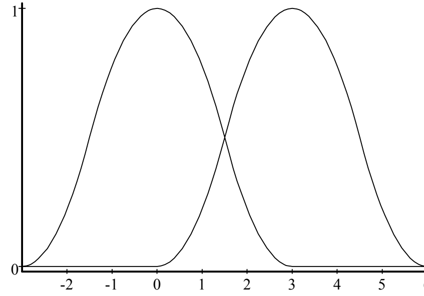


Figura 12.1: *«$\langle j_0, j_1\rangle$ cerca de $\langle 0, 3\rangle$» significa {«j_0 cerca de 0», «j_1 cerca de 3»}. En la figura se muestran las funciones $\pi(x; 0, 3)$ y $\pi(x; 3, 3)$ representando «x es próximo a 0» y «x es próximo a 3», donde $\pi(x; u, r)$ es la conocida como función π de* ZADEH *—cfr. vide supra.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Definición 246 *Sean $(L\ , \preceq)$ un retículo y $A, B \in \mathfrak{C}(L)$. Si $\widetilde{v}$ es una cercanía borrosa (Def. 230), podemos modificar $\nu^\diamond$ (Ec. 12.9) en función de la* **cercanía sup-inf «borrosificada»** $\widetilde{v}^{\diamond(2)} : \mathfrak{C}(L) \times \mathfrak{C}(L) \to [0, 1]$, *definida como:*

$$\widetilde{v}^{\diamond(2)}(A, B) = \widetilde{v}(\widetilde{a}_0, \widetilde{b}_0) \diamond \widetilde{v}(\widetilde{a}_1, \widetilde{b}_1) \tag{12.30}$$

si A y B son ambos considerados como prototipos, y mediante:

$$\widetilde{v}^{\diamond(2)}(A, B) = \widetilde{a}_0(b_0) \diamond \widetilde{a}_1(b_1) \tag{12.31}$$

si A es un prototipo pero B no.

Recordemos que nuestro interés reside en este último caso. Al igual que con la cercanía borrosa (Def. 230), queremos definir la cercanía desde un ejemplar a un prototipo, desde un prototipo a un ejemplar y entre ejemplares.

El siguiente teorema (similar al Teorema 236) establece la subaditividad de $\widetilde{v}^{\diamond(2)}$. Así parece natural denominar **cercanía sup-inf subaditiva «borrosificada»** a $\widetilde{v}^{\diamond(2)}$. Necesitamos el siguiente lema previo:

Lema 247 *Sea $\mathcal{T}$ una t-conorma. Para todo $a, b \in [0, 1]$, $\mathcal{T}(a, b) \leq \mathcal{T}(a, \mathcal{T}(b, c))$.*

Demostración. Este resultado se sigue del hecho de que para todo $x, y \in [0, 1]$, $x = \mathcal{T}(x, 0) \leq \mathcal{T}(x, y)$ (condiciones de contorno y de monotonía de $\mathcal{T}$), porque entonces, para $x = \mathcal{T}(a, b)$, tenemos que $\mathcal{T}(a, b) \leq \mathcal{T}(\mathcal{T}(a, b), y)$, que es igual a $\mathcal{T}(a, \mathcal{T}(b, y))$ por la asociatividad de $\mathcal{T}$. ■

Teorema 248 *Sea $\widetilde{v}^{\diamond(2)} : \mathfrak{C}(L) \times \mathfrak{C}(L) \to [0, 1]$ definida como en la def. (246). Entonces:*

1. *si $0 \diamond 0 = 0$ entonces $\widetilde{v}^{\diamond(2)}$ es reflexiva elemental en $\mathfrak{C}(L)$, y*
2. *si $\mathcal{T}$ denota una t-conorma y si suponemos que dado $(A, B) \in \mathfrak{C}(L) \times \mathfrak{C}(L)$, A y B no son prototipos a la vez, entonces $\widetilde{v}^{\diamond(2)}$ es subaditiva con respecto a $\mathcal{T}$ en $\mathfrak{C}(L)$.*

Demostración. En efecto, a partir de la reflexividad elemental de $\widetilde{v}$, $\widetilde{v}^{\diamond(2)}$ es reflexiva elemental si $0 \diamond 0 = 0$. El punto (2) se sigue a partir de que $(B \cup C)_0 \in \{b_0, c_0\}$, y $(B \cup C)_1 \in \{b_1, c_1\}$ y del lema previo. ■

Obsérvese que la definición de $\widetilde{v}^{\diamond(2)}$ depende de la conectiva lógica $\diamond$, de una cercanía borrosa entre los «borrosificados» de los puntos extremos (y por tanto de una cercanía entre los puntos extremos), y de una función de borrosificado que denotaremos simplemente por $\widetilde{\cdot}$.

12.7 Cercanía a un tercero: algunos inconvenientes

A veces, ciertas propiedades son consideradas como esenciales, y por ello, puede ser importante que dado un prototipo, la medida de cercanía logre diferenciar entre dos ejemplares respecto de una propiedad, mediante

las cercanías de cada uno al prototipo. Por ejemplo, Carlo Bertoluzza, Norberto Corral y Antonia Salas [681], destacaban el interés de ser capaz de distinguir entre intervalos concéntricos con un prototipo e intervalos no concéntricos con él, en el proceso de medir distancias entre números borrosos en el entorno de la regresión borrosa, a través de las distancias entre sus α-cortes.

La lógica subyacente puede basarse en una cercanía: al decir «B y C están iguales de cerca de A», el término «cerca», aplicado a los conjuntos, intentará cuantificar la compartición de una propiedad, cuanto «más cerca», más cierta será la compartición de la propiedad. En el ejemplo anterior, en vez de la bivalencia

$$\{\text{concéntricos}, \text{no concéntricos}\}$$

emplearemos una relación de cercanía, cuya interpretación será la modificación lingüística de concéntricos:

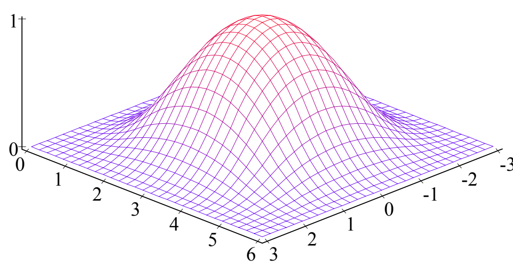
$$B \text{ y } C \text{ están iguales de cerca de } A$$
$$(B \text{ y } C \text{ son concéntricos con } A)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(b_0 \text{ y } c_0 \text{ están iguales de cerca de } a_0) \wedge (b_1 \text{ y } c_1 \text{ están iguales de cerca de } a_1)$$

Por ejemplo, consideremos el intervalo prototipo $I = \langle\widetilde{0},\widetilde{3}\rangle$ y como ejemplares los intervalos $J_1 = \langle 1, 2\rangle$, $J_2 = \langle -1, 4\rangle$, $J_3 = \langle 1, 4\rangle$ y $J_4 = \langle -1, 2\rangle$ (obviamente podríamos trabajar con $I = \langle i_0, i_1\rangle$, $J_1 = \langle i_0 + \varepsilon, i_1 - \varepsilon\rangle$, $J_2 = \langle i_0 - \varepsilon, i_1 + \varepsilon\rangle$, $J_3 = \langle i_0 + \varepsilon, i_1 + \varepsilon\rangle$, $J_4 = \langle i_0 - \varepsilon, i_1 - \varepsilon\rangle$, donde $\varepsilon > 0$). Deseamos evaluar la cercanía desde cada ejemplar J_k al prototipo I. Obsérvese que I, J_1 y J_2 son concéntricos, mientras que J_3 y J_4 están desplazados con respecto al centro de I. Supongamos, por ejemplo, que como función introductora de borrosidad $\widetilde{\cdot}$ (Def. 246) que representa el significado de «estar cerca de u», elegimos una función de pertenencia $\pi(x; u, r)$, la π de Zadeh[6], siendo r el radio de la adherencia del soporte de la función, visto como intervalo centrado en c (véase la Fig. 12.1). En particular, en este ejemplo, $\pi(x; u, 3)$. Así, como prototipo tenemos el intervalo de extremos conjuntos borrosos:

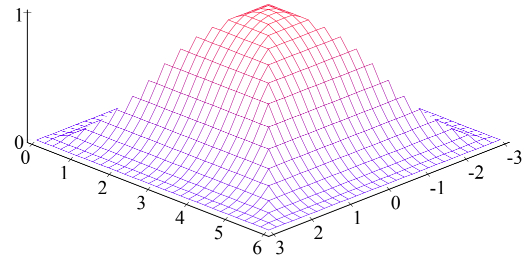
$$\begin{aligned} I &= \langle\widetilde{0},\widetilde{3}\rangle \\ &= \langle \pi(x; 0, 3), \pi(x; 3, 3)\rangle \end{aligned}$$

Como los J_k no son prototipos, no tenemos que introducir borrosidad en sus extremos, por lo que podemos medir la cercanía desde J_k hasta I, usando la expresión (12.31), como resultado de la ecuación (12.30) y el Teorema 235.

Las T-normas más usuales que representan a $\wedge$ son el producto algebraico y el mínimo. Podemos observar cómo influyen en la medida de cercanía en la siguiente figura:



$\widetilde{v}^{\text{pa}(2)}(\langle 0, 3\rangle, \langle x, y\rangle)$



$\widetilde{v}^{\min(2)}(\langle 0, 3\rangle, \langle x, y\rangle)$

[6] La función $\pi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ de Zadeh, se define por:

$$\pi(x; u, r) = \begin{cases} S(x, u - r, u - r/2, u) & si \quad x \le u \\ 1 - S(x, u, u + r/2, u + r) & si \quad u \le x \end{cases} \tag{12.32}$$

donde u es el centro, $r > 0$ el radio, o sea, la amplitud a cada lado del centro y la función $S : \mathbb{R} \to [0, 1]$ de Zadeh, es:

$$S(x; a, b, c) = \begin{cases} 0 & si \quad x \le a \\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 & si \quad a < x \le b \\ 1 - 2\left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2 & si \quad b < x \le c \\ 1 & si \quad c < x \end{cases} \tag{12.33}$$

Quizás sea lícito afirmar que estamos pensando de una manera pesimista (en cierta forma, «cubriéndonos las espaldas», al dar mayor importancia a la lejanía) si usamos una t-norma (la más pesimista, el mínimo), y que lo hacemos de una manera optimista si utilizamos una t-conorma (la más optimista, el máximo).

Mostramos los resultados para siete t-normas habituales en la Tabla 12.1 (pueden verse sus definiciones en la Tabla 4.3). Empleando el índice triangular de disimilitud (4.52), obtendríamos los valores correspondientes a una función de lejanía. Asimismo, mostramos los resultados para las cinco t-conormas más frecuentemente usadas en la Tabla 12.2 (pueden verse sus definiciones en la Tabla 4.4). Observemos que ninguna norma diferencia entre las propiedades «ser concéntrico» (cn) y ser «co-cuartílico-1» (cq): para cada t-norma y para cada t-conorma, los resultados, para todo $k \in \mathbb{N}_4$, son iguales.

normas triangulares	$\widetilde{v}^{\diamond(2)}(\widetilde{I}, J_k)$
mínimo:	.778
producto algebraico (t-norma probabilística):	.605
*producto acotado (*Lukasiewicz*):*	.556
producto drástico (t-norma débil):	0
Dubois-Prade [437]:	$\frac{.605}{\max\{\gamma,.778\}}$
Frank [511]:	$\frac{\ln\frac{\gamma+\gamma^{\frac{14}{9}}-2\gamma^{\frac{7}{9}}}{\gamma-1}}{\ln\gamma}$
Hamacher [512]:	$\frac{.605}{.049\gamma+.951}$

Tabla 12.1: *Cercanía Sup-Inf borrosificada desde* $\langle 1,2\rangle, \langle -1,4\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle -1,2\rangle$ *a* $\langle 0,3\rangle$, *calculada con algunas t-normas habituales.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

conormas triangulares	$\underset{\sim}{\nu}^{\cdot(2)}(I, J_k)$
máximo:	.778
suma algebraica:	.951
suma acotada:	1
suma drástica:	1
suma disjunta:	.222

Tabla 12.2: *Cercanía Sup-Inf borrosificada desde* $\langle 1,2\rangle, \langle -1,4\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle -1,2\rangle$ *a* $\langle 0,3\rangle$, *calculada con algunas t-conormas habituales.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

12.8 Introducción de borrosidad en la cercanía sup-mid-inf

Parece obvio que el problema reside en el hecho de que la relación de cercanía sólo tiene en cuenta los elementos extremos de un conjunto completo de un retículo. Como ya hemos mostrado anteriormente en esta Tesis, para la familia de métricas de Minkowski, y el caso de intervalos de números reales, una solución posible es tener en cuenta, además de los elementos extremos del intervalo, alguna colección de puntos intermedios.

Veamos que un argumento similar es válido para la cercanía sup-inf «borrosificada» (12.30).

Definición 249 *Dado un retículo normado $(V, \preceq)$, en vez de (12.30), consideramos la cercanía sup-inf «borrosificada» $\widetilde{v}^{\diamond(3)} : \mathbb{I}V \times \mathbb{I}V \to [0,1]$, definida por:*

$$\widetilde{v}^{\diamond(3)}(A, B) = \Diamond_{k\in\{0,1/2,1\}}\widetilde{v}(\widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k) \tag{12.34}$$

o sea, además de los elementos extremos, consideramos un único punto más, el punto medio. Así son las cosas si A y B son prototipos, pero si sólo uno de ellos, por ejemplo A, se considera como un prototipo, entonces la cercanía sup-inf «borrosificada» $\widetilde{v}^{\diamond(3)} : \mathbb{I}V \times \mathbb{I}V \to [0,1]$ se define como:

$$\widetilde{v}^{\diamond(3)}(A, B) = \Diamond_{k\in\{0,1/2,1\}}\widetilde{a}_k(b_k) \tag{12.35}$$

de acuerdo con la Ec. (12.31).

El siguiente teorema —similar al Teor. 236— nos informa de la subaditividad de $\widetilde{v}^{\diamond(3)}$. Por ello, de manera natural, llamamos a $\widetilde{v}^{\diamond(3)}$, **cercanía sup-mid-inf subaditiva «borrosificada»**.

Teorema 250 *Sea* $\widetilde{v}^{\diamond(3)} : \mathbb{I}V \times \mathbb{I}V \to [0,1]$ *definida como en la Def. 249. Entonces:*

1. *si* $\Diamond_{k\in\{0,1/2,1\}}(0) = 0$*, entonces* $\widetilde{v}^{\diamond(3)}$ *es reflexiva elemental en* $\mathbb{I}V$*, y*
2. *si* $\mathcal{T}$ *denota una t-conorma y suponiendo que dados* $A, B \in \mathbb{I}V$*,* A *y* B *no son considerados a la vez como prototipos, entonces* $\widetilde{v}^{\diamond(3)}$ *es subaditiva con respecto a* $\mathcal{T}$ *en* $\mathbb{I}V$*.*

Demostración. En efecto, debido a la reflexividad elemental de $\widetilde{v}$, observamos que si $\Diamond_{k\in\{0,1/2,1\}}(0) = 0$, entonces $\widetilde{v}^{\diamond(3)}$ es reflexiva elemental. La subaditividad de $\widetilde{v}^{\diamond(3)}$ con respecto a la t-conorma $\mathcal{T}$ en $\mathbb{I}V$, se sigue de verificarse que $(B \cup C)_0 \in \{b_0, c_0\}$, y que $(B \cup C)_1 \in \{b_1, c_1\}$ y del Lema 247. ∎

Con respecto a nuestro ejemplo, la Fig. 12.2 representa las funciones π de ZADEH asignadas a los extremos y al punto medio del intervalo prototipo $\langle 0, 3\rangle$.

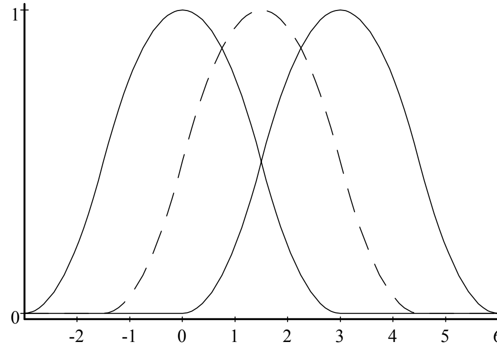


Figura 12.2: *En la figura se muestran las funciones* $\pi(x; 0, 3)$*,* $\pi(x; 3/2, 3)$ *y* $\pi(x; 3, 3)$ *representando «*x *es próximo a* 0*» y «*x *es próximo a* $3/2$*» y «*x *es próximo a* 3*», donde* $\pi(x; u, r)$ *es la conocida como función* π *de* ZADEH *—cfr. vide supra.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

En la Tabla 12.3 podemos ver los resultados para cada t-norma y t-conorma, en función de las cuales se define la cercanía sup-mid-inf «borrosificada».

Observación 251 *La necesidad de* α*-percentilados parece hacerse patente cuando consideramos puntos característicos que no sean ni los extremos ni el centro. Por ejemplo, pensemos otra vez en la co-cuartilidad-1, es decir en la coincidencia en el primer cuartil. Sea* $I = \langle 1, 9\rangle$*, que consideramos un prototipo y sean los ejemplares siguientes: dos intervalos co-cuartílicos-1 con* $\langle 1, 9\rangle$*,* $J^1 = \langle 2, 6\rangle$ *y* $J^2 = \langle 0, 12\rangle$*, y dos intervalos «desplazados» con respecto al primer cuartil,* $J^3 = \langle 0, 8\rangle$ *y* $J^4 = \langle 2, 10\rangle$*. Sean los* α*-percentilados* $\mathfrak{p}(I) = \{1, 3, 5, 7, 9\}$*,* $\mathfrak{p}(J^1) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$*,* $\mathfrak{p}(J^2) = \{0, 3, 6, 9, 12\}$*,* $\mathfrak{p}(J^3) = \{0, 2, 4, 6, 8\}$*,* $\mathfrak{p}(J^4) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$*. Si usamos la cercanía sup-mid-inf no podemos distinguir entre los co-cuartílicos-1 y los que no lo son, pues* $|i_0 - j_0^r| = \left|i_{1/2} - j_{1/2}^r\right| = |i_1 - j_1^r|$ $(r \in \{1, 2, 3, 4\})$*.*

12.9 Introduciendo borrosidad en el α- y (α, β)-percentilado

Recordemos que de manera general, consideramos que dados dos subconjuntos A y B de un retículo $(L, \preceq)$, y con el objetivo de conseguir medir la diferencia o disimilitud existente entre ellos, podríamos trabajar, al menos de tres formas: a) considerando todos los puntos en A y en B, b) destacando sólo algunos puntos en A y en B, y c) destacando algunos subconjuntos relevantes de A y de B.

Cercanía sup-mid-inf «borrosificada» desde J a $\langle \mathbf{0}, \mathbf{3} \rangle$: $\widetilde{v}^{\diamond(3)}(\langle 0, 3\rangle, J)$

t-normas	$\langle 1,2 \rangle$, $\langle -1,4 \rangle$	$\langle 1,4 \rangle$, $\langle -1,2 \rangle$
mínimo:	.778	
producto algebraico:	.605	.471
producto acotado:*	.556	.333
producto drástico:	0	
Hamacher:	$\frac{.605}{.049\gamma+.951}$ $(\diamond_1)$	$\frac{.471(.049\gamma+.951)^{-1}}{\gamma+(1-\gamma)\left(\frac{.134}{.049\gamma+.951}+.778\right)}$ $(\diamond_2)$
Dubois-Prade:	$\frac{.605}{\max(\alpha,1)\max\left(\alpha,\frac{.778}{\max(\alpha,1)},.778\right)}$ $(\diamond_3)$	$\frac{.471}{\max(\alpha,.778)\max\left(\alpha,.778,\frac{.605}{\max(\alpha,.778)}\right)}$ $(\diamond_4)$
t-conormas		
máximo:	1	.778
suma algebraica:	1	.989
suma acotada:	1	
suma drástica:	1	
suma disjunta:	.778	

$\diamond_1 > \diamond_2$, para todo $\gamma \geq 0$, y $\diamond_3 > \diamond_4$ si $\alpha > .778$.

* ŁUKASIEWICZ

Tabla 12.3: *Resultados para la cercanía Sup-Mid-Inf borrosificada.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

En las dos primeras situaciones, si los subconjuntos A y B son completos, hablamos de α-percentilado (Def. 79), mientras que en el tercer caso, de (α, β)-percentilado (véase §6.20.1). Este último sería el caso de por ejemplo, conjuntos borrosos multimodales, donde cada subconjunto modal es un intervalo.

Ambas técnicas, en relación con las métricas de MINKOWSKI y de HAUSDORFF, ya han sido estudiadas anteriormente en esta Tesis. En esta sección, se propone la integración de estas ideas en el marco de las cercanías borrosas, introduciendo borrosidad en ambas técnicas, para el α-percentilado según la Def. 252 y para el (α, β)-percentilado según la Def. 254.

Definición 252 *Sea $(X, \mathfrak{p})$ un conjunto α-percentilado —cfr. Def. 79—. Decimos que hemos introducido borrosidad en el α-percentilado $\mathfrak{p}$ precisamente si hemos asignado una función de pertenencia a cada elemento x_α, para todo α de $\mathfrak{p}$. Denotamos mediante $\widetilde{x_\alpha}$ el equivalente borroso de x_α. Decimos entonces que $\{\widetilde{x_\alpha} : \alpha \in \mathfrak{p}\}$ es el «borrosificado» del α-percentilado $\mathfrak{p}$. Lo denotamos $\widetilde{\mathfrak{p}}$.*

Ejemplo 253 *Para el caso particular de α-percentilado $\mathfrak{p} = \{0, 1/2, 1\}$, lo acabamos de hacer en la sección anterior.*

Si $(X, \mathfrak{h})$ es un conjunto (α, β)-percentilado —*cfr.* Def. 119—, podermos considerar los equivalentes borrosos de los subintervalos nítidos que conforman $\mathfrak{h}$.

Definición 254 *Sea $(X, \mathfrak{h})$ un conjunto (α, β)-percentilado. Diremos que hemos introducido borrosidad en el (α, β)-percentilado $\mathfrak{h}$, precisamente si hemos asignado una función de pertenencia a cada subintervalo (α, β)-percentílico $I_{(\alpha,\beta)}$. Denotaremos mediante $\widetilde{I_{(\alpha,\beta)}}$ el equivalente borroso de $I_{(\alpha,\beta)}$.*

Ejemplo 255 *Podemos modificar la cercanía sup-inf «borrosificada» $\widetilde{v}^{\diamond(2)}$ —cfr. Def. 246— entre dos intervalos. Sean I y J dos intervalos de números reales, tales que $I = \langle i_0, i_1 \rangle$ y $J = \langle j_0, j_1 \rangle$. Sean $\varepsilon_{I,0}, \varepsilon_{I,1}, \varepsilon_{J,0}, \varepsilon_{J,1} \in \mathbb{R}$. Consideremos los subintervalos de I:*

$$S^I_{1,0} = \langle i_0, i_0 + \varepsilon_{I,0} \rangle \tag{12.36}$$

$$S^I_{1,1} = \langle i_1 - \varepsilon_{I,1}, i_1 \rangle \tag{12.37}$$

y los subintervalos de J:

$$S^J_{1,0} = \langle j_0, j_0 + \varepsilon_{J,0} \rangle \tag{12.38}$$

$$S^J_{1,1} = \langle j_1 - \varepsilon_{J,1}, j_1 \rangle \tag{12.39}$$

Observemos que $S^J_{i,j}$ son conjuntos borrosos ordinarios. Suponiendo que $\langle i_0, i_1 \rangle$ y $\langle j_0, j_1 \rangle$ son representables por $\langle S^I_{1,0}, S^I_{1,1} \rangle$ y $\langle S^J_{1,0}, S^J_{1,1} \rangle$, respectivamente, podemos proponer usar $\widetilde{v}^{\diamond(2)}$ de la siguiente manera:

$$\widetilde{v}^{\diamond(2)}(I, J) = \widetilde{v}^{\diamond(2)}(S^I_{1,0}, S^J_{1,0}) \diamond \widetilde{v}^{\diamond(2)}(S^I_{1,1}, S^J_{1,1}) \tag{12.40}$$

Al igual que comentábamos en el Ejemplo 121, cuando consideramos una colección de subintervalos (α, β)*-percentílicos* $\Gamma_I = \{I_1, \ldots, I_M\}$ *de un intervalo* $I = [i_0, i_1]$*, suponemos que existen* r *y* s*, tales que* $1 \leq r, s \leq M$*,* $i_{r,0} = i_0$*, e* $i_{s,1} = i_1$*.*

12.10 Indicadores de cercanía y lejanía para intervalos α-percentilados

En esta sección, extendemos la Def. 249 de la cercanía sup-mid-inf «borrosificada» $\widetilde{v}^{\diamond(3)}$, basada en el α-percentilado $\{0, 1/2, 1\}$, a la siguiente definición basada en un α-percentilado genérico $\mathfrak{p}$, siguiendo las directrices de la Def. 252.

Dados dos conjuntos igualmente α-percentilados $(X, \mathfrak{p})$ e $(Y, \mathfrak{p}')$, y notando $x_\alpha = \mathfrak{p}(\alpha)$ e $y_\alpha = \mathfrak{p}'(\alpha)$, una *regla de comparación* será:

$$\textbf{si} \bigwedge_{\alpha \in \mathfrak{D}_\mathfrak{p}} (x_\alpha \text{ es cercano a } y_\alpha) \textbf{ entonces } X \approx Y$$

donde $\wedge$ denota una conjunción que habrá de ser modelada, seguramente por una t-norma, aunque dependiendo del grado de vaguedad podrá usarse una t-conorma.

Sin lugar a dudas, otra cuestión fundamental consiste en la elección de las funciones de pertenencia que modelen los borrosificados de los α-percentiles para un conjunto dado (*v. gr.*, en los ejemplos anteriores han sido funciones π de ZADEH).

Definición 256 *Sea* $(V, \preceq)$ *un retículo normado y* $X, Y \in \mathbb{I}V$*, tales que* $X = \langle x_0, x_1 \rangle$ *e* $Y = \langle y_0, y_1 \rangle$*. Sean* $\widetilde{v}$ *una cercanía borrosa —cfr. 230— y* $\mathfrak{p}$ *un* α*-percentilado sobre* X *e* Y*.*

i) Si, tanto X *como* Y*, pueden ser considerados prototipos, estamos ante un* ***problema de categorización de prototipos****. Debemos introducir borrosidad en* $(X, \mathfrak{p})$ *y en* $(Y, \mathfrak{p})$*, midiendo su proximidad por el indicador de cercanía* $\mathsf{N} : \mathbb{I}V \times \mathbb{I}V \to [0, 1]$*, definido como:*

$$\mathsf{N}(X, Y; \mathfrak{p}, \diamond) = \Diamond_{\alpha \in \mathfrak{p}} (\widetilde{v}(\widetilde{x_\alpha}, \widetilde{y_\alpha})) \tag{12.41}$$

ii) Si suponemos que sólamente X *puede ser considerado como prototipo, estamos ante un* ***problema de clasificación de ejemplares****. Para medir lo cerca que está* Y *(un ejemplar) de* X*, introducimos borrosidad sólamente en* $(X, \mathfrak{p})$ *y usamos el indicador de cercanía —basado en el Teorema 235—* $\mathsf{N} : \mathbb{I}V \times \mathbb{I}V \to [0, 1]$ *definido por:*

$$\mathsf{N}(X, Y; \mathfrak{p}, \diamond) = \Diamond_{\alpha \in \mathfrak{p}} (\widetilde{x_\alpha}(y_\alpha)) \tag{12.42}$$

Del mismo modo, podemos definir **indicadores de lejanía** $\mathsf{F}(X, Y; \mathfrak{p}, \diamond)$ usando una lejanía borrosa $\widetilde{\varphi}$ —*cfr.* Def. 241— en vez de una cercanía borrosa $\widetilde{v}$. Si, tanto X como Y, pueden ser considerados prototipos, entonces, introduciendo borrosidad en $(X, \mathfrak{p})$ y en $(Y, \mathfrak{p})$, proponemos el indicador de lejanía $\mathsf{F} : \mathbb{I}V \times \mathbb{I}V \to [0, 1]$, definido como:

$$\mathsf{F}(X, Y; \mathfrak{p}, \diamond) = \Diamond_{\alpha \in \mathfrak{p}} (\widetilde{\varphi}(\widetilde{x_\alpha}, \widetilde{y_\alpha})) \tag{12.43}$$

Si sólamente X puede ser considerado como prototipo, entonces, para medir lo lejos que está Y (un ejemplar) de X, introducimos borrosidad sólamente en $(X, \mathfrak{p})$ y usamos el indicador de lejanía —basado en el Teorema 243— $\mathsf{F} : \mathbb{I}V \times \mathbb{I}V \to [0, 1]$ definido por:

$$\mathsf{F}(X, Y; \mathfrak{p}, \diamond) = \Diamond_{\alpha \in \mathfrak{p}} (\overline{\widetilde{x_\alpha}}(y_\alpha)) \tag{12.44}$$

El siguiente teorema (similar al Teor. 236) establece la subaditividad del indicador de cercanía $\mathsf{N}(\cdot, \cdot; \mathfrak{p}, \diamond)$ para los problemas de clasificación de ejemplares y de categorización de ejemplares. Por ello, llamamos a $\mathsf{N}(\cdot, \cdot; \mathfrak{p}, \diamond)$ *indicador de cercanía subaditivo basado en un* α*-percentilado «borrosificado».*

Teorema 257 *Sea* $\mathsf{N} : \mathbb{I}V \times \mathbb{I}V \to [0, 1]$ *definido como en la Ec. 256. Entonces:*

1. *si* $\Diamond_{\alpha \in \mathfrak{p}}(0) = 0$*, entonces* N *es reflexiva elemental en* $\mathbb{I}V$*, y*

2. *si $\mathcal{T}$ denota una t-conorma y si suponemos que dado $(A,B) \in \mathbb{I}V \times \mathbb{I}V$, A y B no son prototipos a la vez, entonces N es subaditiva respecto de $\mathcal{T}$ en $\mathbb{I}V$.*

Demostración. En efecto, debido a la reflexividad elemental de $\widetilde{v}$, observamos que si $\Diamond_{\alpha\in\mathfrak{p}}(0) = 0$, entonces N es reflexiva elemental. La subaditividad de N respecto de $\mathcal{T}$ en $\mathbb{I}V$, se sigue de satisfacerse $(B \cup C)_0 \in \{b_0, c_0\}$, $(B \cup C)_1 \in \{b_1, c_1\}$ y el Lema 247. ∎

12.11 Extensión de los indicadores a intervalos de tipo 2

Podemos extender las definiciones anteriores a intervalos de tipo 2 —*cfr.* Ejemplo 25—. Dado un retículo normado $(V, \preceq)$, se dice que un intervalo es de tipo 1 si es un intervalo ordinario. Un intervalo de tipo n es cualquier intervalo cuyos «puntos» extremos sean intervalos de tipo $n-1$. Notamos el tipo por un superíndice $^{(n}$.

Dada la colección $\mathbb{I}^{(2}V$, de todos los intervalos de tipo 2 de V, sea $X \in \mathbb{I}^{(2}V$ tal que $X = \langle\langle x_{00}, x_{01}\rangle, \langle x_{10}, x_{11}\rangle\rangle$. Notemos $X_0 = \langle x_{00}, x_{01}\rangle$, $X_1 = \langle x_{10}, x_{11}\rangle$, $X_{01} = \langle x_{00}, x_{11}\rangle$. De este modo, $X = \langle X_0, X_1\rangle$, indicando los subíndices 0 y 1, sus extremos (de tipo 1) inferior y superior, respectivamente.

Dados un retículo normado $(V, \preceq)$ y $X, Y \in \mathbb{I}^{(2}V$, podemos considerar definir la cercanía entre ellos, basándonos sólamente en la agregación de las cercanías de los intervalos extremos:

$$\nu^{(2}_{\{0,1\}}(X,Y) = \underset{i\in\{0,1\}}{\mathrm{Aggr}}\ \nu(X_i, Y_i) \tag{12.45}$$

Así, por ejemplo, si N es un indicador de cercanía —*cfr.* Def. 256—, obtenemos la cercanía de tipo 2:

$$\mathsf{N}^{(2}(X,Y;\mathfrak{p},\diamond) = \underset{i\in\{0,1\}}{\mathrm{Aggr}}\ \mathsf{N}(X_i, Y_i;\mathfrak{p},\diamond) \tag{12.46}$$

donde el cómputo de $\mathsf{N}(X_i, Y_i; \mathfrak{p}, \diamond)$ depende de que X e Y, sean ambos prototipos o sólo uno de ellos.

Los intervalos extremos X_0 y X_1 de un intervalo X, parecen ser los candidatos naturales a ser los intervalos extremos de un (α, β)-percentilado en X. Pero también podemos considerar el intervalo «intermedio» $X_{1/2} = \langle x_{01}, x_{10}\rangle$, siendo entonces:

$$\nu^{(2}_{\{0,1/2,1\}}(X,Y) = \underset{i\in\{0,1/2,1\}}{\mathrm{Aggr}}\ \nu(X_i, Y_i) \tag{12.47}$$

pudiendo definir una cercanía sup-mid-inf de tipo 2:

$$\mathsf{N}^{(2}(X,Y;\mathfrak{p},\diamond) = \underset{i\in\{0,1/2,1\}}{\mathrm{Aggr}}\ \mathsf{N}(X_i, Y_i;\mathfrak{p},\diamond) \tag{12.48}$$

Ejemplo 258 *(Mixtura de α- y (α, β)-percentilado) Podemos mezclar ambos tipos de percentilado, permitiendo elegir, a la vez, puntos e intervalos. Por ejemplo, al comparar los α-cortes de dos intervalos borrosos de tipo LR (trapezoidales), podríamos elegir puntos como extremos y las α-proyecciones de los núcleos como intervalos intermedios —cfr. Fig. 12.3—. Obsérvese que los núcleos, esos intervalos modales intermedios no tienen porqué ser concéntricos.*

Podemos modificar la cercanía subaditiva sup-inf «borrosificada» $\widetilde{v}^{\diamond(2)}$ —cfr. Def. 246—, definida entre intervalos. Sean I y J dos intervalos de números reales, tales que, como es la norma en esta Tesis, $I = \langle i_0, i_1\rangle$ y $J = \langle j_0, j_1\rangle$. Sean $\varepsilon_{I,0}, \varepsilon_{I,1}, \varepsilon_{J,0}, \varepsilon_{J,1}$ números reales. Consideremos los subintervalos de I:

$$S^I_{1,0} = \langle i_0, i_0 + \varepsilon_{I,0}\rangle \tag{12.49}$$
$$S^I_{1,1} = \langle i_1 - \varepsilon_{I,1}, i_1\rangle \tag{12.50}$$

y los subintervalos de J:

$$S^J_{1,0} = \langle j_0, j_0 + \varepsilon_{J,0}\rangle \tag{12.51}$$
$$S^J_{1,1} = \langle j_1 - \varepsilon_{J,1}, j_1\rangle \tag{12.52}$$

Suponiendo que sea posible «mudar» $\langle i_0, i_1\rangle$ y $\langle j_0, j_1\rangle$ en $\left(S^I_{1,0}, S^I_{1,1}\right)$ y $\left(S^J_{1,0}, S^J_{1,1}\right)$, respectivamente, entonces, proponemos modificar, de una manera natural, $\widetilde{v}^{\diamond(2)}$:

$$\widetilde{v}^{\diamond(2)}(I,J) = \widetilde{v}^{\diamond(2)}\left(S^I_{1,0}, S^J_{1,0}\right) \diamond \widetilde{v}^{\diamond(2)}\left(S^I_{1,1}, S^J_{1,1}\right) \tag{12.53}$$

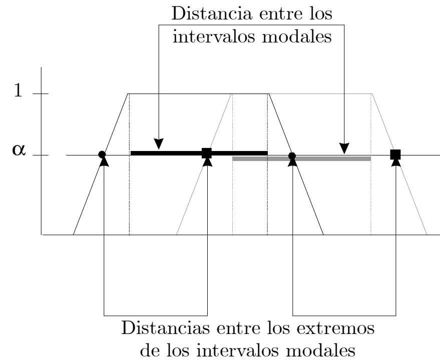


Figura 12.3: *Distancia entre dos subconjuntos borrosos trapezoidales medida como agregación de las distancias entre sus α-cortes, y para cada par de estos, a partir de las distancias entre sus extremos y la distancia entre las α-proyecciones de los núcleos de los subconjuntos borrosos (subintervalos modales del α-corte).*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Cualquier intervalo borroso X de tipo LR puede ser representado virtualmente en el proceso de cómputo, mediante la colección finita de subintervalos (α,β)-percentílicos:

$$X \leftrightsquigarrow \{\{m_l^X-\alpha^X\},\langle m_l^X,m_r^X\rangle,\{m_r^X+\beta^X\}\}$$

Debido a esto, podemos mezclar ambas clases de percentilado, permitiendo elegir, a la vez, puntos e intervalos. Dados dos intervalos borrosos X e Y de tipo LR, y en la cercanía sup-mid-inf aparecerían puntos e intervalos —cfr. Fig. 12.3:

$$\begin{aligned}\widetilde{v}^{\diamond(2)}(X,Y) &= \widetilde{v}^{\diamond(3)}\left(\{m_l^X-\alpha^X\},\{m_l^Y-\alpha^Y\}\right)\\ &\diamond\widetilde{v}^{\diamond(3)}\left(\langle m_l^X,m_r^X\rangle,\langle m_l^Y,m_r^Y\rangle\right)\\ &\diamond\widetilde{v}^{\diamond(3)}\left(\{m_r^X+\beta^X\},\{m_r^Y+\beta^Y\}\right)\end{aligned}$$

12.12 Indicadores de cercanía y lejanía entre subconjuntos Φ-borrosos

12.12.1 Una aproximación basada en secciones verticales

Definición 259 *[443] Sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso no vacío. La función de pertenencia de un* subconjunto Φ-borroso *(también llamado subconjunto borroso con valoración en intervalos) $X:\mathcal{U}\to 2^{[0,1]}$, se define como $X(u)=[\underline{X}(u),\overline{X}(u)]$, un intervalo definido mediante una función de pertenencia inferior y una función de pertenencia superior. O sea, brevemente, $X=(\underline{X},\overline{X})$. Denotamos mediante $\mathfrak{F}_\Phi(\mathcal{U})$ la colección de todos los subconjuntos Φ-borrosos de $\mathcal{U}$.*

Sea X un subconjunto Φ-borroso de $\mathcal{U}$. Sea $X(u)=[\underline{X}(u),\overline{X}(u)]$. Sea $x_\alpha(u)$ el α-percentil de $X(u)$ (en particular, $x_0(u)=\underline{X}(u)$ y $x_1(u)=\overline{X}(u)$). La sección vertical de X es el intervalo de tipo 2, $[0,X(u)]$. En este caso, la Ec. (12.46) se reduce a (12.41) o a (12.42), es decir, que $\mathsf{N}^{(2}([0,X(u)],[0,Y(u)];\mathfrak{p},\diamond)$ es igual a $\mathsf{N}(X(u),Y(u);\mathfrak{p},\diamond)$, una cercanía entre intervalos.

Definición 260 *Sean $\mathcal{U}$ un universo de discurso no vacío y $X,Y\in\mathfrak{F}_\Phi(\mathcal{U})$. Supongamos que para todo $u\in\mathcal{U}$, $X(u)$ e $Y(u)$ están ambos α-percentilados mediante $\mathfrak{p}_u$ (obsérvese que los α-percentilados $\mathfrak{p}_u$ pueden ser diferentes para referentes u distintos). Sea $\mathfrak{p}_\mathcal{U}=\{\mathfrak{p}_u:u\in\mathcal{U}\}$. Sea $\widetilde{v}$ una cercanía borrosa —cfr. Def. 230— y* $\mathrm{Aggr}:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ *una operación de agregación —cfr. Def. 69.*

*i) [**Problema de categorización de prototipos**] Si X e Y pueden ser ambos considerados como prototipos para la misma o diferentes clases de subconjuntos Φ-borrosos de $\mathcal{U}$, entonces, para todo $u\in\mathcal{U}$, $X(u)$ e $Y(u)$ pueden ser también considerados como intervalos prototipo. Introduciendo borrosidad en $\mathfrak{p}_u$, tanto*

para $X(u)$ como para $Y(u)$, para cualquier $u \in \mathcal{U}$, y aplicando (12.41), llegamos al indicador de cercanía $\mathsf{N}_\Phi : \mathfrak{F}_\Phi(\mathcal{U}) \times \mathfrak{F}_\Phi(\mathcal{U}) \to [0,1]$ definido por:

$$\mathsf{N}_\Phi(X, Y; \mathfrak{p}_\mathcal{U}, \diamond) = \operatorname*{Aggr}_{u \in \mathcal{U}} \Diamond_{\alpha \in \mathfrak{p}_u} \widetilde{v}(\widetilde{x_\alpha}(u), \widetilde{y_\alpha}(u)) \tag{12.54}$$

*ii) [**Problema de clasificación de ejemplares**] Si suponemos que sólamente X puede ser considerado como un prototipo (o sea, que Y es un mero ejemplar), entonces, para todo $u \in \mathcal{U}$, sólo $X(u)$ puede ser considerado como un intervalo prototipo. Por tanto, introducimos borrosidad únicamente en $(X(u), \mathfrak{p}_u)$, para todo $u \in \mathcal{U}$. Aplicando (12.42), obtenemos el indicador de cercanía $\mathsf{N}_\Phi : \mathfrak{F}_\Phi(\mathcal{U}) \times \mathfrak{F}_\Phi(\mathcal{U}) \to [0,1]$, definido por:*

$$\mathsf{N}_\Phi(X, Y; \mathfrak{p}_\mathcal{U}, \diamond) = \operatorname*{Aggr}_{u \in \mathcal{U}} \Diamond_{\alpha \in \mathfrak{p}_u} (\widetilde{x_\alpha}(y_\alpha(u))) \tag{12.55}$$

Construimos un **indicador de lejanía** entre subconjuntos Φ-borrosos, de manera análoga, sólo que utilizamos indicadores de lejanía borrosa —*cfr.* Obs. 12.10—, en vez de indicadores de cercanía borrosa —*cfr.* Def. 256—. La negación de un indicador de cercanía borrosa entre subconjuntos Φ-borrosos, es un indicador de lejanía entre subconjuntos borrosos —la razón es la misma que si pensamos en relaciones esenciales de cercanía y lejanía (*cfr.* Obs. 222).

12.12.2 Una aproximación basada en α-cortes

Sea $(V, \preceq)$ un retículo normado, tal que $\preceq$ es total. Sean $I, J \in \mathbb{I}V$. El α-corte de un subconjunto Φ-borroso $A = (\underline{A}, \overline{A})$ de V es el intervalo de tipo 2:

$$\begin{aligned} {}^\alpha A &= [{}^\alpha A_0, {}^\alpha A_1] \\ &= [[{}^\alpha \overline{a_0}, {}^\alpha \underline{a_0}], [{}^\alpha \underline{a_1}, {}^\alpha \overline{a_1}]] \end{aligned}$$

Extendemos la cercanía de tipo 2, $\mathsf{N}^{(2}$ definida entre estos α-cortes —*cfr.* §12.11— a la cercanía $\mathsf{N}_\Phi^{\mathrm{H}}$, definida entre subconjuntos Φ-borrosos:

$$\mathsf{N}_\Phi^{\mathrm{H}}(X, Y; \mathfrak{p}_\mathcal{B}, \diamond) = \operatorname*{Aggr}_{\beta \in (0,1]} \mathsf{N}^{(2}({}^\beta X, {}^\beta Y; \mathfrak{p}_\beta, \diamond) \tag{12.56}$$

donde $p_\mathcal{B} = \{p_\beta : \beta \in (0,1]\}$.

12.13 Síntesis reflexiva

En este capítulo, introducimos el concepto de relación de cercanía desde un punto de vista intuitivo: si algo es cercano a nosotros dos, es que es cercano a tí o a mí, y recíprocamente, si algo es cercano a tí o a mí, es cercano a nosotros dos (si lo es a mí, lo es a tí, a través de mí). De manera similarmente intuitiva, introducimos la noción de relación de lejanía: si algo está lejos de nosotros dos, es que está lejos de tí y de mí, recíprocamente, si algo está lejos de tí y de mí, entonces, está lejos de nosotros dos.

Una relación de cercanía no tiene que ser simétrica. Por ejemplo, una relación de cercanía entre diferentes puntos de una ciudad, bajo el supuesto de que todos los desplazamientos se hacen en coche, cumpliendo el código de circulación. En este caso, el hecho de que un punto A esté cercano a un segundo punto B, no implica el recíproco: basta con imaginar que A y B sean los puntos extremos de una calle de una sola dirección, y que ir (en coche) desde B hasta A, suponga dar un rodeo considerablemente largo.

Extendemos estas relaciones a conectivas distintas a la disyunción y la conjunción y, en §12.2, a relaciones entre subconjuntos completos de un retículo, definiendo la cercanía sup-inf entre dos de ellos, como el agregado (según la conectiva elegida) entre las cercanías entre los extremos. Para conseguir **gradaciones intermedias** en la valoración de verdad de «ser cercano a», introducimos, en §12.3, la noción de cercanía borrosa, obteniendo un resultado particularmente interesante:

Medimos lo cercano que está un subconjunto unitario de un referencial de un subconjunto borroso del mismo referencial, mediante el valor de la función de pertenencia definitoria del subconjunto borroso, evaluada en el referente integrante del subconjunto unitario.

En pocas palabras, **el grado de pertenencia es un grado de cercanía**.

En §12.4, demostramos que la definición de la cercanía borrosa subsume la idea de medir un conjunto borroso usando la cercanía borrosa desde él al universo de discurso; esto es, la cercanía borrosa desde un conjunto hacia el universo de discurso, es una medida borrosa, concretamente la agregación de todos los valores de pertenencia de todos los referentes. En §12.5, mostramos resultados similares para las lejanías borrosas. Todo ello hace que reflexionemos sobre el hecho de que la cercanía a un prototipo (problema de clasificación) puede ser resuelto mediante la elección de una función de pertenencia.

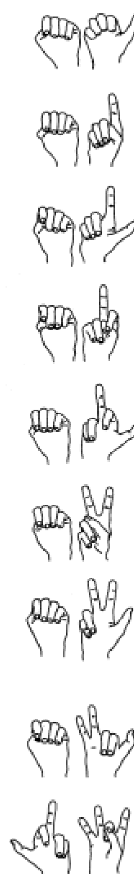
A veces, ciertas propiedades son consideradas como esenciales, y por ello, puede ser importante que dado un prototipo, la medida de cercanía logre diferenciar entre dos ejemplares respecto de una propiedad, mediante las cercanías de cada uno al prototipo. Por ejemplo, Carlo Bertoluzza, Norberto Corral y Antonia Salas [681], destacaban el interés de ser capaz de distinguir entre intervalos concéntricos con un prototipo e intervalos no concéntricos con él, en el proceso de medir distancias entre números borrosos en el entorno de la regresión borrosa, a través de las distancias entre sus α-cortes. Nuestra idea es que la lógica subyacente puede basarse en una cercanía: al decir «B y C están iguales de cerca de A», el término «cerca», aplicado a los conjuntos, intentará cuantificar la compartición de una propiedad, cuanto «más cerca», más cierta será la compartición de la propiedad (§12.7).

Al igual que hacíamos entre intervalos de números reales, introducimos α- y (α, β)-percentilados, e introducimos borrosidad en las cercanías y lejanías definidas. Nótese que la necesidad de α-percentilados parece hacerse patente cuando consideramos puntos característicos que no sean ni los extremos ni el centro. Por ejemplo, pensemos en la co-cuartilidad-1, es decir en la coincidencia en el primer cuartil.

Prestando, en todo momento, una atención particular a los problemas de categorización de prototipos y de clasificación de ejemplares, en §12.10, proponemos indicadores de cercanía y lejanía para intervalos α-percentilados; en §12.11, extendemos estos indicadores a intervalos de tipo 2; y en §12.12, los extendemos a subconjuntos Φ-borrosos, considerando dos aproximaciones: una basada en secciones verticales, y la otra basada en α-cortes.

13

Tercer ensayo: ¿Cuál es la más cercana y la más lejana, *a la vez*?



«Lo he dicho siempre: los hombres son iguales.
La verdadera distinción es tan sólo
la diferencia que puede existir entre ellos.»
—Henri Monnier (1799-1877)
<Grandeza y decadencia de M. Joseph Prudhomme>

«El ojo que ves
no es ojo porque tú lo veas;
es ojo porque te ve.»
—Antonio Machado [1270] (p. 136)

«Decir que dos cosas se parecen porque comparten una propiedad determinada, lo único que significa es que comparten la propiedad.»
—Nelson Goodman [1271]

Varias han sido las aproximaciones que se han desarrollado para definir los conceptos de una manera natural. Este tercer ensayo mantiene el espíritu engendrado, principalmente, por las aproximaciones de Wittgenstein, Rosch *y* Zadeh.
Lo que proponemos y hacemos nosotros es que, en vez de relaciones de parecido, similaridades, diferencias, etc., utilizamos los indicadores de cercanía y de lejanía vistos en el ensayo anterior. Los primeros nos permiten tener una idea sobre la semejanza de un ejemplar no clasificado con respecto a los miembros de una clase dada, mientras que con los segundos podemos determinar su diferencia respecto del resto de las clases. El hecho de que no necesitemos una medida simétrica de cercanía (resp., lejanías), nos conduce a la tercera idea en juego, las cercanías (resp., lejanías) dobles: Dado un ejemplar, no sólo es importante encontrar el prototipo a cuyo perfil de características sea más cercano el perfil del ejemplar, sino también encontrar el prototipo cuyo perfil sea el más cercano al del ejemplar.
Clásicamente, la cuestión es la primera, o en todo caso, ambas son abordadas implícitamente debido a la simetría de las medidas de parecido y semejanza más usadas. La aproximación por doble cercanía, considera ambas cuestiones a la vez, obteniendo un único prototipo, y permitiendo modular la pertinencia o relevancia de cada cuestión en el prototipo finalmente obtenido. Este tipo de asimetría es bien conocido en las ciencias cognitivas.
La aproximación por doble cercanía está parametrizada por operadores de lógica borrosa, así como por operaciones de agregación, algo que resulta frecuente en el desarrollo de Sistemas «Inteligentes» Borrosos. Presentamos el marco de trabajo de las dobles cercanías/lejanías en el escenario de la administración para y con las personas, en concreto, en relación a la Elección multicriterio de personal o puestos. Analizamos cuatro situaciones de elección desde una perspectiva integradora y simultánea de la elección de aspirantes por las organizaciones y su recíproco, la elección de las organizaciones por los candidatos. Ambas situaciones son frecuentes, debido a los constantes cambios en el mercado de trabajo. Finalmente, describimos el método brevemente en otros escenarios: Diagnosis y prognosis médicas sintomáticas (§13.4), Comparación de imágenes digitales (§13.5) y Diagnosis y prognosis médicas por imagen (§13.6). En todos ellos, la descripción final de los prototipos (lo conocido) y de los ejemplares (los hechos) se lleva a cabo mediante subconjuntos Φ*-borrosos de tipo* 2 *(la pertenencia es expresada mediante un intervalo cuyos extremos son subconjuntos borrosos ordinarios). Como, en general, la negación de una cercanía es una lejanía, ya sea en intervalos, en intervalos de tipo* 2*, en conjuntos borrosos, en conjuntos* Φ*-borrosos o en conjuntos* Φ*-borrosos de tipo* 2*, reducimos el estudio principalmente a cercanías.*

13.1 Definiciones de conceptos

«El significado que se asigna a un concepto es una decisión asignada para servir ciertos intereses.»
—C. Churchman [81] (p. 445)

Varias han sido las aproximaciones que se han desarrollado para definir los conceptos de una manera natural. En la aproximación aristotélica, un concepto está definido por una proposición lógica formada por conjunciones de características semánticas (forma normal conjuntiva), que se consideran absolutamente necesarias para caracterizar el concepto en cuestión.

- Inmanuel Kant [1272] sugiere que los únicos conceptos que pueden ser definidos son los **conceptos artificiales**, es decir, aquellos que han sido inventados por algún individuo persiguiendo alguna meta concreta.

  Gregg C. Oden y Lola L. Lopes [1273] examinan cuatro tipos de aproximaciones alternativas.

- El **parecido familiar**, en el sentido de Ludwig Wittgenstein [1274], o sea, que un objeto pertenece a una categoría porque comparte un parecido familiar con el resto de miembros de tal categoría: «Estas cosas y todo lo que se parezca a ellas, son instancias del concepto.»

- La **similaridad con ejemplares** (*similarity-to-instances*), es decir, cuando una categoría se define a partir de miembros confirmados de ella, sin ninguna abstracción descriptiva en base a reglas, por lo que un objeto se caracteriza como miembro de X de acuerdo con la similitud global con los objetos que ya están en la clase X —*cfr.* Brooks [1275, 1276]; Medin y Schaffer [1277]; Nosofsky [1278].

- La **similaridad con un ideal**, esto es, cuando se asocia a cada categoría algún ejemplar ideal, prototipo o representante de la categoría, y la clasificación es posible por comparación con él —*cfr.* Posner y Keele [1279]; Reed [1280]; Rosch y Mervis [1281]—. Este es el caso, por ejemplo, de la comparación con plantillas (*template matching*) y de la propuesta *Pandemonium* de Selfridge [1282].

- La **aproximación borrosa**, donde los conceptos son proposiciones borrosas, confundiéndose las fronteras categoriales. En esta aproximación, el grado en el que pertenece un ejemplar a una categoría puede describirse evaluando, para el ejemplar, las funciones de pertenencia asociadas a las propiedades relevantes de la categoría. Lotfi Asker ZADEH [1283] sostiene que un prototipo no es ni un ejemplar particular, ni un grupo de ejemplares, sino un esquema borroso.

A veces se combinan las aproximaciones de similaridad con ejemplares y con ideal, lo que se lleva a la práctica considerando más de un prototipo por categoría.

Eleanor ROSCH (Heider) y MERVIS [1281] (véase también ROSCH [1284] y MEDIN [1285]) proponen combinar las aproximaciones basadas en el parecido familiar y en la similaridad con el ideal. Ellos sugieren que un prototipo de una categoría debe poseer los atributos más representativos de los miembros de dicha categoría y a la vez, los menos representativos de los no-miembros de tal categoría. Es decir, todo prototipo de una categoría, debe «parecerse» a los miembros de la clase que pretende representar y ser diferente de los miembros de las demás clases.

George LAKOFF y Mark JOHNSON [653] destacan la importancia de las **propiedades interaccionales** en el proceso de determinación del parecido familiar: *«Las propiedades interaccionales relevantes para nuestra comprensión de silla incluyen propiedades perceptuales (apariencia, tacto), propiedades funcionales (permitir que nos sentemos), propiedades de actividad motora (lo que hacemos con nuestros cuerpos al sentarnos y levantarnos, y cuando estamos sobre ellas), y propiedades intencionales (relajarse, comer, escribir cartas, etc.)»* (p. 164, ed. española). Que sepamos, son los primeros en combinar las ideas de WITTGENSTEIN, ROSCH (Heider) y ZADEH.

RICK, BOTHOREL, BOUCHON-MEUNIER, MULLER y RIFQI [1260] combinan la propuesta de ROSCH (Heider) y MERVIS con la aproximación borrosa de ZADEH, proponiendo una técnica borrosa para la detección y análisis de lesiones potenciales de cáncer en las mamas a partir de mamografías.

Por otro lado, algunos investigadores han aventurado explicaciones más difíciles sobre los conceptos. Por ejemplo, el punto de vista que KOMATSU [1286] denomina «**basado en explicaciones**» (*explanation-based view*) —*cfr.* JOHNSON-LAIRD [1287]; LAKOFF [230]; MURPHY y MEDIN [1288]—. El propio KOMATSU explica este punto de vista citando a KEIL:

> *«Ningún concepto individual puede entenderse sin comprender algo su relación con los demás conceptos. Los conceptos no son distribuciones de probabilidad de características o propiedades, o reflejos pasivos de frecuencias de características y correlaciones que suceden en el mundo; tampoco son simples listas de características necesarias y suficientes. No obstante, la mayoría se refieren a cosas del mundo, y giran en torno a relaciones no arbitrarias con frecuencias de características y correlaciones, a la vez que proporcionan explicaciones de tales características y correlaciones. Si es la naturaleza de los conceptos la que proporciona tales explicaciones, entonces podemos considerar que encarnan conjuntos sistemáticos de creencias, creencias que, en gran medida, son causales en la naturaleza.»*
> —F. C. KEIL [1289] (p.1)

Muchos trabajos referentes a las relaciones entre conceptos y lenguaje estudian la presencia —*cfr.* MCNAMARA y MILLER [1290]; SAUSSURE [650]— o ausencia —*cfr.* FODOR, GARRETT, WALKER y PARKES [1291]— de conexiones entre los conceptos. De igual forma, tantos otros estudios que unen los conceptos y el reconocimiento de objetos se refieren a las relaciones entre conceptos y entradas perceptivas, más que a las existentes entre conceptos. De hecho, los conceptos parecen, por un lado, depósitos de conocimiento «auto-contenido», y por otro, entidades intrincadamente interrelacionadas —*cfr.* GOLDSTONE [1292]—. Los conceptos parecen coexistir aisladamente los unos de los otros, cada uno actuando, quizás como detectores independientes a la manera de la propuesta *Pandemonium* de SELFRIDGE [1282], pero también parecen influir los unos en los otros como en una gran red de interconexiones —*cfr.* COLLINS y QUILLIAN [1293]—. Por ejemplo, mientras que algunos contornos son directamente reconocidos como ejemplares de perro, el propio concepto *perro* parece estar muy cercano y muy influido por otros conceptos como mamífero, cola y domesticado —*cfr.* GOLDSTONE [1292].

La opinión de Jerry A. FODOR [652] es la más radical. Para él, el contenido de los conceptos está determinado por entero por relaciones informacionales (mente-palabra), esto es, que los conceptos «típicos» son atómicos, *careciendo de una estructura interna analizable.*

> *«Aunque los motivos para todo esto surgen dentro de la ciencia cognitiva, cambiar al atomismo conceptual requiere cambiar el punto de vista del mundo. Si es así, que así sea.»*
> —Jerry A. FODOR [652] (p. viii)

13.2 Acerca del porqué del apartado anterior

Este tercer ensayo mantiene el espíritu engendrado, principalmente, por WITTGENSTEIN, ROSCH (Heider) y ZADEH. En vez de relaciones de parecido, similaridades, diferencias, etc., utilizamos los **indicadores de cercanía y de lejanía** vistos en el ensayo anterior. Los primeros nos permiten tener una idea sobre la semejanza de un ejemplar no clasificado con respecto a los miembros de una clase dada, mientras que con la segunda podemos determinar su diferencia respecto del resto de las clases. El hecho de que no necesitemos una medida simétrica de cercanía (resp., lejanías), nos conduce a la tercera idea en juego, las cercanías (resp., lejanías) dobles:

Dado un ejemplar,
no sólo es importante encontrar el prototipo
a cuyo perfil de características sea
más cercano el perfil del ejemplar,
sino también encontrar el prototipo
cuyo perfil sea
el más cercano al del ejemplar.

Clásicamente, la cuestión es la primera, o en todo caso, ambas son abordadas implícitamente debido a la simetría de las medidas de parecido y semejanza más usadas. La aproximación por doble cercanía, considera ambas cuestiones a la vez, obteniendo un único prototipo, y permitiendo modular la pertinencia o relevancia de cada cuestión en el prototipo finalmente obtenido. Este tipo de asimetría es bien conocido en las ciencias cognitivas.

Comparado con un estímulo no prototípico, los estímulos prototípicos son mejor aprendidos y recordados. Cuando se presenta una secuencia de estímulos, los sujetos son más dados a recordar estímulos prototípicos, son más dados a asegurar (falsamente) que prototipos que no estaban en la secuencia, sí lo estaban; y de igual modo, son más dados a asegurar (falsamente) que no-prototipos que sí estaban en la secuencia, no lo estaban. Los individuos suelen juzgar un estímulo no-prototípico como más similar a un estímulo prototípico que viceversa. Por ejemplo, la gente suele juzgar el color rosa como bastante similar al rojo, y sin embargo, juzgan el rojo poco similar al rosa (¡tal como si el color rosa no fuese un color prototipo del color rosa!).

«La simetría perfecta sólo existe en la mente del matemático. Nunca se alcanza en el mundo real, ni en la naturaleza, ni en los objetos fabricados por el hombre.»
—A. V. SHUBNIKOV y V. A. KOPTSIK [1294]

La aproximación por doble cercanía está parametrizada por operadores de lógica borrosa, así como por operaciones de agregación, algo que resulta frecuente en el desarrollo de Sistemas «Inteligentes» Borrosos. Presentamos el marco de trabajo de las dobles cercanías/lejanías en el escenario de la administración para y con las personas, en concreto, en relación a la *Elección multicriterio de personal o puestos.* Analizamos cuatro situaciones de elección desde una perspectiva integradora y simultánea de la elección de aspirantes por las organizaciones y su recíproco, la elección de las organizaciones por los candidatos. Ambas situaciones son frecuentes, debido a los constantes cambios en el mercado de trabajo.

Finalmente, describimos el método brevemente en otros escenarios: *Diagnosis y prognosis médicas sintomáticas* (§13.4), *Comparación de imágenes digitales* (§13.5) y *Diagnosis y prognosis médicas por imagen* (§13.6). En todos ellos, la descripción final de los prototipos (lo conocido) y de los ejemplares (los hechos) se lleva a cabo mediante subconjuntos Φ-borrosos de tipo 2 (la pertenencia es expresada mediante un intervalo cuyos extremos son subconjuntos borrosos ordinarios).

En general, la negación de una cercanía es una lejanía, ya sea en intervalos, en intervalos de tipo 2, en conjuntos borrosos, en conjuntos Φ-borrosos o en conjuntos Φ-borrosos de tipo 2. Debido a esto, reducimos el estudio principalmente a cercanías.

13.3 Desarrollo teórico ilustrado: Escenario de elección de personal o puestos de trabajo

«Una cosa acerca de las dos etapas comentadas anteriormente debe quedar muy clara: tú eres el investigador (screener), y los empleadores o las organizaciones que te interesan son los investigados (screenees) durante

las dos primeras etapas. [...] Pero ahora, cuando alcanzas esta tercera etapa, cuando vuelves a los dos o tres lugares que ya visitaste en tu segunda etapa, las cuales decidistes que eran las que se ajustaban a tu perfil mejor que cualquier otra, ahora tú eres el investigado.»
—Richar Nelson Bolles [35] (p. 441).

En esta sección analizamos cuatro situaciones de elección desde una perspectiva integradora y simultánea de la elección de aspirantes por las organizaciones y su recíproco, la elección de las organizaciones por los candidatos. Ambas situaciones son frecuentes, debido a los constantes cambios en el mercado de trabajo.

Lyman W. Porter, Lawler y Hackman [1295] proponen un modelo de clasificación donde intervienen **cuatro fuerzas**, correspondientes a las relaciones de **atracción** y **elección** existentes entre las dos partes intervinientes, la **empresa** y los **aspirantes**. Cada aspirante podrá atraer y, hasta donde le sea posible, elegir, entre diferentes empresas y diferentes puestos de trabajo. Del mismo modo, una empresa tratará de atraer a los aspirantes y elegirá posteriormente entre ellos. Entendemos por **oferta** el conjunto de puestos de trabajo pendientes de ser ocupados, por **demanda** el conjunto de aspirantes dispuestos a desempeñar tales puestos, y por **mercado de trabajo**[1] el sistema oferta-demanda en un entorno espacio-temporal concreto.

La intensidad con la que se presentan las cuatro fuerzas (elección-atracción, aspirantes-empresas), variará según la dinámica del mercado laboral, que tendrá fluctuaciones más importantes en aquellos sectores más influenciados por el desarrollo de las nuevas tecnologías —*cfr.* Gil [900]—. Los dos modelos básicos son:

- Si *la oferta es inferior a la demanda*, las fuerzas principales serán la atracción ejercida por el aspirante y la elección llevada a cabo por la empresa, es decir:
  - el aspirante se esforzará por ser atractivo para las empresas, y
  - las empresas elegirán aspirantes, entre los más atractivos.
- Si *la oferta es superior a la demanda*, o sea, si hay escasez de profesionales, entonces, como apunta Gil [900], se produce un aumento de rotación, revalorizándose la experiencia de los profesionales especializados, aumentando el número de ofertas de trabajo hacia ellos. Esto implica una inflación de salarios (para hacer más atractivas tales ofertas) y una inflación de categorías (se exige demasiada cualificación para puestos de trabajo que realmente no necesitan tanta). A su vez, se produce una utilización de medios más agresivos de reclutamiento, como correos electrónicos, cazadores de talentos (*head hunters*), foros de empleo (*job-fairs*), etc. En este modelo, los aspirantes se ven requeridos por varias empresas, lo que hace aumentar la fuerza de elección que puede realizar el aspirante y la fuerza de atracción que podrá ejercer la empresa. Obsérvese que en este modelo, la atracción ejercida por el aspirante también aumenta. En definitiva, principalmente:
  - la empresa se esforzará por ser atractiva para los aspirantes, y
  - los aspirantes podrán elegir empresas, entre las más atractivas.

Las situaciones planteadas por los modelos de oferta menor que la demanda, y demanda menor que oferta, se reflejan, respectivamente, en los planteamientos de los siguientes problemas de elección:

- **Cuestión** A: ¿Quién es el aspirante $\widehat{A}_{\Rsh J}$, cuyo perfil de capacitación es el más cercano al perfil de requisitos de un determinado puesto de trabajo J? —*cfr.* Fig. 13.1 (a).
- **Cuestión** D: ¿Cuál es el puesto de trabajo $\widehat{J}_{\Rsh A}$, cuyo perfil de requerimientos es el más cercano al perfil de capacitación de un aspirante determinado A? —*cfr.* Fig. 13.1 (d).

Las cuestiones A y D se solucionan encontrando un ejemplar (un individuo para el A y un puesto de trabajo para el D), cuyo perfil sea el más cercano al correspondiente al ideal dado (un puesto de trabajo para el A y un individuo para el D). Así, clásicamente, en la situación A elige la empresa y en la D el candidato. Pero, ¿por qué no permitir que ambos, candidato y empresa, participen de la elección en ambos situaciones? Es decir, como comentábamos en la introducción del capítulo, nuestra duda es, si bajo el mismo supuesto, también *debiera considerarse prototípico el perfil del ejemplar.*

[1] Preferimos el término **mercado de trabajo** a *mercado laboral*. Si bien, en sus orígenes, *trabajo* designaba un lugar de suplicio delimitado por tres postes, donde se ataban caballos y bueyes para herrarlos, el motivo principal de nuestra elección es etimológico. El *ergon* griego (*work* en inglés, *werk* en alemán) comporta el significado de actividad natural. Sin embargo, el vocablo latino *labor*, siempre designa una tarea penosa, evocando también un fracaso, una caída.

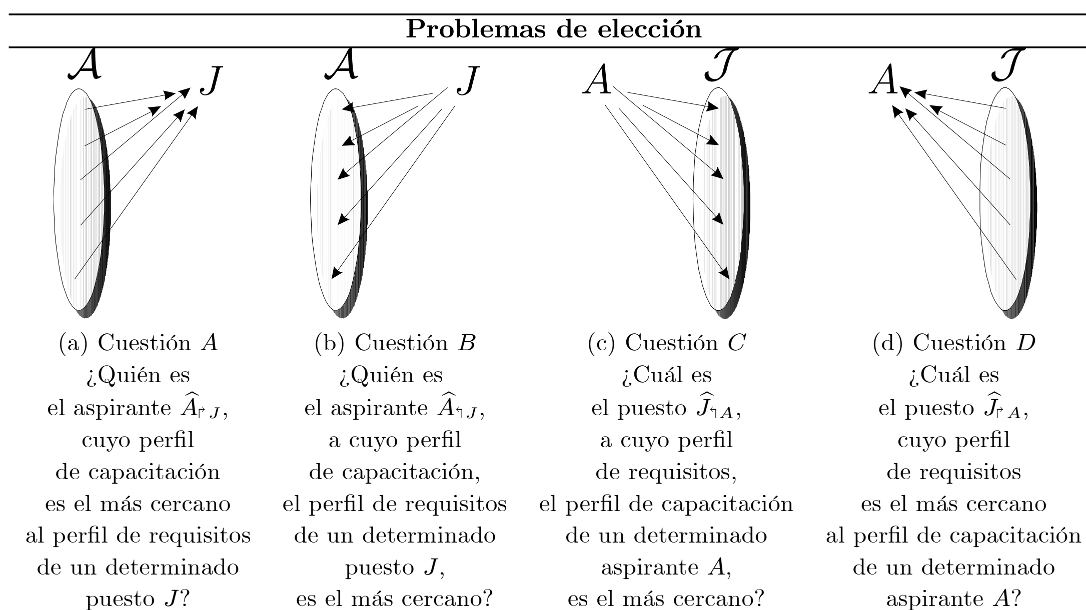
Por ejemplo, la cuestión D refleja la situación de una organización que desea contratar a un individuo concreto A y literalmente le busca un trabajo a su medida, esto es se trata de encontrar un trabajo (ejemplar) para el candidato ideal A. En definitiva, que implícita o explícitamente, elige el candidato. ¿Y si consideramos que también pueda elegir la empresa? Esto intenta reflejar la cuestión C. En ella, el perfil de capacitación del candidato ya no es un ideal sino un mero ejemplar, y son los perfiles de requerimientos de los puestos de trabajo los que se consideran ideales:

- **Cuestión** C: ¿Cuál es el puesto de trabajo $\widehat{J}_{\Lsh A}$, a cuyo perfil de requerimientos, el perfil de capacitación de un aspirante determinado A, es el más cercano? —*cfr.* Fig. 13.1 (c).

Podemos pensar en una nueva cuestión, resultado de la agregación de C y D, y tales que estas últimos sean casos particulares del agregado. Esta agregación permite la compensación entre los grados de satisfacción de las soluciones a ambas cuestiones, impidiendo, si así se desea, las situaciones de elecciones unilaterales por parte de los aspirantes o las organizaciones. Lo llamamos «proceso de doble ajuste» (proponemos *twofold tuning process*, en inglés) —ajuste que se realiza por la operación de agregación.

Razones similares nos llevan a la formulación de otra situación que debemos considerar.

- **Cuestión** B: ¿Cuál es el aspirante $\widehat{A}_{\Lsh J}$, a cuyo perfil de capacitación, el perfil de requerimientos de un determinado puesto J, es el más cercano? —*cfr.* Fig. 13.1 (b).



Problemas de elección			
(a) Cuestión A ¿Quién es el aspirante $\widehat{A}_{\Rsh J}$, cuyo perfil de capacitación es el más cercano al perfil de requisitos de un determinado puesto J?	(b) Cuestión B ¿Quién es el aspirante $\widehat{A}_{\Lsh J}$, a cuyo perfil de capacitación, el perfil de requisitos de un determinado puesto J, es el más cercano?	(c) Cuestión C ¿Cuál es el puesto $\widehat{J}_{\Lsh A}$, a cuyo perfil de requisitos, el perfil de capacitación de un determinado aspirante A, es el más cercano?	(d) Cuestión D ¿Cuál es el puesto $\widehat{J}_{\Rsh A}$, cuyo perfil de requisitos es el más cercano al perfil de capacitación de un determinado aspirante A?

Tabla 13.1: *Las cuatro cuestiones consideradas en referencia a los actos de elección entre aspirantes y puestos de trabajo.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

13.3.1 Una primera solución

> *[...] y no se disponga de más tiempo para encontrar al candidato ideal o, por las razones que sean se quiera seguir adelante con la contratación, generalmente es más eficaz y se obtienen resultados más rápidos cuando es el puesto de trabajo el que se adapta a la persona y no la persona al puesto de trabajo.»*
> —Montserrat Sugrañes [1296].

Cuando una organización planea un proceso de elección de personal, la cuestión clásica es la A, o en todo caso, la cuestión B es abordada implícitamente debido a la simetría de las asignaciones de medida que más frecuentemente intervienen en la maduración de los juicios por comparación. Observemos que en las cuestiones A y C, la elección la lleva a cabo la organización, mientras que en la D, la elección la hace el candidato. La elección efectuada en la situación planteada por B se entenderá mejor si se consideran varios puestos de trabajo; en tal caso, es evidente que la elección la realizan los candidatos.

Cuestiones	Soluciones borrosas	Eliminando borrosidad
A	$A_{\Rsh J} = \sum_{A\in\mathcal{A}} \mathsf{N}_\Phi(J, A; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) / A$	$\widehat{A}_{\Rsh J} = \arg\max_{A\in\mathcal{A}} \mathsf{N}_\Phi(J, A; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star)$ $= \arg\max_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{Aggr}_{C\in\mathcal{C}} \star_{\alpha\in\mathfrak{p}_C} \widetilde{j_\alpha}(a_\alpha(C))$
B	$A_{\Lsh J} = \sum_{A\in\mathcal{A}} \mathsf{N}_\Phi(A, J; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) / A$	$\widehat{A}_{\Lsh J} = \arg\max_{A\in\mathcal{A}} \mathsf{N}_\Phi(A, J; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star)$ $= \arg\max_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{Aggr}_{C\in\mathcal{C}} \star_{\alpha\in\mathfrak{p}_C} \widetilde{a_\alpha}(j_\alpha(C))$
C	$J_{\Lsh A} = \sum_{J\in\mathcal{J}} \mathsf{N}_\Phi(J, A; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) / J$	$\widehat{J}_{\Lsh A} = \arg\max_{J\in\mathcal{J}} \mathsf{N}_\Phi(J, A; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star)$ $= \arg\max_{J\in\mathcal{J}} \mathrm{Aggr}_{C\in\mathcal{C}} \star_{\alpha\in\mathfrak{p}_C} \widetilde{j_\alpha}(a_\alpha(C))$
D	$J_{\Rsh A} = \sum_{J\in\mathcal{J}} \mathsf{N}_\Phi(A, J; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) / J$	$\widehat{J}_{\Rsh A} = \arg\max_{J\in\mathcal{J}} \mathsf{N}_\Phi(A, J; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star)$ $= \arg\max_{J\in\mathcal{J}} \mathrm{Aggr}_{C\in\mathcal{C}} \star_{\alpha\in\mathfrak{p}_C} \widetilde{a_\alpha}(j_\alpha(C))$

Tabla 13.2: *Soluciones borrosas y nítidas (una vez eliminada la borrosidad) a las cuatro cuestiones planteadas en referencia a los actos de elección entre aspirantes y puestos de trabajo. El operador* N_Φ *es un indicador de cercanía entre conjuntos* Φ*-borrosos, que consideramos definido según la Ec. (12.55),* $\star$ *es una conectiva de lógica borrosa y* $\mathrm{Aggr} : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ *es una operación de agregación —cfr. supra Def. 69.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Consideremos una colección $\mathcal{J}$ de puestos de trabajo en oferta, y un conjunto $\mathcal{A}$ de aspirantes. Supongamos que todos los puestos van a ser cubiertos evaluando a los aspirantes sobre el mismo universo de discurso $\mathcal{C}$ de cualificaciones (capacidades, competencias, habilidades, requisitos, roles, etc.). Supongamos que, en base a la experiencia, es posible describir cualquier puesto de trabajo $J \in \mathcal{J}$, mediante un subconjunto Φ-borroso de $\mathcal{C}$, $J = (\underline{J}, \overline{J})$, donde para todo $J \in \mathcal{J}$, $\underline{J}(C), \overline{J}(C) \in [0,1]$ indican las estimaciones de las cotas inferior y superior del rango de destreza asociado con el requerimiento de la capacidad C en un candidato que aspire al puesto J. De manera similar, supongamos que las capacidades de un aspirante A pueden describirse mediante un subconjunto Φ-borroso de $\mathcal{C}$, $A = (\underline{A}, \overline{A})$, donde para todo $C \in \mathcal{C}$, el intervalo $\langle \underline{A}(C), \overline{A}(C) \rangle \subseteq [0,1]$ denota el rango de destreza asignado por el decisor a la capacidad C para el candidato A.

En principio, son varias las posibilidades de solución de las cuestiones $A - D$. Obsérvese que para cada una de ellas, o bien el aspirante o bien el puesto, es un prototipo, pero *nunca ambos a la vez.* Trabajaremos con **cercanías y lejanías borrosas** en **problemas de clasificación de ejemplares**, algo que ya hemos estudiado en el segundo ensayo. En la Tabla 13.2 se recogen las soluciones a estas cuatro cuestiones, soluciones borrosas y nítidas, una vez eliminada la borrosidad en las primeras, siendo el operador N_Φ un indicador de cercanía entre conjuntos Φ-borrosos, que consideramos definido según la Ec. (12.55), $\star$ es una conectiva de lógica borrosa y $\mathrm{Aggr} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es una operación de agregación —*cfr. supra* Def. 69.

No obstante lo anterior, dados los perfiles A y J, de un aspirante y de un puesto, podemos considerar, no sólo la cercanía de A (resp., J) a J (resp., A), sino también la lejanía de A (resp., J) al conjunto $\mathcal{J}\backslash\{J\}$ (resp., $\mathcal{A}\backslash\{A\}$). En este caso las cuestiones, a las que debemos responder, son las siguientes:

- **Cuestión A':** ¿Quién es el aspirante $\widehat{A}_{\Rsh J}$, cuyo perfil de capacitación es el más cercano al perfil de requisitos de un determinado puesto de trabajo J, y a la vez, es el más lejano, respecto de los perfiles de requisitos del resto de puestos de trabajo de $\mathcal{J}$?

- **Cuestión B':** ¿Cuál es el aspirante $\widehat{A}_{\Lsh J}$, a cuyo perfil de capacitación, el perfil de requerimientos de un determinado puesto J, es el más cercano, y a la vez, es el más lejano, respecto de los perfiles de capacitación del resto de aspirantes de $\mathcal{A}$?

- **Cuestión C':** ¿Cuál es el puesto de trabajo $\widehat{J}_{\Lsh A}$, a cuyo perfil de requerimientos, el perfil de capacitación de un aspirante determinado A, es el más cercano, y a la vez, es el más lejano, respecto de los perfiles de requisitos del resto de puestos de trabajo de $\mathcal{J}$?

- **Cuestión D':** ¿Cuál es el puesto de trabajo $\widehat{J}_{\Rsh A}$, cuyo perfil de requerimientos es el más cercano al perfil de capacitación de un aspirante determinado A, y a la vez, es el más lejano, respecto de los perfiles de capacitación del resto de aspirantes de $\mathcal{A}$?

En la Tabla 13.3, mostramos las soluciones borrosas a estas cuestiones. En ella, F_Φ denota un indicador de lejanía entre conjuntos Φ-borrosos y $\diamond$ es una conectiva de lógica borrosa.

Igual que anteriormente, puede eliminarse la borrosidad de estas soluciones. Por ejemplo, la Tabla 13.4 muestra los resultados de la eliminación de borrosidad mediante el máximo y tomando $\mathsf{F}_\Phi(X, Y; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) = \mathcal{N}(\mathsf{N}_\Phi(X, Y; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star))$, con $\mathcal{N}$ una negación.

Cuestiones	Soluciones borrosas
A'	$A_{\Rsh J} = \sum_{A \in \mathcal{A}} \Big(\mathsf{N}_\Phi(J, A; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) \diamond (\mathrm{Aggr}_{A^* \in \mathcal{A} \setminus \{A\}} \mathsf{F}_\Phi(J, A^*; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star)) \Big) \diagup A$
B'	$A_{\Lsh J} = \sum_{A \in \mathcal{A}} \Big(\mathsf{N}_\Phi(A, J; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) \diamond (\mathrm{Aggr}_{A^* \in \mathcal{A} \setminus \{A\}} \mathsf{F}_\Phi(A^*, J; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star)) \Big) \diagup A$
C'	$J_{\Lsh A} = \sum_{J \in \mathcal{J}} \Big(\mathsf{N}_\Phi(J, A; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) \diamond (\mathrm{Aggr}_{J^* \in \mathcal{J} \setminus \{J\}} \mathsf{F}_\Phi(J^*, A; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star)) \Big) \diagup J$
D'	$J_{\Rsh A} = \sum_{J \in \mathcal{J}} \Big(\mathsf{N}_\Phi(A, J; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) \diamond (\mathrm{Aggr}_{J^* \in \mathcal{J} \setminus \{J\}} \mathsf{F}_\Phi(A, J^*; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star)) \Big) \diagup J$

Tabla 13.3: *Soluciones borrosas a las cuatro nuevas cuestiones planteadas en referencia a los actos de elección entre aspirantes y puestos de trabajo, considerando cercanías y lejanías. Los operadores* N_Φ *y* F_Φ *son indicadores de cercanía y lejanía, respectivamente, entre conjuntos* Φ*-borrosos,* $\star$ *y* $\diamond$ *son conectivas de lógica borrosa y* $\mathrm{Aggr} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *es una operación de agregación —cfr. supra Def. 69.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Cuestiones	Soluciones nítidas (eliminada la borrosidad)
A'	$\widehat{A}_{\Rsh J} = \arg\max_{A \in \mathcal{A}} \Big(\mathsf{N}_\Phi(J, A; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) \diamond (\mathrm{Aggr}_{A^* \in \mathcal{A} \setminus \{A\}} \mathcal{N}\,(\mathsf{N}_\Phi(J, A^*; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star))) \Big)$ $= \arg\max_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{Aggr}_{C \in \mathcal{C}} \star_{\alpha \in \mathfrak{p}_C} \widetilde{j_\alpha}(a_\alpha(C))$
B'	$\widehat{A}_{\Lsh J} = \arg\max_{A \in \mathcal{A}} \Big(\mathsf{N}_\Phi(A, J; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) \diamond (\mathrm{Aggr}_{A^* \in \mathcal{A} \setminus \{A\}} \mathcal{N}\,(\mathsf{N}_\Phi(A^*, J; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star))) \Big)$ $= \arg\max_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{Aggr}_{C \in \mathcal{C}} \star_{\alpha \in \mathfrak{p}_C} \widetilde{a_\alpha}(j_\alpha(C))$
C'	$\widehat{J}_{\Lsh A} = \arg\max_{J \in \mathcal{J}} \Big(\mathsf{N}_\Phi(J, A; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) \diamond (\mathrm{Aggr}_{J^* \in \mathcal{J} \setminus \{J\}} \mathcal{N}\,(\mathsf{N}_\Phi(J^*, A; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star))) \Big)$ $= \arg\max_{J \in \mathcal{J}} \mathrm{Aggr}_{C \in \mathcal{C}} \star_{\alpha \in \mathfrak{p}_C} \widetilde{j_\alpha}(a_\alpha(C))$
D'	$\widehat{J}_{\Rsh A} = \arg\max_{J \in \mathcal{J}} \Big(\mathsf{N}_\Phi(A, J; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) \diamond (\mathrm{Aggr}_{J^* \in \mathcal{J} \setminus \{J\}} \mathcal{N}\,(\mathsf{N}_\Phi(A^*, J; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star))) \Big)$ $= \arg\max_{J \in \mathcal{J}} \mathrm{Aggr}_{C \in \mathcal{C}} \star_{\alpha \in \mathfrak{p}_C} \widetilde{a_\alpha}(j_\alpha(C))$

Tabla 13.4: *Soluciones nítidas (una vez eliminada la borrosidad) a las cuatro nuevas cuestiones planteadas en referencia a los actos de elección entre aspirantes y puestos de trabajo, considerando cercanías y lejanías. Los operadores* N_Φ *y* F_Φ *son indicadores de cercanía y lejanía, respectivamente, entre conjuntos* Φ*-borrosos,* $\star$ *y* $\diamond$ *son conectivas de lógica borrosa y* $\mathrm{Aggr} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *es una operación de agregación —cfr. supra Def. 69.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Quizás la única consideración es que en las cuestiones A' y C', parece en principio más apropiado usar una conorma triangular como operación de agregación, ya que entonces, se exigirá mayores valores para las cualificaciones necesarias para los puestos de trabajo. En los casos B' y D', podríamos usar una norma triangular, pues de este modo, reduciríamos la aptitud global del candidato. No obstante, cualquier otra elección para la operación de agregación actuará como compensadora entre las situaciones límites comentadas —*cfr.* §6.3.

13.3.2 Indicadores de doble cercanía y doble lejanía entre Φ-borrosos

Sea $\mathfrak{P}_{1,1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{J})$ la colección de todos los subconjuntos binarios de $\mathcal{A} \cup \mathcal{J}$, en los que un elemento es un aspirante y el otro un puesto ofertado. Un **indicador de doble cercanía** entre A y J, es cualquier aplicación $\mathsf{N}_\Phi^{\circledcirc} : \mathfrak{P}_{1,1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{J}) \to [0,1]$:

$$\mathsf{N}_\Phi^{\circledcirc}(\{A,J\}; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) = \mathsf{N}_\Phi(A,J;\mathfrak{p}_\mathcal{C},\star) \circledcirc \mathsf{N}_\Phi(J,A;\mathfrak{p}_\mathcal{C},\star) \tag{13.1}$$

donde N_Φ es un indicador de cercanía entre subconjuntos Φ-borrosos y $\star$ y $\circledcirc$ son conectivas borrosas.

Si $\circledcirc$ es una norma triangular $\mathcal{T}$ en el intervalo ⟨<diferente>,<semejante>⟩, concede mayor importancia a la no semejanza, pues $\mathcal{T}$(<diferente>, $\cdot$) =<diferente>), mientras que una conorma triangular $\mathfrak{T}$ destaca la semejanza, ya que $\mathfrak{T}$(<semejante>, $\cdot$) =<semejante>).

Un **indicador de doble lejanía** entre los perfiles de un aspirante A y de un puesto de trabajo J, es cualquier aplicación $\mathsf{F}_\Phi^{\circ} : \mathfrak{P}_{1,1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{J}) \to [0,1]$:

$$\mathsf{F}_\Phi^{\circ}(\{A,J\}; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) = \mathsf{F}_\Phi(A,J;\mathfrak{p}_\mathcal{C},\star) \circ \mathsf{F}_\Phi(J,A;\mathfrak{p}_\mathcal{C},\star) \tag{13.2}$$

donde F_Φ es un indicador de lejanía entre subconjuntos Φ-borrosos y $\star$ y $\circ$ son conectivas borrosas.

Observemos que el comportamiento de $\circ$ es opuesto al de la correspondiente conectiva, $\circledcirc$, en el caso de los indicadores de cercanía. Si $\circ$ es una norma triangular $\mathcal{T}$ en el intervalo ⟨<semejante>,<diferente>⟩, entonces, concede mayor importancia a la semejanza, pues $\mathcal{T}$(<semejante>, $\cdot$) =<semejante>, mientras que una conorma triangular destaca la no semejanza, pues $\mathfrak{T}$(<diferente>, $\cdot$) =<diferente>).

Teniendo en cuenta todos los puestos J^* en $\mathcal{J}\backslash\{J\}$, calculamos un **indicador de doble lejanía global** entre A y todos los J^*, usando una operación de agregación, $\mathsf{F}_\Phi^{\circ} : \mathfrak{P}_{1,1}(\mathcal{A} \cup \mathcal{J}) \to [0,1]$:

$$\mathsf{F}_\Phi^{\circ}(\{A,J\}; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) = \operatorname*{Aggr}_{J^* \in \mathcal{J}\backslash\{J\}} \left(\mathsf{F}_\Phi(A,J^*;\mathfrak{p}_\mathcal{C},\star) \circ \mathsf{F}_\Phi(J^*,A;\mathfrak{p}_\mathcal{C},\star)\right) \tag{13.3}$$

donde F_Φ es un indicador de lejanía entre subconjuntos Φ-borrosos, y $\star$ y $\circ$ son conectivas borrosas.

13.3.3 «Plegado» de las cuestiones

El objetivo final en las cuestiones A' y B' es elegir un aspirante; en las cuestiones C' y D', elegir un puesto. Como el tratamiento es similar, pensemos, por ejemplo, en esta última situación. Podemos fusionar (en cierta manera, «plegar» nuestros razonamientos) $\widehat{J}_{\Lsh A}$ y $\widehat{J}_{\Rsh A}$ —*cfr.* Tabla 13.4—, originando el subconjunto borroso de $\mathcal{J}$:

$$J_A = \sum\nolimits_{J \in \mathcal{J}} \left(\mathsf{N}_\Phi^{\circledcirc}(\{A,J\};\mathfrak{p}_\mathcal{C},\star) \diamond \mathsf{F}_\Phi^{\circ}(\{A,J\};\mathfrak{p}_\mathcal{C},\star)\right) \big/ J \tag{13.4}$$

donde $\mathsf{N}_\Phi^{\circledcirc}$ y F_Φ° están definidas, respectivamente, por las Ecs. (13.1) y (13.3). Observemos que J_A, no sólo fusiona $J_{\Lsh A}$ y $J_{\Rsh A}$, nuestros razonamientos, sino también los pensamientos de Ludwig Wittgenstein, Lotfi A. Zadeh, y Eleanor Rosch (Heider) y Mervis.

Dado un aspirante $A \in \mathcal{A}$, y como el conjunto de valores $\operatorname{Ran} J_A = \{J_A(J) : J \in \mathcal{J}\} \subset [0,1]$ está totalmente ordenado, entonces proponemos eliminar la borrosidad de J_A en la forma:

$$\widehat{J}_A = \arg\max_{J \in \mathcal{J}} J_A(J) \tag{13.5}$$

lo que, en nuestra opinión, implica obtener el puesto de trabajo más relevante y adecuado para el candidato A.

Observación 261 ***(Un problema bi-objetivo)*** *Observemos que, en vez del subconjunto borroso (13.4), podríamos argumentar que en realidad tenemos el subconjunto* $[0,1]^2$*-borroso*[2] *de* $\mathcal{J}$*:*

$$\ddot{J}_A = \sum\nolimits_{J\in\mathcal{J}} \left(\mathsf{N}^{\circledcirc}_{\Phi}(\{A,J\};\mathfrak{p}_{\mathcal{C}},\star), \mathsf{F}^{\circ}_{\Phi}(\{A,J\};\mathfrak{p}_{\mathcal{C}},\star)\right) \diagup J \tag{13.6}$$

De este modo, estamos ante una situación bi-objetivo. En este marco de trabajo, $[0,1]\times[0,1]$ *es el* espacio de criterios*,* $J\in\mathfrak{F}(\mathcal{S})$ *son las* variables de decisión*;* $\mathfrak{F}_{\Phi}(\mathcal{S})$ *es el* espacio de decisión*,* $\mathcal{J}$ *es el conjunto de* alternativas factibles*, y* $\mathsf{N}^{\circledcirc}_{\Phi}(s_A,s_{\mathcal{J}})\times\mathsf{F}^{\circ}_{\Phi}(s_A,s_{\mathcal{J}})$ *es el conjunto de* resultados factibles*. Recordemos que una solución J se dice que es eficiente (no dominada u óptima en el sentido de* PARETO*— para este problema bi-objetivo, precisamente si no existe ningún* $J'\in\mathcal{J}$ *tal que satisfaga alguna de las siguientes afirmaciones:*

$$\mathsf{N}^{\circledcirc}_{\Phi}(A,J)\le\mathsf{N}^{\circledcirc}_{\Phi}(A,J') \;\wedge\; \mathsf{F}^{\circ}_{\Phi}(A,J)<\mathsf{F}^{\circ}_{\Phi}(A,J') \tag{13.7}$$

$$\mathsf{N}^{\circledcirc}_{\Phi}(A,J)<\mathsf{N}^{\circledcirc}_{\Phi}(A,J') \;\wedge\; \mathsf{F}^{\circ}_{\Phi}(A,J)\le\mathsf{F}^{\circ}_{\Phi}(A,J') \tag{13.8}$$

$$\mathsf{N}^{\circledcirc}_{\Phi}(A,J)<\mathsf{N}^{\circledcirc}_{\Phi}(A,J') \;\wedge\; \mathsf{F}^{\circ}_{\Phi}(A,J)<\mathsf{F}^{\circ}_{\Phi}(A,J') \tag{13.9}$$

Queremos obtener el puesto J^{BOP} *que maximice los dos objetivos a la vez:*

$$J^{\mathrm{BOP}} = \arg\max_{J\in\mathcal{J}}\{\mathsf{N}^{\circledcirc}_{\Phi}(\{A,J\};\mathfrak{p}_{\mathcal{C}},\star), \mathsf{F}^{\circ}_{\Phi}(\{A,J\};\mathfrak{p}_{\mathcal{C}},\star)\} \tag{13.10}$$

Si realmente perseguimos maximizar conjuntamente ambos objetivos*, entonces, parece del todo razonable usar una t-norma* $\mathcal{T}$ *para representar tal conjunción. Así, (13.10) se transforma en un problema de un objetivo simple (*SOP*):*

$$J^{\mathrm{T-SOP}} = \arg\max_{J\in\mathcal{J}}\mathcal{T}(\mathsf{N}^{\circledcirc}_{\Phi}(\{A,J\};\mathfrak{p}_{\mathcal{C}},\star), \mathsf{F}^{\circ}_{\Phi}(\{A,J\};\mathfrak{p}_{\mathcal{C}},\star)) \tag{13.11}$$

El problema ahora reside en que la solución depende de la t-norma elegida $\mathcal{T}'$*. Finalmente, usamos como operación de agregración en (13.19) y (13.3) una simple media, aunque los pesos, que asignan diferentes relevancias a los referentes, también pueden considerarse.*

Diferente habría sido que, por ejemplo, hubiésemos querido condicionar la satisfacción del objetivo de lejanía a la del objetivo de cercanía. En este caso, y recordando la expresión de la puntuación unitaria (unit score) de Ronald R. YAGER *—cfr. Ec. 8.3— y la de la inclusión de Isabelle* BLOCH *—cfr. Ec. 4.81—, podríamos, por ejemplo, usar un esquema lógico de implicación* ($p\to q$)*, en cuyo caso, introduciendo borrosidad de una manera natural, tendríamos, que la Ec. 13.4 queda:*

$$J_A = \sum\nolimits_{J\in\mathcal{J}} \mathcal{T}\left(\mathcal{N}(\mathsf{N}^{\circledcirc}_{\Phi}(\{A,J\};\mathfrak{p}_{\mathcal{C}},\star)), \mathsf{F}^{\circ}_{\Phi}(\{A,J\};\mathfrak{p}_{\mathcal{C}},\star)\right) \diagup J \tag{13.12}$$

lo que expresaría el grado en el que el concepto de lejanía global se infiere a partir del concepto de cercanía local.

Diferente también habría sido que, por ejemplo, hubiésemos querido expresar que la satisfacción de ambos objetivos no están correlacionados. Inspirados, de nuevo, en la expresión de la puntuación unitaria (unit score) de YAGER *y en la de la inclusión de* BLOCH*, podríamos, precisamente, usar* $\neg(p\to q)$*. Es decir, que dados dos conjuntos* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$*, y dado* $A\in\mathcal{A}$*, encontrar el* $B\in\mathcal{B}$ *más afín a* $A\in\mathcal{A}$*, significa encontrar el* $B\in\mathcal{B}$ *más cercano a* $A\in\mathcal{A}$*, y que a la vez, sea el más lejano con respecto a todos los* $A'\in\mathcal{A}\backslash\{A\}$*, pero teniendo en cuenta que no es cierto que ocurra que el haber encontrado el* $B\in\mathcal{B}$ *más cercano a* $A\in\mathcal{A}$ *implique que B sea precisamente, el que posee una mayor lejanía con respecto a todos los* $A'\in\mathcal{A}\backslash\{A\}$*. Por ejemplo, la Ec. 13.4 podría quedar:*

$$J_A = \sum\nolimits_{J\in\mathcal{J}} \mathcal{T}\left(\mathsf{N}^{\circledcirc}_{\Phi}(\{A,J\};\mathfrak{p}_{\mathcal{C}},\star), \mathcal{N}(\mathsf{F}^{\circ}_{\Phi}(\{A,J\};\mathfrak{p}_{\mathcal{C}},\star))\right) \diagup J \tag{13.13}$$

Observación 262 *Todo lo dicho para un modelo de elección, pensando en elegir un candidato o un puesto, es posible extenderlo a los que se conocen como* ***modelos de clasificación****, por ejemplo, cuando existen varias ofertas de trabajo por candidato y varios candidatos por oferta. Lógicamente, un modelo de elección «unitario» no garantiza la utilización plena de los talentos que la sociedad puede ofrecer —cfr.* CHIAVENATO *[852];* UHRBROCK *[1297].*

[2] Sea $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso. La función de pertenencia de un **subconjunto $[0,1]^2$-borroso** A, es cualquier aplicación de $\mathcal{U}$ en $[0,1]^2$, o sea, que para cualquier referente $u\in\mathcal{U}$, $A(u)$ es un par ordenado de elementos de $[0,1]$ —*cfr.* KAUFMANN y GIL ALUJA [412] (pp. 179-184)—. (Obsérvense las diferencias con los subconjuntos de tipo 2 y con los subconjuntos Φ-borrosos).

13.3.4 Perfiles como subconjuntos Φ-borrosos de tipo 2: Calificación con intervalos lingüísticos

A veces, resulta muy difícil asignar un valor lingüístico concreto de una escala a nuestra opinión. Por ejemplo, seguro que más de una vez, en referencia a una habilidad o competencia concreta, diremos de un candidato que lo posee en un grado entre alto y muy alto, sin saber precisar ninguno de ambos[3]. Entonces, ¿por qué no usar el *intervalo lingüístico* ⟨alto, muy alto⟩?

Tradicionalmente, una de las soluciones ha sido realizar un **sobreetiquetado**, utilizando valores lingüísticos intermedios definidos *ad hoc*; claro que la consecuencia inmediata es que el lenguaje resultante es poco natural —*cfr.* Godó [1298]; Olivas y Sobrino [1299]—. Estos últimos autores proponen un sobreetiquetado que participe de una mayor naturalidad en el lenguaje. Limitan a tres las posibles supervaloraciones borrosas: bueno, regular y malo. Si alto es una etiqueta del primer nivel, este procedimiento generaría etiquetas indirectas en el segundo nivel, tales como regular (entre los) alto(s).

Nuestra propuesta es utilizar **«intervalos lingüísticos»**, esto es, intervalos cuyos extremos sean etiquetas lingüísticas. Lo que subyace es que si no sabemos clasificar el grado de destreza de un candidato, si bien como notable, si bien como sobresaliente, no debemos preocuparnos. Expresemos el grado de destreza de dicho candidato en cuanto a la habilidad en cuestión como el intervalo lingüístico

⟨notable, sobresaliente⟩

lo cual corresponde a la expresión coloquial:

«está entre el notable y el sobresaliente»

significando con ello nuestra incapacidad para decidirnos, nuestra indeterminación (aunque en la práctica, los seres humanos deciden: no existe el *perpetuum dubium*).

En el escenario de elección de personal y puestos de trabajo en el que estamos inmersos, describiremos los perfiles de los aspirantes y de los puestos mediante subconjuntos Φ-borrosos de tipo 2.

Basándonos en la definición de subconjuntos borrosos de tipo 2 —*cfr.* Mizumoto y Tanaka [434]—, proponemos, a continuación, la definición de subconjunto Φ-borroso de tipo 2.

Definición 263 *Un s**ubconjunto Φ-borroso de tipo 2**, A, de un universo de discurso no vacío $\mathcal{U}$, se caracteriza por una función de pertenencia Φ-borrosa $A : \mathcal{U} \to [0,1]^{[0,1]} \times [0,1]^{[0,1]}$ (donde Y^X indica, como es usual, el conjunto de funciones de X en Y). Para todo $u \in \mathcal{U}$, los valores $A(u) \in \mathfrak{F}([0,1]) \times \mathfrak{F}([0,1])$ los denominamos* grados Φ-borrosos*:*

$$\begin{aligned} A(u) &= (\underline{A(u)}, \overline{A(u)}) \qquad (13.14) \\ &= \left(\int_{[0,1]} \underline{A(u)}(x) \diagup x, \int_{[0,1]} \overline{A(u)}(x) \diagup x \right) \end{aligned}$$

con $\underline{A(u)}, \overline{A(u)} \in [0,1]^{[0,1]}$ las funciones inferior y superior de pertenencia para el grado Φ-borroso $A(u)$.

Si, por ejemplo, A representa el perfil de un candidato, entonces, estas funciones $\underline{A(u)}$ y $\overline{A(u)}$ indican las estimaciones (borrosas) de las cotas inferior y superior del rango de destreza asignado por el decisor a la capacidad requerida u para el candidato A. Esto refleja la situación natural en la que indicamos esos rangos lingüísticamente. En nuestro caso concreto, supongamos que $\underline{A(u)}$ y $\overline{A(u)}$ toman valores del conjunto de términos:

$$\mathcal{L}([0,1]) = \{\text{ninguna, escasa, mejorable, normal, notable, sobresaliente, óptima}\} \qquad (13.15)$$

La situación más frecuente es que estos valores no sean precisos. Esta es la razón por la que los representamos por subconjuntos Φ-borrosos de tipo 2. En general, existen varios expertos o escenarios de expertos. Los valores lingüísticos, particularmente las formas de sus funciones de pertenencia, son estimadas a partir del conocimiento de esos expertos o escenarios, comunidades, grupos o equipos de expertos. Los subconjuntos Φ-borrosos de tipo 2 nos ayudan a representar esta incertidumbre. La extensión a subconjuntos de mayor tipo, ya sean borrosos o Φ-borrosos es casi inmediata, pero carece de interés, tanto por su complejidad computacional, como por su menor grado de representatividad de la realidad, al menos a nuestro parecer y para nuestros propósitos.

[3]En nuestra experiencia docente también sucede. ¿Cuál es la calificación de un alumno, notable, o sobresaliente, o quizás notable alto, o notable muy alto, o notable extraordinariamente alto? Si esto produce sonrisas en el lector, por favor, vuelva a la página 155, donde criticamos el uso de engendros como 7,734 para calificar lo aprendido.

Ejemplo 264 *Dados un aspirante A y una cualidad C, un ejemplo de rango de destreza prototípico estimado o asignado por un centro experto o decisor al aspirante A, en relación a C, podría ser el subconjunto Φ-borroso de tipo 2:*

$$\begin{aligned} A(C) &= (\underline{A(C)}, \overline{A(C)}) \\ &= [\textsf{mejorable, normal}] \end{aligned} \tag{13.16}$$

donde, recordemos, mejorable *y* normal *son etiquetas lingüísticas, modelizadas como subconjuntos borrosos. O sea, que el perfil Φ-borroso de tipo 2, de un aspirante bien pudiera ser:*

$$A = \textsf{mejorable}/C_1 + [\textsf{notable, sobresaliente}]/C_2 + [\textsf{normal, notable}]/C_3 + ... + \textsf{normal}/C_n \tag{13.17}$$

13.3.5 Indicadores de cercanía y lejanía entre subconjuntos Φ-borrosos de tipo 2

Dados $A, J \in \mathfrak{F}_\Phi^{(2}(\mathcal{C})$, definimos un indicador de cercanía, agregando todas las cercanías locales evaluadas en cada cualidad $C \in \mathcal{C}$. Para cualquier cualidad C, debemos evaluar la cercanía entre dos conjuntos Φ-borrosos. De este modo, siendo $\text{Aggr} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ una operación de agregación —*cfr.* Def. 69—, entonces, un indicador de cercanía entre conjuntos Φ-borrosos de tipo 2, parece ser cualquier aplicación $\mathsf{N}_\Phi^{(2} : \mathfrak{F}_\Phi^{(2}(\mathcal{C}) \times \mathfrak{F}_\Phi^{(2}(\mathcal{C}) \to [0,1]$, de la forma:

$$\mathsf{N}_\Phi^{(2}(J, A; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) = \underset{C\in\mathcal{C}}{\text{Aggr}}\, \mathsf{N}_\Phi(J(C), A(C); \mathfrak{p}_C, \star) \tag{13.18}$$

donde N_Φ es un indicador de cercanía entre subconjuntos borrosos —*cfr.* §12.12—. La situación es similar para los indicadores de lejanía, al igual que las demás propuestas. Por ejemplo, una posible respuesta a la cuestión C, bajo esta aproximación basada en subconjuntos Φ-borrosos de tipo 2, es el subconjunto borroso de $\mathcal{J}$:

$$J_{\neg A} = \sum\nolimits_{J\in\mathcal{J}} \left(\mathsf{N}_\Phi^{(2}(J, A; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) \diamond (\text{Aggr}_{J^*\in\mathcal{J}\setminus\{J\}}\, \mathsf{F}_\Phi^{(2}(J^*, A; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star)))\right)/J \tag{13.19}$$

donde $\mathsf{N}_\Phi^{(2}$ y $\mathsf{F}_\Phi^{(2}$ son, respectivamente, indicadores de cercanía y lejanía, entre subconjuntos Φ-borrosos de tipo 2 —*cfr. v. gr. supra* Ec. 13.18—, $\star$ y $\diamond$ son conectivas borrosas y $\text{Aggr} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es una operación de agregación.

Las ecuaciones (13.1), (13.3) y (13.4) se transforman en:

$$\mathsf{N}_\Phi^{\circledcirc(2}(\{A, J\}; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) = \mathsf{N}_\Phi^{(2}(A, J; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) \circledcirc \mathsf{N}_\Phi^{(2}(J, A; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) \tag{13.20}$$

$$= \underset{C\in\mathcal{C}}{\text{Aggr}}\, \mathsf{N}_\Phi(\{J(C), A(C)\}; \mathfrak{p}_C, \star) \circledcirc \underset{C\in\mathcal{C}}{\text{Aggr}}\, \mathsf{N}_\Phi(\{A(C), J(C)\}; \mathfrak{p}_C, \star) \tag{13.21}$$

$$\mathsf{F}_\Phi^{\circ(2}(\{A, J\}; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) = \underset{J^*\in\mathcal{J}\setminus\{J\}}{\text{Aggr}} \left(\mathsf{F}_\Phi^{(2}(A, J^*; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) \circ \mathsf{F}_\Phi^{(2}(J^*, A; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star)\right) \tag{13.22}$$

$$J_A = \sum\nolimits_{J\in\mathcal{J}} \left(\mathsf{N}_\Phi^{\circledcirc(2}(\{A, J\}; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) \diamond \mathsf{F}_\Phi^{\circ(2}(\{A, J\}; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star)\right)/J \tag{13.23}$$

donde $\mathsf{N}_\Phi^{(2}$ y $\mathsf{F}_\Phi^{(2}$ son, respectivamente, indicadores de cercanía y lejanía, entre subconjuntos Φ-borrosos de tipo 2 —*cfr. v. gr. supra* Ec. 13.18—, $\star$, $\circledcirc$, $\circ$ y $\diamond$ son conectivas borrosas y $\text{Aggr} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es una operación de agregación.

13.3.6 ¿Y si Aggr no es distributiva respecto de $\circledcirc$ ó $\circ$?

Una operación de agregación —*cfr. supra* Def. 69— no tiene por qué ser distributiva respecto de una conectiva. O sea, si $\oslash$ es una conectiva borrosa, puede que no sea cierto:

$$\underset{x\in\mathcal{X}}{\text{Aggr}}\,(f(x) \oslash g(x)) = \left(\underset{x\in\mathcal{X}}{\text{Aggr}}\, f(x)\right) \oslash \left(\underset{x\in\mathcal{X}}{\text{Aggr}}\, g(x)\right) \tag{13.24}$$

Este hecho afectaría a la génesis de las ecuaciones (13.20) y (13.22).

Si Aggr no es distributivo respecto de $\circledcirc$, entonces, podemos usar el indicador de doble cercanía propuesto previamente (13.1) para definir $\mathsf{N}_\Phi^{\circledcirc(2}$ como:

$$\begin{aligned} \mathsf{N}_\Phi^{\circledcirc(2}(\{A, J\}; \mathfrak{p}_\mathcal{C}, \star) &= \underset{C\in\mathcal{C}}{\text{Aggr}}\, \mathsf{N}_\Phi^{\star}(\{A(C), J(C)\}; \mathfrak{p}_C, \star) \\ &= \underset{C\in\mathcal{C}}{\text{Aggr}}\, (\mathsf{N}_\Phi(A(C), J(C); \mathfrak{p}_C, \star) \circledcirc \mathsf{N}_\Phi(J(C), A(C); \mathfrak{p}_C, \star)) \end{aligned} \tag{13.25}$$

solución, que al no ser Aggr distributiva respecto de $\circledcirc$, no tiene por qué coincidir con (13.20).

Una aproximación análoga es válida para el indicador de doble lejanía. Si Aggr no es distributiva respecto de $\circ$, entonces, podemos usar el indicador de doble lejanía entre subconjuntos Φ-borrosos, propuesto en la Ec. (13.2), para definir $\mathsf{F}_{\Phi}^{\circ(2}$ como:

$$\begin{aligned} \mathsf{F}_{\Phi}^{\circ(2}(\{A,J\};\mathfrak{p}_{\mathcal{C}},\star) &= \operatorname*{Aggr}_{C\in\mathcal{C}} \mathsf{F}_{\Phi}^{\circ}(\{A(C),J(C)\};\mathfrak{p}_{C},\star) \\ &= \operatorname*{Aggr}_{C\in\mathcal{C}} \left(\mathsf{F}_{\Phi}(A(C),J(C);\mathfrak{p}_{C},\star)\circ\mathsf{F}_{\Phi}(J(C),A(C);\mathfrak{p}_{C},\star)\right) \end{aligned} \tag{13.26}$$

solución, que al no ser Aggr distributivo respecto de $\circ$, puede no ser la misma que la recogida en la Ec. (13.22).

El punto de vista como un problema bi-objetivo —*cfr. supra* Obs. 261— también es válido en este caso, reemplazando $\mathsf{F}_{\Phi}^{\star}$ y $\mathsf{M}_{\Phi}^{\star}$ por $\mathsf{F}_{\Phi}^{\star(2}$ y $\mathsf{M}_{\Phi}^{\star(2}$, en el conjunto de ecuaciones (13.6)−(13.11).

13.4 Ejemplo ilustrativo: Diagnosis y prognosis médica sintomática



Veamos otro ejemplo de escenario: la diagnosis y la prognosis médica sintomática. Quizás fuera Albin [1300] uno de los primeros en demostrar la utilidad de la teoría de conjuntos borrosos en los procesos de diagnosis médica. La idea de utilizar técnicas de análisis borroso de agrupamientos en el proceso de diagnosis médica tiene sus orígenes en los trabajos de Fordon y Bezdek [1301] y Esogbue y Elder [1302, 1303, 1304] —*cfr.* Klir y Yuan [46].

Ahora bien, ninguno de ellos considera el ajuste al rango de severidad prototipo de un síntoma para una enfermedad determinada, existiendo casos totalmente diferentes en los que atribuyen la misma disimilitud local en el síntoma.

En aquellas enfermedades, para las que no existe un conjunto de marcadores diagnósticos biológicos definitivos, con frecuencia es necesario recurrir al uso de **cuestionarios**. La idea de aplicar la teoría de conjuntos borrosos al estudio de cuestionarios tiene sus antecedentes en los trabajos de Bernadette Bouchon [1305] y Herman Akdag y Bernadette Bouchon [1306]. En concreto, se basan en la noción clásica de cuestionario, como estructura arborescente o de tipo reticular, introducida por Claude Francois Picard en 1965 [1307] (por ejemplo, un miembro de la población en estudio se describe mediante un camino que va desde la raíz hasta un vértice terminal).

En el caso, por ejemplo, de las demencias, es fundamental, sobre todo en atención primaria, una exploración neuropsicológica, con el fin de poder evaluar el declive del rendimiento cognitivo de un sujeto, utilizando, por ejemplo, escalas cognitivas. En este proceso es esencial el papel de los informadores, individuos próximos al paciente, quienes mediante una o más entrevistas, ayudan a establecer la cronología y evolución de dicho declive. Las escalas cognitivas más empleadas en atención primaria son —*cfr.* Monteserín [1308]—: el MMSE (*Mini-Mental State Examination*) de Folstein, Folstein y McHugh [1309] —*cfr.* Tabla 13.5 (pág. 378)—, el SPMS (*Short Portable Mental State Questionnaire*), introducido por Pfeiffer [1310] y el *Set-test* de Isaacs y Akhtar [1311], y dos tipos de entrevistas con informadores, la escala de demencia de Blessed, Tomlinson y Roth [1312], y el IQCODE (*Informant Questionnaire on Cognitive Decline in the Elderly*) —*cfr.* Tabla 13.1 (pág. 380)—, propuesto por Jorm, Scott y Jacomb [1313]. De este último existe una versión española abreviada de17 cuestiones —*cfr.* Morales, González-Montalvo, Bermejo y Del Ser [1314]—, que ha demostrado su utilidad, combinado con el MMSE, en la detección de los pacientes con demencia —*cfr.* Del Ser, Morales, Barquero, Cantón y Bermejo [1315]—. Por sí solo, el IQCODE es más eficaz que el MMSE —*cfr.* Jorm y Jacomb [1316].

Con el único ánimo de poner otro ejemplo, podemos pensar, igual que en la diagnosis, en la prognosis. La Tabla 13.6 muestra una relación de factores de riesgo en relación con el cáncer de mama. Los que aparecen en

MMSE	
Orientación	
... ¿Qué año-estación-fecha-día-mes es?	5
... ¿Dónde estamos? (estado-país-ciudad-hospital-piso)	5
Memoria inmediata	
... Repetir 3 nombres («árbol», «puente», «farol»)	3
... Repetirlos de nuevo hasta que aprenda los tres nombres	
... y anotar el número de ensayos.	
Atención y cálculo	
... Restar 7 a partir de 100, 5 veces consecutivas	5
... Alternativa: deletrear «mundo» de atrás adelante	
Recuerdo diferido	
... Repetir los tres nombres aprendidos antes	3
Lenguaje y construcción	
... Nombrar un lápiz y un reloj mostrados	2
... Repetir la frase: «Ni sí, ni no, ni peros»	1
... Realizar correctamente las tres órdenes siguientes: «Coja este papel con la mano derecha, dóblelo por la mitad y póngalo en el suelo»	3
... Leer y ejecutar la frase: «Cierre los ojos»	1
... Escribir una frase con sujeto y predicado	1
... Copiar el dibujo de dos pentágonos	1
Puntuación total	

Tabla 13.5: *Escala cognitiva MMSE ()Minimental State Examination) de* Folstein, Folstein y McHugh *[1309]. Aunque la validez del MMSE se considera buena —cfr.* Monteserín *[1308]—, tiene inconvenientes, como la sobrevaloración de los elementos del lenguaje, la pérdida de la función de reconocimiento en las pruebas de memoria, la escasa sensibilidad en los déficit más leves, la influencia de la inteligencia premórbida, los posibles déficit sensoriales del paciente y, sobre todo, el nivel socioeducativo del mismo —cfr.* Monteserín *[1308]—. Existe una versión modificada y validada en España, de* Lobo, Ezquerra y Gómez *[1317].*
— *Fuente:* Monteserín [1308].



Factor de riesgo	Riesgo alto	Riesgo bajo	Riesgo relativo (razón de posibilidades)
Edad:	Mayor	Joven	> 4.0
País de nacimiento:	Norteamérica, Europa del Norte	Asia, África	> 4.0
Clase socioeconómica:	Alta	Baja	$2.0 - 4.0$
Estado civil:	Soltera	Casada	$1.1 - 1.9$
Residencia:	Urbana	Rural	$1.1 - 1.9$
Nuliparidad (0 hijos):	Sí	No	$1.1 - 1.9$
Edad del primer embarazo a término:	≥ 30 años	< 20 años	$2.0 - 4.0$
Ooforectomía premenopáusica:	No	Sí	$2.0 - 4.0$
Edad de la menopausia:	Tardía	Temprana	$1.1 - 1.9$
Edad de la menarquia:	Temprana	Tardía	$1.1 - 1.9$
Peso postmenopáusico:	Gruesa	Delgada	$1.1 - 1.9$
Antecedente de cáncer de mama (1 mama):	Sí	No	$2.0 - 4.0$
Antecedente de enfermedad proliferativa benigna:	Sí	No	$2.0 - 4.0$
Cáncer previo (ovario o endometrio):	Sí	No	$1.1 - 1.9$
Antecedente familiar (primer grado):	Sí	No	$2.0 - 4.0$
Antecedente familiar (madre o hermana):	Sí	No	> 4.0
Exposición del tórax-mama a radiaciones:	Grandes dosis	Mínimas	$2.0 - 4.0$
Patrones de mamografía:	Parénquima displásico	Parénquima normal	$2.0 - 4.0$

Tabla 13.6: *Factores de riesgo del cáncer de mama. El riesgo relativo se mide mediante la razón de posibilidades (odds ratio). La imagen muestra un mamógrafo.*
— *Fuente:* YAFFE, BYNG y BOYD [1318], que la adaptan de KELSEY y textscGammon [1319] —cfr. v. gr.LAZCANO-PONCE, TOVAR-GUZMÁN, ALONSO DE RUIZ, ROMIEU y LÓPEZ-CARRILLO [1320].

Escala cognitiva IQCODE

RECUERDE, POR FAVOR, cómo era el paciente hace 10 años y compárelo con el que es en este momento. Conteste si ha habido algún cambio a lo largo de estos años en la capacidad del paciente en todos los aspectos que le preguntamos seguidamente. Puntuación:

(1) Ha mejorado mucho
(2) Ha mejorado un poco
(3) Casi sin cambios
(4) Ha empeorado un poco
(5) Ha empeoradomucho

1. Capacidad para reconocer las caras de las personas más allegadas (parientes, amigos).
2. Capacidad para recordar los nombres de estas mismas personas.
3. Recordar las cosas de estas personas (dónde viven, de qué viven, qué día es su aniversario).
4. Recordarcosasquehan sucedido recientemente,enlos últimos2 o 3 meses(noticias, cosas propias o de sus familiares).
5. Recordar de qué se habló en una conversación mantenida unos días antes.
6. Olvidar lo que se ha dicho unos minutos antes, pararse un la mitad de una frase y no saber qué iba a decir, repetir lo que ha dicho un rato antes.
7. Recordar su propia dirección o su número de teléfono.
8. Recordar la fecha en que vive.
9. Conocer el lugar exacto de los armarios de su casa y dónde se guardan las cosas.
10. Saber dónde se coloca una cosa que se ha encontrado fuera de su lugar.
11. Adaptarse a la situación cuando su rutina se ve alterada (ir de visita, en alguna celebración, ir de vacaciones).
12. Saber hacer funcionar los diferentes aparatos de la casa (teléfono, lavadora, maquinilla de afeitar).
13. Capacidad para aprender a hacer funcionar un aparato nuevo (lavadora, radio).
14. Recordar las cosas que han sucedido recientemente (en general).
15. Aprender cosas nuevas.
16. Capacidad para recordar cosas que sucedieron o que aprendió cuando era joven.
17. Comprender el significado de palabras poco usuales (del periódico, televisión, conver-saciones).
18. Entender artículos de los periódicos o revistas en los que está interesado.
19. Seguir una historia en un libro, la prensa, el cine, la radio o la televisión.
20. Redactar cartas a parientes o amigos o cartas de negocios.
21. Recordar fechas y hechos históricos del pasado (guerra civil, república, segunda guerra mundial, Vietnam, constitución, 23F).
22. Tomar decisiones en cuestiones cotidianas (qué traje ponerse, qué comida preparar) y en asuntos a más largo plazo (dónde ir de vacaciones o invertir dinero).
23. Manejar los asuntos financieros (cobrar la pensión, pagar la renta o los impuestos, tratar con el banco).
24. Manejar el dinero de la compra (cuánto dinero hay que dar, calcular el cambio).
25. Manejar otros problemas aritméticos cotidianos (tiempo entre visitas de los familiares, cuánta comida comprar y preparar especialmente si hay invitados).
26. ¿Cree que su inteligencia (en general) ha cambiado algo durante los últimos 10 años?

Figura 13.1: *Escala cognitiva IQCODE. Sopesa diferentes aspectos de la inteligencia y de la memoria en los últimos* 10 *años. En el resultado apenas influyen ciertas variables como la edad, nivel educativo e inteligencia previa del sujeto.*
— *Fuente:* MONTESERÍN [1308].

la tabla pueden verse como perfiles teóricos, como prototipos. Pueden representarse por conjuntos borrosos de tipo 2 (hay referentes lingüísticos vagos: alta, baja, tardía, temprana, etc.)

Lo cierto es que no hay una diferencia significativa entre este escenario y el de elección de personal y puestos, que acabamos de analizar. Ahora, el conjunto de alternativas es $\mathcal{D}$, un conjunto finito de posibles dolencias o enfermedades, y el conjunto de criterios es $\mathcal{S}$, un conjunto finito de síntomas. Supongamos que las enfermedades que nos interesan pueden ser identificadas examinando en los pacientes, los síntomas de $\mathcal{S}$, el universo de discurso no vacío y finito. Supongamos que, en base a nuestra experiencia, somos capaces de describir cada enfermedad $D \in \mathcal{D}$ (los prototipos) mediante un subconjunto Φ-borroso D de tipo 2 de $\mathcal{S}$. D es una aplicación $D : \mathcal{S} \to [0,1]^{[0,1]} \times [0,1]^{[0,1]}$, cuyos grados Φ-borrosos $D(s) \in \mathfrak{F}([0,1]) \times \mathfrak{F}([0,1])$, son:

$$\begin{aligned} D(s) &= (\underline{D(s)}, \overline{D(s)}) \\ &= \left(\int_{[0,1]} \underline{D(s)}(x) \diagup x, \int_{[0,1]} \overline{D(s)}(x) \diagup x \right) \end{aligned}$$

donde $\underline{D(s)}$ y $\overline{D(s)}$, las funciones de pertenencia inferior y superior para el grado Φ-borroso $D(s)$, indican los estimadores de las cotas inferior y superior para el rango de severidad asociado con la presencia del síntoma s en un paciente con la enfermedad D. Esto, qué duda cabe, refleja la situación natural en la que indicamos esos

rangos lingüísticamente. Podríamos, por ejemplo, elegir el siguiente conjunto de términos donde valorar $\underline{D(s)}$ y $\overline{D(s)}$:

$$\mathcal{L}([0,1]) = \{\textsf{ausente, muy suave, suave, moderado, intenso, muy intenso, severo}\} \tag{13.27}$$

Imaginemos, como ejemplo, que dada una enfermedad $D \in \mathcal{D}$ y un síntoma $s \in \mathcal{S}$, el rango de severidad prototípico estimado para el síntoma s, con respecto a la enfermedad D, viene dado por el siguiente rango:

$$D(s) = (\underline{D}(s), \overline{D}(s)) = (\textsf{suave, moderado})$$

De una manera similar, supongamos que los síntomas que muestra un paciente P pueden describirse mediante un subconjunto Φ-borroso P de tipo 2 de $\mathcal{S}$, siendo P una aplicación $P : \mathcal{S} \to [0,1]^{[0,1]} \times [0,1]^{[0,1]}$, cuyos grados Φ-borrosos $P(s) \in \mathfrak{F}([0,1]) \times \mathfrak{F}([0,1])$ son:

$$\begin{aligned} P(s) &= (\underline{P(s)}, \overline{P(s)}) \\ &= \left(\int_{[0,1]} \underline{P(s)}(x) \diagup x, \int_{[0,1]} \overline{P(s)}(x) \diagup x \right) \end{aligned}$$

donde $\underline{P(s)}$ y $\overline{P(s)}$, las funciones de pertenencia inferior y superior para el grado Φ-borroso $P(s)$, indican los estimadores de las cotas inferior y superior para el rango de severidad asignado por el experto para el síntoma s en el paciente P. Como anteriormente, $\underline{P(s)}, \overline{P(s)} \in \mathcal{L}([0,1])$. Un ejemplo para un síntoma dado $s \in \mathcal{S}$, bien pudiera ser:

$$P(s) = (\underline{P(s)}, \overline{P(s)}) = (\textsf{moderado, intenso})$$

Pongámonos en una situación de elección bajo este escenario. Tomemos como ejemplar un cierto paciente P (en realidad, el síndrome que presenta) y como prototipos las posibles enfermedades que puede padecer. En este contexto de diagnóstico médico, las cuestiones A, A', B, B' y D' carecen de significado; **sólo podremos tener en cuenta las cuestiones** C, C' y D:

- **Cuestión** C: ¿Cuál es la enfermedad $\widehat{D}_{\Lsh P}$, de cuyo perfil sintomático, el síndrome que presenta el paciente P, es el más cercano?

- **Cuestión** C': ¿Cuál es la enfermedad $\widehat{D}_{\Lsh P}$, a cuyo perfil sintomático, se acerca más el síndrome que presenta el paciente P, pero que a la vez, este último es el más lejano, respecto de los perfiles sintomáticos del resto de enfermedades de $\mathcal{D}$?

- **Cuestión** D': ¿Cuál es la enfermedad $\widehat{D}_{\Rsh P}$, cuyo perfil sintomático, es el más cercano al síndrome presentado por el paciente P?

Es decir, parece que la cuestión C' se convierte en central en este caso. *Que los médicos no piensen sólamente en una única condición de búsqueda para localizar la posible enfermedad que pueda padecer un paciente, a saber, aquella enfermedad D, a cuyo perfil sintomático, se acerca más el síndrome presentado por el paciente, sino que piensen también en que a la vez que maximiza el acercamiento al perfil sintomático de D, maximice la lejanía respecto de los perfiles sintomáticos del resto de enfermedades de $\mathcal{D}$* (en la práctica, $\mathcal{D}$ es el conjunto de enfermedades en la que el médico es un «experto», es decir, que conoce su cuadro de síntomas).

Como conjunto de términos bien pudiera ser $\mathcal{L}([0,1])$, mostrado anteriormente. Las conectivas lógicas que podríamos usar —*cfr. supra* Ec. 13.4— son:

i) $\star$ y $\circ$, t-conormas, de forma que demos más importancia a la similitud, a la similaridad, al parecido, en el proceso de cercanía y a la disimilitud, a la disimilaridad, a la distinción, en el proceso de lejanía;

ii) $\diamond$, una t-norma, de manera que plasme el sentido de que al final lo que nos interesa es conocer una enfermedad $D = \hat{D}_P$ —*cfr. supra* Ec. 13.5—, maximizando al mismo tiempo el indicador de doble cercanía entre P y D y el indicador de doble lejanía entre P y D^*, para aquellas enfermedades D^* diferentes de D, y conocidas por el médico.

13.5 Ejemplo ilustrativo: Comparación de imágenes digitales (*bis*)

En el marco del procesamiento de imágenes, una imagen binaria n-dimensional se define habitualmente mediante una función parcial de $\mathbb{R}^n$ en $[0,1]$, atribuyendo a 0 el significado de color negro y a 1 el de blanco —*cfr.* Nachtegael y Kerre [556] (p. 3)—. El rango completo de grises se representa entonces por el intervalo $[0,1]$, de manera que una imagen n-dimensional en escala de grises no es otra cosa que una función $A : \mathcal{D}_A \subset \mathbb{R}^n \to [0,1]$, donde $\mathcal{D}_A$ es un subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$.

Los métodos de trabajo en procesamiento de imágenes son esencialmente dos, según estén relacionados con el *dominio de la frecuencia* —*cfr.* González y Woods [816] (pp. 164ss.)— o con el **dominio espacial** —*cfr.* González y Woods [816] (pp. 162ss.)—. Los primeros utilizan la transformada de Fourier de una imagen, mientras que los segundos usan la propia imagen. Nos centraremos en estos segundos, en los métodos que se basan en el dominio espacial.

Algunos métodos borrosos de procesamiento de imágenes no consideran la imagen como un conjunto borroso, sino que *trasforman* la imagen en un conjunto borroso —*cfr.* Pal y King [1321]—. Por ejemplo, la imagen original A se transforma en —*cfr.* Klir y Yuan [46] (p. 375):

$$\tilde{A}(x) = \left(1 + \frac{\hat{b} - A(x)}{\beta}\right)^{-\gamma} \tag{13.28}$$

donde $\hat{b} \in [0, b_{\max}]$ es una constante de referencia que define el grado de brillo para el que $A(x) = 1$, y β y γ son parámetros positivos, y cuyos valores dependen de las operaciones que serán aplicadas a la imagen.

No obstante, cualquier imagen A puede verse como un conjunto de pixels, cada uno de los cuales verifica la propiedad **«ser blanco»**. Dado un pixel x, podemos interpretar un valor $A(x)$ de gris, como el grado en el que la afirmación «x es blanco» es verdadera. De este modo, podemos describir cualquier imagen de grises mediante un conjunto borroso. Podemos así comparar imágenes utilizando, por ejemplo, disimilitudes, disimilaridades, distinciones, lejanías o similitudes, similaridades, etc., entre conjuntos borrosos.

Debemos notar que el uso de los α-cortes corresponde a la **aproximación por umbralización** —*cfr.* González y Woods [816] (*threshold approximation*, pp. 443ss.) en el marco del procesamiento de imágenes. Cualquier imagen n-dimensional A en escala de grises, puede ser descrita a partir de la familia completa de sus posibles umbralizaciones. Por ello, A es el conjunto borroso:

$$({}^{\alpha}A)_{\alpha \in]0,1]} \tag{13.29}$$

donde el α-corte ${}^{\alpha}A$, un conjunto nítido, representa la umbralización de grado α de A. No incluimos ${}^{0}A = \mathbb{R}^n$ debido a su carácter no informativo. Observemos también que el requisito de semi-continuidad superior de A, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow A(x) < A(x_0) + \varepsilon)$, equivale al hecho de que todos los α-cortes ($\forall \alpha \in]0,1]$) sean subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$.

Podemos comparar dos imágenes en escala de grises $A, B \in [0,1]^{\mathbb{R}^n}$, a partir de las comparaciones locales entre sus α-cortes:

$$C(A,B) = \operatorname*{Aggr}_{\alpha \in]0,1]} C({}^{\alpha}A, {}^{\alpha}B) \tag{13.30}$$

donde $\mathrm{Aggr} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es una operación de agregación.

13.5.1 Imágenes en color

Establecido un modelo de color, por ejemplo el modelo RGB, puede pensarse de manera similar. El modelo RGB es un sistema tricromático aditivo de color: cualquier color se obtiene como una amalgama aditiva de los colores primitivos rojo, verde y azul —*cfr.* Hunt [1322]; Foley, van Dam, Feiner y Hughes [1323]—. De este modo, a todo *pixel* se le asocia una tripleta (r, g, b) que indica la intensidad de cada color. En este espacio de color, una imagen puede verse como una tripleta de imágenes (A_R, A_G, A_B), donde cada una es isomorfa a una cierta imagen en escala de grises.

Podemos, por tanto, describir cualquier imagen RGB mediante una tripleta de conjuntos borrosos. El cálculo de una medida de comparación entre dos de ellas, puede hacerse agregando las medidas de comparación obtenidas para cada canal primitivo:

$$C(A,B) = \operatorname*{Aggr}_{i \in \{R,G,B\}} C(A_i, B_i) \tag{13.31}$$

siendo Aggr : $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ una operación de agregación.

Un razonamiento análogo también es válido para el modelo CMY (cian, magenta y amarillo) —*cfr.* Foley, Van Dam, Feiner y Hughes [1323]—, usado principalmente en las industrias de la impresión y la fotografía. Sus colores primitivos son los complementarios de rojo, verde y azul. En este sentido, CMY es substractivo.

13.5.2 Procesamiento borroso del color

Podemos imaginar asociado a cada pixel, no un valor de $[0,1]$, sino un subconjunto borroso de $[0,1]$. Bajo este supuesto, podemos describir una imagen mediante un subconjunto borroso de tipo 2.

Parece lógico que, con el objeto de reducir el tiempo de desarrollo de nuevas aplicaciones, deseemos que nuestro sistema incorpore la posibilidad de definición automática de nuevos colores a partir de unos colores primitivos predeterminados. Un modo de hacerlo es usar modificadores lingüísticos. Por ejemplo, si el modelo de color es RGB, entonces, partiendo de las definiciones primitivas de rojo (puro), verde (puro) y azul (puro), podremos derivar definiciones tales como:

rojo oscuro,
verde no demasiado claro, o
más o menos azul,

Parece pues que la meta fundamental sea definir los colores puros. Una propuesta se debe a Lars Hildebrand y Bernd Reusch [1324]. Ellos proponen trabajar en el modelo HSI (tono –hue–, saturación e intensidad) —*cfr.* Foley, Van Dam, Feiner y Hughes [1323]—. Este modelo tridimensional puede reducirse a uno bidimensional en dos casos: si trabajamos con colores puros y claros no consideramos la intensidad (modelo HS), mientras que si trabajamos con colores puros, pero oscuros, no consideramos la saturación (modelo HI de color). Es por ello que, bajo los modelos HS y HI, los colores se representan tridimensionalmente como conjuntos borrosos, dentro de un sistema de coordenadas cilíndricas, donde la dimensión extra y, es el grado de pertenencia —*cfr.* Hildebrand y Reusch [1324] (pp. 276ss.)

13.5.3 Propuesta de construcción de los arquetipos de colores primitivos

Supongamos que un atributo u toma valores del conjunto V_u. Denotemos mediante v_u cualquiera de estos valores. Sea u un atritbuto y C un color primitivo. Por ejemplo, si el modelo de color es RGB, $\mathcal{U} = \{r, g, b\}$ y asumimos que el rango de valores está normalizado en $[0,1]$, o sea, que $V_u = [0,1]$, para todo $u \in \mathcal{U}$.

Denotemos mediante $\mathsf{T}(v_u, C)$ un número que exprese lo típico que es el valor v_u del atributo u —su «tipicidad» (*typicality*), en el sentido de Zadeh [1283]—. Proponemos calcularlo mediante:

$$\mathsf{T}(v_u, C) = \mathsf{N}^\star(v_u) \diamond \mathsf{F}^\circ(v_u) \tag{13.32}$$

donde:

$$\mathsf{N}^\star(v_u, C) = \mathrm{Aggr}_{c \in C}\, \mathsf{N}(v_u, c(u)) \tag{13.33}$$

indica cuan cercano está el valor v_u de la globalidad de valores que el atributo u toma en la clase C, y:

$$\mathsf{F}^\circ(v_u, C) = \mathrm{Aggr}_{\substack{c' \in C' \\ C' \neq C}}\, \mathsf{F}^\circ(v_u, c'(u)) \tag{13.34}$$

indica cuan lejano está el valor v_u de la globalidad de valores que el atributo u toma fuera de la clase C. Como habitualmente, Aggr denota una operación de agregación.

De este modo, definimos el **valor más típico del atributo** u en la clase C como el conjunto borroso:

$$v_{u,C} = \int_{v_u \in V_u} \mathsf{T}(v_u, C) / v_u \tag{13.35}$$

del que obviamente puede eliminarse su borrosidad:

$$\hat{v}_{u,C} = \arg\max_{v_u \in V_u} \mathsf{T}(v_u, C) \tag{13.36}$$

El **arquetipo para un color primitivo** C es el conjunto borroso de tipo 2:

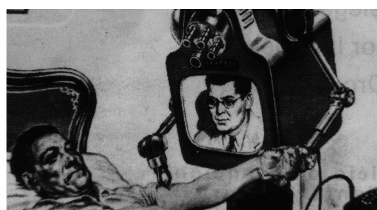
$$u_C^{(2} = \int_{u \in \mathcal{U}} v_{u,C} \diagup u \tag{13.37}$$

o, si eliminamos la borrosidad de $v_{u,C}$, el conjunto borroso ordinario:

$$u_C = \int_{u \in \mathcal{U}} \hat{v}_{u,C} \diagup u \tag{13.38}$$

De este modo, la generación de colores compuestos puede ser hecha automáticamente utilizando para ello cualquier tipo de composición, por ejemplo, la composición sup-min.

13.6 Ejemplo ilustrativo: Diagnosis y prognosis médicas por imagen



El trabajar junto a nuestro amigo y compañero tesinando, Valentín Masero, nos ha acercado al mundo de la **telemedicina**, de la diagnosis y prognosis por imagen, tanto a la **radiología convencional**, a la **tomografía axial computerizada** (o computadorizada) (TC), o a la **resonancia magnética nuclear** (RM). La imagen radiológica convencional (analógica) muestra, en un solo plano, las diferencias de absorción de los rayos al atravesar un cuerpo. La radiación empleada en los métodos tomográficos penetran los objetos desde diferentes direcciones. No generan una imagen tridimensional, pero permiten la reconstrucción tridimensional del objeto a partir de la información espacial obtenida en los movimientos de giro del tubo de rayos X —*cfr. v. gr.* Jähne [1325](pp. 39ss, 239ss), Pomés Talló [1326]—. Esta imagen tridimensional del objeto se obtiene apilando los cortes TC. La RM obtiene señales directamente de las estructuras del cuerpo, mediante un imán que orienta los protones —*cfr. v. gr.* Pomés Talló [1327]—. A veces, en TC, el contraste entre el tejido tumoral y las estructuras normales es extremedamente bajo; en estos casos ha dado buenos resultados combinar TC con RM —*cfr. v. gr.* Thornton, Sandler, Ten Haken, McShan, Fraass, LaVigne y Yanke [1328], Van Herk [1329] (pp. 520-521).

Como ejemplo, podemos pensar en buscar corpúsculos opacos como cálculos en los riñones o en la vesícula biliar, (micro-)calficicaciones mamarias, o cuerpos extraños como un pequeño tornillo que haya podido ser tragado. Suponemos que existen algunos signos destacados, de manera que, basándonos en ellos, somos capaces de segmentar la área de la imagen que corresponda al cuerpo extraño. Este conjunto de señales depende de la naturaleza del cuerpo extraño y pertenecen a nuestro conocimiento a priori. Decidir qué es una señal y qué no lo es para un objeto concreto, corresponde a otros. «Ellos» deberán encontrar diversas reglas heurísticas que deberán incorporarse al sistema.

Por tanto, estamos pensando en una base de conocimientos a priori. Diversas reglas como:

> «los tornillos pueden ser de tamaño pequeño o mediano, pero en cualquier caso, poseen un alto grado de contraste»

deben pertenecer a esta base de conocimientos. Algo inmediato es trabajar con ellas como reglas borrosas, describiendo los términos lingüísticos mediante conjuntos borrosos.

Una vez superada la etapa de segmentación para todos los cortes TC, hemos identificado, en cada uno de ellos, s, un conjunto $\mathcal{B}_s$ de áreas de interés (cuerpos posibles).

> Si nuestro interés reside en la reconstrucción tridimensional de los diferentes cuerpos a partir del conjunto de cortes TC, es necesario que los cuerpos sean comparados a través de los diferentes cortes TC.

Este proceso se realiza comparando los cortes TC por pares. Dados dos cortes TC, s y s', nos enfrentamos a un problema de asignación. Deseamos emparejar los posibles cuerpos presentes en $\mathcal{B}_s$ con los posibles cuerpos presentes en $\mathcal{B}_{s'}$, infiriendo los cuerpos reales tanto para s como para s'.

Debemos disponer de un conjunto A de atributos, respecto de los cuales definiremos cada región segmentada como un subconjunto borroso de tipo 2 de A. Por ejemplo, si el *contraste* es un atributo, entonces alto podría ser el valor borroso asignado a él. *Longitud*, *circularidad*, *diámetro*, etc. son ejemplos de otros atributos posibles.

El hecho de haber descrito los cuerpos mediante subconjuntos borrosos de tipo 2 de A, nos permite compararlos entre sí. Para ello, el planteamiento de las siguientes cuestiones, analizadas también en §13.3.1, para el caso de elección de personas o puestos, y en §13.4 para el caso de diagnosis y prognosis médicas sintomáticas..

- **Cuestión** A': ¿Cuál es el objeto $(\widehat{b_s})_{\Rsh b_{s'}}$, en el corte TC s, cuya descripción como conjunto borroso de tipo 2 es la más cercana a la descripción como conjunto borroso de tipo 2 del cuerpo $b_{s'}$, y a la vez, es la más lejana, respecto de las descripciones del resto de objetos identificados en el corte TC s'?

- **Cuestión** B': ¿Cuál es el objeto $(\widehat{b_s})_{\Lsh b_{s'}}$, en el corte TC s, a cuya descripción, la descripción de un determinado objeto $b_{s'}$, es la más cercana, y a la vez, es la más lejana, respecto de las descripciones del resto de objetos del corte TC s?

- **Cuestión** C': ¿Cuál es el objeto $(\widehat{b_{s'}})_{\Lsh b_s}$, en el corte TC s', a cuya descripción, la descripción de un determinado objeto b_s, es la más cercana, y a la vez, es la más lejana, respecto de las descripciones del resto de objetos del corte TC s'?

- **Cuestión** D': ¿Cuál es el objeto $(\widehat{b_{s'}})_{\Rsh b_s}$, en el corte TC s', cuya descripción es la más cercana a la descripción del objeto b_s, y a la vez, es la más lejana, respecto de las descripciones del resto de objetos en el corte TC s?

Igualmente válidas son las soluciones aportadas en las secciones §13.3.4, §13.3.5 y §13.3.6.

Una vez emparejadas las secciones de los cuerpos en todos los cortes TC, será el momento de abordar la reconstrucción tridimensional, apilando los cortes TC. Pero este es otro tema, en concreto de la tesis de nuestro amigo y compañero tesinando Valentín MASERO.

13.7 Síntesis reflexiva

Dado un ejemplar, no sólo es importante encontrar el prototipo a cuyo perfil de características sea más cercano el perfil del ejemplar, sino también encontrar el prototipo cuyo perfil sea el más cercano al del ejemplar.

Éste ha sido el punto de partida. Clásicamente, la cuestión es la primera, o en todo caso, ambas son abordadas implícitamente debido a la simetría de las medidas de parecido y semejanza más usadas. La aproximación por doble cercanía, considera ambas cuestiones a la vez, obteniendo un único prototipo, y permitiendo modular la pertinencia o relevancia de cada cuestión en el prototipo finalmente obtenido.

Presentamos el marco de trabajo de las dobles cercanías/lejanías en el escenario de la administración para y con las personas, en concreto, en relación a la *Elección multicriterio de personal o puestos*. Analizamos cuatro situaciones de elección desde una perspectiva integradora y simultánea de la elección de aspirantes por las organizaciones y su recíproco, la elección de las organizaciones por los candidatos. Ambas situaciones son frecuentes, debido a los constantes cambios en el mercado de trabajo.

La administración con y para las personas es un campo que va mucho más allá de la gestión de recursos humanos, de la dirección de personal, o de la elección del mismo. ¿Y la relación de la Administración con las personas? Mi amigo José Luis LÓPEZ GUTIÉRREZ, cuyo trabajo consiste en recomendar o no la aprobación de subvenciones a proyectos[4], me comenta que «todo no es claro y oscuro; los expedientes llegan incompletos; los solicitantes, supuestamente, ocultan datos que, a juicio de ellos, podrían influir negativamente en mi decisión, sobrevalorando otros para que, según ellos, influyan positivamente en mi resolución.» Aunque mi amigo desconocía, en ese momento, el concepto «teórico-formal» de **lo borroso**, su intuición era rotunda: «eso que tú llamas borroso, es lo que te decía yo de que no todo es claro y oscuro; pero *interviene en el proceso*: el final, a la hora de decidir, no es borroso.»

[4] Es asesor técnico del Departamento de Infraestructuras Agrarias de la Delegación Provincial de Málaga de la Consejería de Agricultura y Pesca de la Junta de Andalucía.

A medida que avanzaba, la conversación me confirmaba la presencia de lo borroso en su quehacer. Por ejemplo, también está presente la noción de **doble cercanía**: «para poder tomar una decisión, me pongo en el papel del solicitante, de sus circunstancias, aunque mantengo siempre presente mi posición "oficial".»[5]

Pero sobre todo, si hay algo que posee mi amigo es sentido común, y como ARISTÓTELES, supedita a él cualquier resultado o conclusión: «el sentido común no yerra, por eso es sentido común», me comenta.

Finalmente, describimos el método brevemente en otros escenarios: *Diagnosis y prognosis médicas sintomáticas* (§13.4), *Comparación de imágenes digitales* (§13.5) y *Diagnosis y prognosis médicas por imagen* (§13.6). En todos ellos, la descripción final de los prototipos (lo conocido) y de los ejemplares (los hechos) se lleva a cabo mediante subconjuntos Φ-borrosos de tipo 2 (la pertenencia es expresada mediante un intervalo cuyos extremos son subconjuntos borrosos ordinarios). Y como, en general, la negación de una cercanía es una lejanía, ya sea en intervalos, en intervalos de tipo 2, en conjuntos borrosos, en conjuntos Φ-borrosos o en conjuntos Φ-borrosos de tipo 2, reducimos el estudio principalmente a cercanías.

Muchas enfermedades suelen manifestarse con dolores, de ahí que también se las denomine dolencias. A grandes rasgos, hay tres tipos de dolor: **somático** (proveniente de heridas, cortes o moretones), **visceral** (cuando hay lesión en tejidos viscerales) y **neuropáticos** (como la neuropatía diabética), resultantes de lesiones en el sistema nervioso causadas cuando un nervio es cortado, aplastado, comprimido, estirado, expuesto a una sustancia tóxica, o dañado de cualquier otro modo.



Figura 13.2: *Escala de caras de Wong-Baker (Wong-Baker FACES Pain Rating Scale). En http://www3.us.elsevierhealth.com/WOW/facesTranslations.html aparece la traducción de las instrucciones originales: Explíquele a la persona que cada cara representa una persona que se siente feliz porque no tiene dolor o triste porque siente un poco o mucho dolor.* ***Cara 0*** *se siente muy feliz porque no tiene dolor.* ***Cara 1*** *tiene un poco de dolor.* ***Cara 2*** *tiene un poquito más de dolor.* ***Cara 3*** *tiene más dolor.* ***Cara 4*** *tiene mucho dolor.* ***Cara 5*** *tiene el dolor más fuerte que usted pueda imaginar, aunque usted no tiene que estar llorando para sentirse así de mal. Pídale a la persona que escoja la cara que mejor describa su propio dolor. Esta escala se puede usar con personas de tres años de edad o más.*
— *Fuente:* WHALEY y WONG [1330] (p. 1148); WONG, HOCKENBERRY-EATON, WILSON, WINKELSTEIN y SCHWARTZ [1331] (p. 1301).

Muchos doctores, entre ellos Penny TENZER y Heidi STANLEY [1332], recomiendan que los pacientes usen palabras o expresiones para describir el dolor: «me dan "punzadas"», «el dolor es "agudo"», etc. Por ejemplo, un dolor que se describe como «eléctrico», «ardiente», o con sensación de «hormigueo», suele corresponder a una neuropatía.

Hay numerosos métodos para valorar el dolor. Todas, por motivos obvios, incluyen la intensidad como factor, como grado de severidad del síntoma dolor. Para valorarla se usan, entre otras:

- una escala numérica del 1 al 10 —en la que 1 representa un dolor extremadamente pequeño (prácticamente ausente) y 10 un dolor extremadamente severo—;
- una escala verbal (por ejemplo: sin dolor, leve, moderado, intenso, insoportable);
- una escala de colores (no aceptada en algunos países);
- una escala física, por ejemplo, en ciertos países de América Central se usa el tamaño de frutas, p. ej., uva, melón, sandía;

[5] ¿Será también un análisis de doble cercanía lo que ocurre cuando, a veces, muchos profesores, a la hora de evaluar, hablan de «ponerse en el papel de sus alumnos»?

- una escala gráfica, como por ejemplo, la escala de caras de Wong-Baker (*Wong-Baker FACES Pain Rating Scale*) —*cfr.* Fig. 13.2—, en la que cada cara representa una persona que se siente feliz porque no tiene ningún dolor (ni herida) o que se siente triste porque tiene algún dolor o mucho dolor —*cfr.* Whaley y Wong [1330] (p. 1148); Wong, Hockenberry-Eaton, Wilson, Winkelstein y Schwartz [1331] (p. 1301).

No debemos olvidar que la percepción de un dolor puede diferir de un paciente a otro: «lo que para un paciente puede ser un dolor en grado 3, para otro puede ser en grado 7» —*cfr.* Tenzer y Stanley [1332].

Este uso de palabras como descriptores, unido a las probabilidades de manifestación de cada enfermedad bajo criterio, hace que el mecanismo de inferencia bayesiana borrosa que propondremos en el Cap. 17 resulte apropiado. De hecho, como ejemplo ilustrativo, nos referiremos a la inferencia bayesiana del grado de molestia (expresado con palabras) debido a la exposición a ruido, que aunque no es precisamente dolor, sí es una expresión del dolor.

13.8 Suplemento autoexplicativo

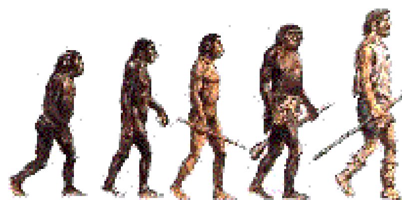
Rudy Rucker [1333]:

1=1	1_{TWO}
2=2	10_{TWO}
3=2+1	11_{TWO}
4=4	100_{TWO}
5=4+1	101_{TWO}
6=4+2	110_{TWO}
7=4+2+1	111_{TWO}
21=16+8+1	11001_{TWO}
666=512+128+16+8+2	1010011010_{TWO}

14

Cuarto ensayo: ajustes y desajustes

«¡Ah! ¡Ah! ¿El señor es persa?
¡Eso es algo extraordinario!
¿Cómo se puede ser persa?»
—MONTESQUIEU, C. de Secondat, barón de la Brède y de (1689-1755) <Cartas persas>



Cuando comparamos los perfiles de un puesto de trabajo y un aspirante, podemos encontrarnos ante cualquiera de las nueve situaciones siguientes que mostramos en la Fig. 14.1.

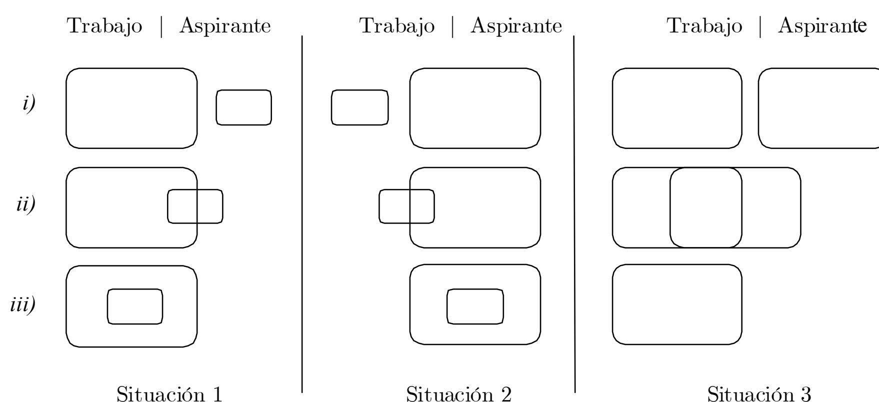


Figura 14.1: *Esquema de las diferentes situaciones posibles al comparar perfiles de puestos y candidatos.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Todas las situaciones (x.i) son absolutamente insatisfactorias: el puesto y el aspirante no tienen nada en común. Las situaciones (x.ii) son satisfactorias, en mayor o menor grado, dependiendo del tamaño de la intersección. La situación (3.iii) es la ideal: representa el hecho de un perfecto ajuste entre los perfiles de un puesto y un candidato. Las situaciones (1.iii) y (2.iii), conllevan un desaprovechamiento del puesto de trabajo y del aspirante, respectivamente.
Esto nos motiva a proponer un marco de trabajo de asignaciones básicas de medida de ajuste y desajuste, que incluirá las cercanías y lejanías anteriores como casos particulares. Dependiendo de la naturaleza del problema, serán utilizadas las unas o las otras. Los resultados obtenidos se aplican a algunos ejemplos concretos. Finalmente, en §14.6, mostramos algunas de las relaciones de inclusión entre algunas de las diferentes asignaciones de medida de las diferencias que hemos definido en estos cuatro ensayos.

14.1 Asignaciones básicas de medida suave de ajuste y desajuste

Sea $(V, \preceq)$ un retículo normado e $I, J \in \mathbb{I}V$. La función característica $\chi_{I=J}$ del predicado $I = J$, puede ser interpretada como una *«medida de ajuste»* entre los intervalos I y J. De igual modo, la función característica $\chi_{I \neq J}$ del predicado $I \neq J$, puede ser interpretada como una *«medida de desajuste»* entre los intervalos I y J.

Claro que, estas definiciones tan «rotundas» quizás necesiten ser suavizadas. Inspirados en nuestro Primer Ensayo, modificamos las funciones características $\chi_{I=J}$ y $\chi_{I \neq J}$, con el objeto de medir *suavemente* el ajuste y desajuste entre I y J.

Estas intuiciones sobre comparación entre intervalos nos llevan a proponer las siguientes definiciones, no sólo para intervalos, sino para conjuntos cualesquiera de entidades, objetos, clases, o sea, de unidades.

Definición 265 *Decimos que una función total $f : \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$, es una **asignación básica de medida suave de ajuste** si existe una asignación básica de medida de conjuntos μ, y una función total $g_f : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to \operatorname{Ran} g_f \subseteq \mathbb{R}$, tales que:*

i) $f(A, B) = g_f(\mu(A \cap B), \mu(A \cap \overline{B}), \mu(\overline{A} \cap B), \mu(\overline{A} \cap \overline{B}))$
ii) $\forall a, d \in [0, +\infty),\ g_f(a, 0, 0, d) = \max \operatorname{Ran} g_f$
iii) $\forall b \in (0, +\infty),\ \forall c, d \in [0, +\infty),\ g_f(0, b, c, d) = \min \operatorname{Ran} g_f$
iv) $\forall A, B \in \mathfrak{P}(\mathcal{U}),\ A \neq \operatorname{is} A \wedge B \neq \operatorname{is} B \wedge B \subseteq \overline{\operatorname{int} A} \wedge B \cap \operatorname{ext} A \neq \varnothing \Longrightarrow f(A, B) = \min \operatorname{Ran} g_f$

es decir, si f es una asignación básica de similaridad que satisface (iii) y (iv).

Definición 266 *Decimos que una función total $f : \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$, es una **asignación básica de medida suave de desajuste** si existe una asignación básica de medida de conjuntos μ, y una función total $g_f : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to \operatorname{Ran} g_f \subseteq \mathbb{R}$, tal que:*

i) $f(A, B) = g_f(\mu(A \cap B), \mu(A \cap \overline{B}), \mu(\overline{A} \cap B), \mu(\overline{A} \cap \overline{B}))$
ii) $\forall a, d \in [0, +\infty),\ g_f(a, 0, 0, d) = \min \operatorname{Ran} g_f$
iii) $\forall b \in (0, +\infty),\ \forall c, d \in [0, +\infty),\ g_f(0, b, c, d) = \max \operatorname{Ran} g_f$
iv) $\forall A, B \in \mathfrak{P}(\mathcal{U}),\ A \neq \operatorname{is} A \wedge B \neq \operatorname{is} B \wedge B \subseteq \overline{\operatorname{int} A} \wedge B \cap \operatorname{ext} A \neq \varnothing \Longrightarrow f(A, B) = \max \operatorname{Ran} g_f$

es decir, si f es una asignación básica de disimilaridad que satisface (iii) y (iv).

Observación 267 *En (iv), la exigencia $A \neq \operatorname{is} A \wedge B \neq \operatorname{is} B$ permite graduar supuestos de inclusión para conjuntos discretos: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\} = \mathcal{U}$ (al no afirmar nada sobre ellos).*
*La condición (iii) se verifica si A y B son disjuntos, ya que entonces, $\mu(A \cap B) = 0$. En este caso, consideramos que el ajuste es mínimo. Por paralelismo con la Lógica clásica, podríamos denominarla, **condición de exclusión**:*

$$A \cap B = \varnothing \Longrightarrow f(A, B) = \min \operatorname{Ran} g_f \tag{14.1}$$

La suavidad se desarrolla en el intervalo[1] ⟨exclusión, identidad⟩. Es decir, dados A y B, la comparación de A con B o de B con A, comprende diferentes situaciones intermedias entre la exclusión ($A \cap B = \varnothing$) —cfr. Fig. 14.1, situaciones (x.i)—, y la identidad ($A = B$) —cfr. Fig. 14.1, situación (3.iii)—, a las que se asignan diferentes grados en el intervalo $[\min \operatorname{Ran} g_f, \max \operatorname{Ran} g_f]$.
Lo que distinguen los calificativos de «interior», «exterior» e «integral» son tres formas de hacer tal asignación.

Dependiendo de las condiciones sobre monotonía de los parámetros que impongamos a $g_f(a, b, c, d)$, obtendremos cuatro tipos de **asignaciones de medida suave de ajuste** y otros cuatro de **asignaciones de medida suave de desajuste**. Por ejemplo, supongamos que J es un intervalo prototipo, y que I no lo es. Queremos medir cuánto se desajusta I de J. En principio, sólo nos interesa el exterior del rango del prototipo (de aquí que llamemos a la asignación básica de medida que proponemos un desajuste exterior). Proponemos la siguiente definición genérica. Notemos que de aquí en adelante nos referimos, a las primeras como **asignaciones suaves de ajuste** y a las segundas como **asignaciones suaves de desajuste**.

[1] Los nombres los recogemos de la Lógica. **Exclusión** (del lat. *exclusio*): Relación que se da entre dos clases, cuando su intersección es vacía, o entre dos predicados, cuando no se verifican de forma simultánea para ningún valor del argumento. **Identidad** (del lat. *identitas*): Característica de dos o más objetos de pensamiento que, aunque distintos por el modo de designación (por una determinación espacio-temporal cualquiera), presentan exactamente las mismas propiedades. **Principio de identidad**: Principio que afirma que una cosa es del todo y exclusivamente igual a sí ($A = A$).

Definición 268 *Decimos que una asignación básica de medida suave de desajuste* $f : \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$*, es una* ***asignación suave de desajuste exterior****, precisamente si es tal que satisface:*

$$\begin{array}{rl} v) & \forall a, b \in (0, +\infty), \forall c \in [0, +\infty),\ g_f \text{ es independiente } a \\ vi) & \forall b \in (0, +\infty), \forall c \in [0, +\infty),\ g_f \text{ es independiente de } b \\ vii) & \forall b \in (0, +\infty), \forall c \in [0, +\infty),\ g_f \text{ no decreciente en } c \end{array}$$

Ejemplo 269 *Sea d la distancia euclidea y* $V = [0, 1]$*. Un ejemplo de asignación suave de desajuste exterior es la función* $\mathsf{M} : \mathbb{I}[0, 1] \times \mathbb{I}[0, 1] \to [0, 1]$ *(empleamos notación del álgebra de intervalos de* ALLEN *[679] —cfr. §6.5.1):*

$$\mathsf{M}(J, I) = \begin{cases} 0 & si \quad I\ \{\mathsf{d},\ \mathsf{s},\ \mathsf{f},\ \equiv\}\ J \\ 1 & si \quad I\ \{\prec,\ \succ,\ \mathsf{m},\ \mathsf{m}^{\smile}\}\ J \\ \frac{\epsilon(I-J)}{\epsilon(I)} d(J, I - J) & si \quad I\ (\mathsf{d}^{\smile},\ \mathsf{s}^{\smile},\ \mathsf{f}^{\smile},\ \mathsf{o},\ \mathsf{o}^{\smile},\ \mathsf{m},\ \mathsf{m}^{\smile}\}\ J \end{cases} \quad (14.2)$$

donde, para todo intervalo $A = \langle a_0, a_1 \rangle \in \mathbb{I}V$*,* $\epsilon(A)$ *indica su extensión, esto es,* $d(a_0, a_1)$*.*

Pues bien, las Tablas 14.1 y 14.2 muestran la manera en la que definimos las cuatro asignaciones suaves de ajuste y las cuatro asignaciones suaves de desajuste, respectivamente, que proponemos. El formato explícito de sus definiciones es el mismo que el propuesto anteriormente para una asignación suave de desajuste exterior —*cfr.* Def. 268.

Asignaciones suaves de ajuste			
	$I \cap J$	$J - I$	$I - J$
interior	no decreciente	no creciente	independiente
exterior	independiente	independiente	no creciente
integral	no decreciente	no creciente	no creciente
satisfacción	no decreciente	independiente	no creciente

Tabla 14.1: *Medidas suaves de ajuste. Compárese con la tabla 14.2 y obsérvese la relación entre las medidas de ajuste y desajuste, con respecto a la complementariedad de sus propiedades; por ejemplo, no creciente - no decreciente.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Asignaciones suaves de desajuste			
	$I \cap J$	$J - I$	$I - J$
interior	no creciente	no decreciente	independiente
exterior	independiente	independiente	no decreciente
integral	no creciente	no decreciente	no decreciente
insatisfacción	no creciente	independiente	no decreciente

Tabla 14.2: *Medidas suaves de desajuste. Compárese con la tabla 14.1 y obsérvese la relación entre las medidas de ajuste y desajuste, con respecto a la complementariedad de sus propiedades; por ejemplo, no creciente - no decreciente.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Observación 270 ***(Acción de una negación)*** *Nótese que si* $\mathcal{N}$ *es una negación —cfr. Def. 32— y* M *es una asignación suave de desajuste exterior, entonces* $\mathcal{N}(\mathsf{M})$ *es una asignación suave de ajuste exterior.*

Observación 271 ***(Relación con las medidas de similaridad y disimilaridad)*** *Las condiciones (i) y (ii) de la Def. (265), junto a las tres condiciones correspondientes a una asignación suave de ajuste integral —cfr. Tabla 14.1—, son las definitorias de una asignación (básica o no) de similaridad —cfr. Def. 195—. Algo parecido ocurre con las asignación suave de desajuste integral —cfr. Tabla 14.2— y las asignaciones de disimilaridad —cfr. 197—. Tenemos que:*

1. *Toda asignación básica de medida suave de ajuste (resp., desajuste) integral es una asignación básica de similaridad (resp., disimilaridad).*
2. *Toda asignación suave de ajuste (resp., desajuste) integral es una asignación de similaridad (resp., disimilaridad).*
3. *Una medida de satisfacción (resp., insatisfacción) es una asignación de similaridad (resp., disimilaridad) «orientada» desde J hacia I, por afectar, además de a $I \cap J$, únicamente a $I - J$ —cfr. Tablas 14.1 y 14.2.*

14.2 Inclusión esencial suave

Puede ser que, en vez de trabajar con el intervalo $\langle$exclusión, identidad$\rangle$, prefiramos hacerlo con el intervalo $\langle$exclusión, inclusión$\rangle$. Es decir, que dados A y B, la comparación de A con B o de B con A, comprenda diferentes situaciones intermedias entre la exclusión ($A \cap B = \varnothing$) —*cfr.* Fig. 14.1, situaciones (x.i)—, y la inclusión ($A \subseteq B$ o $B \subseteq A$) —*cfr.* Fig. 14.1, situaciones (1.iii) y (2.iii)—, a las que asignaríamos diferentes grados en el intervalo $[\min \operatorname{Ran} g_f, \max \operatorname{Ran} g_f]$. La justificación a ello puede estar en el hecho de que la igualdad entre los perfiles de un ideal y un ejemplar, suele ser utópica (y seguramente, ucrónica). Para esta formalización, bastaría utilizar la que llamamos inclusión esencial suave, cuya definición sigue de inmediato.

Definición 272 *Llamamos* ***inclusión esencial suave*** *a cualquier función total $f : \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{P}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$, que satisfaga (i) o (ii):*

i) f sea una asignación suave de ajuste integral, tal que g_f satisface:

$$\forall a, d \in [0, +\infty),\ \forall b \in [0, +\infty),\ g_f(a, b, 0, d) = \max \operatorname{Ran} g_f \tag{14.3}$$

ii) f sea una asignación suave de desajuste integral, tal que g_f satisface:

$$\forall a, d \in [0, +\infty),\ \forall b \in [0, +\infty),\ g_f(a, b, 0, d) = \min \operatorname{Ran} g_f \tag{14.4}$$

Observemos que las condiciones (14.3) y (14.4) son satisfechas si B está incluido en A, o lo que es equivalente, que $\overline{A} \cap B = \varnothing$, y por tanto, $\mu(\overline{A} \cap B) = 0$. Esto motiva que denominemos **condición de inclusión** a la siguiente:

$$B \subseteq A \Longrightarrow f(A, B) = \begin{cases} \max \operatorname{Ran} g_f & \text{si } f \text{ es una asignación suave de ajuste integral} \\ \min \operatorname{Ran} g_f & \text{si } f \text{ es una asignación suave de desajuste integral} \end{cases} \tag{14.5}$$

14.3 Observaciones, resultados y ejemplos

Observación 273 *En nuestra exposición, hemos preferido usar el calificativo de «suave» al de «borrosa» para las asignaciones de medida comentadas —aunque igualmente podríamos haber usado, por ejemplo, «flexible» o «vaga»—. El término «medida borrosa», podría llevar a confusión con las* ***«medidas borrosas»****—cfr. Obs. 182 (iii)—, o con las* ***«medidas de conjuntos borrosos»*** *—cfr. Def. 239—. No obstante, observemos lo siguiente. Si J es un prototipo, entonces:*

- *Cualquier asignación suave de desajuste exterior $\mathsf{M}(J, \cdot)$ es una medida de conjuntos borrosos (pues $\mathsf{M}(J, \varnothing) = 0$, y si $K \subseteq I$ entonces $K - J \subseteq I - J$, y como M es no decreciente en $I - J$, entonces $\mathsf{M}(J, K) \leq \mathsf{M}(J, I)$).*
- *Una asignación suave de desajuste interior M no es una medida de conjuntos borrosos, pues $K \subseteq I$ implica $J - I \subseteq J - K$, y M es no decreciente en $J - X$.*

- *Cualquier asignación suave de desajuste integral es una medida de conjuntos borrosos, pues es no decreciente en $I - J$.*
- *Una asignación suave de ajuste exterior no es una medida de conjuntos borrosos, pues es no creciente en $I - J$.*
- *Cualquier asignación suave de ajuste interior F, así como cualquier asignación suave de ajuste integral F, aunque son monótonas, no son medidas de conjuntos borrosos, pues $\mathsf{F}(J, \varnothing) = 1$.*

Observación 274 ***El modelo de contraste de Amos*** **Tversky** *[239] es una asignación suave de ajuste integral. Este modelo considera definible la similaridad en base a una comparación de características. En el modelo de contraste, la similaridad de A a B se mide mediante la función:*

$$S(A, B) = \theta f(A \cap B) - \alpha f(A - B) - \beta f(B - A) \tag{14.6}$$

donde f es una función monótona creciente, θ, α y β son ciertos índices ponderales, $A \cap B$ es el conjunto de todas las características compartidas por A y B, $A - B$ es el conjunto de todas las características atribuibles a A pero no a B, y $B - A$ es el conjunto de todas las características que posee B y no posee A. Los índices ponderales θ, α y β se usan para poder expresar la mayor o menor importancia relativa de las características comunes frente a las características distintivas; aún más, con referencia a estas últimas, nos permiten indicar una posible asimetría ($\alpha \neq \beta$). Un sencillo ejemplo se tiene, si la similaridad se infiere a partir de la ***evaluación de diferencias****; en tal caso, parece lógico pensar —cfr.* Tversky *[239]— que las* ***características compartidas*** *son más relevantes que las* ***características distintivas****. No obstante, esto es discutible. Mas bien, en general, dependerá de la naturaleza (o interpretación semántica) de los conjuntos que se comparan —cfr. §10.2.5.*

Ejemplo 275 ***(Diagnosis y prognosis médicas)*** *Imaginemos que dadas una enfermedad $D \in \mathcal{D}$ y un síntoma $s \in \mathcal{S}$, el rango prototipo de severidad estimado del síntoma s con respecto a D es:*

$$\langle \underline{D}(s), \overline{D}(s) \rangle = \langle 0, 3 \rangle$$

Sean P_1 y P_2 dos pacientes. Supongamos que los rangos de severidad con los que se manifiesta el síntoma s en cada uno de ellos son, respectivamente —cfr. Fig. 14.2:

$$\langle \underline{P_1}(s), \overline{P_1}(s) \rangle = \langle 1, 2 \rangle$$
$$\langle \underline{P_2}(s), \overline{P_2}(s) \rangle = \langle 1, 4 \rangle$$

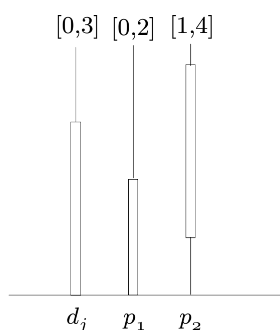


Figura 14.2: *Rangos de severidad estimados de s_i: $[0, 3]$ es el prototipo correspondiente a d_j, y $[1, 2]$ y $[1, 4]$ son las estimaciones para los pacientes p_1 y p_2, respectivamente.*
— Fuente: Elaboración propia.

Ejemplo 276 *Las distancias clásicas, así como las disimilitudes modificadas de* Minkowski *que hemos propuesto con anterioridad, al estar basadas en* ***diferencias absolutas entre los extremos de estos intervalos****, conducen a la misma disimilaridad local en s, pues:*

$$\begin{aligned} |\underline{D}(s) - \underline{P_1}(s)| &= |0 - 1| \\ &= |\underline{D}(s) - \underline{P_2}(s)| \end{aligned}$$

y:

$$\begin{aligned} |\overline{D}(s) - \overline{P_1}(s)| &= |3-2| \\ &= |3-4| \\ &= |\overline{D}(s) - \overline{P_2}(s)| \end{aligned}$$

No obstante, cualquier asignación suave de desajuste exterior M*, estrictamente creciente en* $I - J$*, claramente distingue esta situación, ya que:*

$$\langle \underline{P_1}(s), \overline{P_1}(s)\rangle \ \{\mathsf{d}, \mathsf{s}, \mathsf{f}, \equiv\} \ \langle \underline{D}(s), \overline{D}(s)\rangle$$

y por tanto:

$$\mathsf{M}(\langle \underline{P_1}(s), \overline{P_1}(s)\rangle, \langle \underline{D}(s), \overline{D}(s)\rangle) = 0$$

Obsérvese que en este caso, $I - J = \varnothing$*. Por otro lado, como* $\mathsf{M}(J, I)$ *es estrictamente creciente en* $I - J$*, y en este caso,* $I - J = \langle 3, 4\rangle$*, entonces* $\mathsf{M}(\langle \underline{P_2}(s), \overline{P_2}(s)\rangle, \langle \underline{D}(s), \overline{D}(s)\rangle) > 0$.

Observación 277 ***(Cercanías y lejanías)***

- *La* ***cercanía subaditiva sup-inf «borrosificada»*** $\widetilde{v}^{\diamond(2)}$ *—cfr. Def. 246— es una asignación suave de ajuste integral.*
- *El* ***indicador de cercanía*** $\mathsf{N}(X, Y; \mathfrak{p}, \diamond)$ *—cfr. Def. 256— para dos intervalos* α*-percentilados* X *e* Y*, también es una asignación suave de ajuste integral.*

En ambos ejemplos, suponemos que las funciones de pertenencia asociadas a los referentes son números borrosos. El indicador de cercanía $\mathsf{N}_\Phi(X, Y; \mathfrak{p}_{\mathcal{U}}, \diamond)$ *entre dos conjuntos* Φ*-borrosos* X *e* Y *—cfr. §12.12— se define a partir de la agregación local, en cada referente, de las cercanías entre cada par de* α*-percentiles de los intervalos. En cada referente, presenciamos la acción de una asignación suave de ajuste integral. De este modo, es lícito decir que el indicador de cercanía* $\mathsf{N}_\Phi(X, Y; \mathfrak{p}_{\mathcal{U}}, \diamond)$ *es una* ***agregación*** *(en el conjunto* $\mathcal{U}$*)* ***de asignaciones suaves de ajuste integral****. Esto es similar a la ecuación (14.11).*

- *Cualquier* ***indicador de lejanía*** *para dos intervalos* α*-percentilados* X *e* Y *en un retículo vectorial, es una asignación suave de desajuste integral.*

14.4 Asignaciones suaves de desajuste para intervalos de tipo 2

Sea $(V, \preceq)$ un retículo normado e $\mathbb{I}^{(2}V$ el espacio de los intervalos (densos y convexos) de tipo 2 de V. Extendemos las ideas anteriores, de una manera natural, al caso de intervalos de tipo 2. Sintácticamente, para obtener las definiciones para las correspondientes asignaciones que actúen sobre intervalos de tipo 2, basta que sustituyamos las asignaciones suaves de ajuste y de desajuste de tipo 1: F y M, por las de tipo 2: $\mathsf{F}^{(2}$ y $\mathsf{M}^{(2}$, respectivamente.

Ejemplo 278 ***(Una asignación suave de desajuste)*** *Supongamos que* J *es un prototipo e* I *un ejemplar. Proponemos medir el desajuste de* I *a* J *mediante la asignación suave de tipo 2 de desajuste exterior* $\mathsf{M}^{(2} : \mathbb{I}^{(2}V \times \mathbb{I}^{(2}V \to \mathbb{R}_0^+$ *—cfr. Ec. 14.2:*

$$\mathsf{M}^{(2}(J, I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I_{01} \subseteq J_{01} \\ 1 & \text{si } I_{01} \ \{\prec, \ \succ, \ \mathsf{m}, \ \mathsf{m}^{\smile}\} \ J_{01} \\ d^{(2}(I \cap J^c, J) & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{14.7}$$

donde para cualquier intervalo X *de tipo 2,* $X^c = \langle \leftarrow, X_0'\rangle \cup \langle X_1', \rightarrow\rangle$*, y* X_0' *es abierto (resp., cerrado) si* X_0 *es cerrado (resp., abierto) —es análogo para* X_1 *y* X_1'*—. De este modo, si* X_0 *y* X_1 *son subconjuntos unitarios, o sea, si* X *es un intervalo (tipo 1), entonces* $X \cap X^c = \varnothing$*.*

Consideramos dos posibilidades para la disimilitud $\mathrm{d}^{(2}$ *en la Ec. (14.7):*

$$d^{(2}_{\{0,1\}}(\langle X_0, X_1\rangle, \langle Y_0, Y_1\rangle) = \operatorname*{Aggr}_{\alpha \in \{0,1\}} d(X_\alpha, Y_\alpha) \tag{14.8}$$

$$d^{(2}_{\{0,1/2,1\}}(\langle X_0, X_1\rangle, \langle Y_0, Y_1\rangle) = \operatorname*{Aggr}_{\alpha \in \{0,1/2,1\}} d(X_\alpha, Y_\alpha) \tag{14.9}$$

donde Aggr *denota una operación de agregación.*

Ejemplo 279 *(**Diagnosis y prognosis médicas**) Consideremos ligeras «perturbaciones de tipo 2» afectando a los intervalos del Ejemplo 275. Imaginemos que dada una enfermedad $D \in \mathcal{D}$ y un síntoma $s \in \mathcal{S}$, el rango prototípico de severidad estimado del síntoma s respecto de D, es el siguiente intervalo de números reales de tipo 2:*

$$\begin{aligned} D(s) &= \langle \underline{D}(s), \overline{D}(s) \rangle \\ &= \langle \langle 0, .2 \rangle, \langle 2.9, 3.2 \rangle \rangle \end{aligned}$$

Podemos interpretarlo diciendo que los valores más bajos que presenta la severidad del síntoma s están «normalmente» entre 0 y .2, y que los valores mayores que presenta la severidad del síntoma s están «normalmente» entre 2.9 y 3.2. Sean P_1 y P_2 dos pacientes tales que sus rangos de severidad revelados para s son, respectivamente:

$$\begin{aligned} P_1(s) &= \langle \underline{P_1}(s), \overline{P_1}(s) \rangle \\ &= \langle 1, \langle 1.9, 2.2 \rangle \rangle \\ P_2(s) &= \langle \underline{P_2}(s), \overline{P_2}(s) \rangle \\ &= \langle \langle .9, 1.1 \rangle, \langle 3.9, 4.2 \rangle \rangle \end{aligned}$$

Queremos calcular las disimilitudes y desajustes relativos a D. Observemos que:

$$\begin{aligned} d^{(2}_{\{0,1\}}(D(s), P_1(s)) &= d^{(2}_{\{0,1\}}(D(s), P_2(s)) \\ &= .95 \end{aligned}$$

mientras que:

$$\begin{aligned} d^{(2}_{\{0,1/2,1\}}(D(s), P_1(s)) &= .933 \\ &< d^{(2}_{\{0,1/2,1\}}(D(s), P_2(s)) \\ &= .95 \end{aligned}$$

De este modo, $P_1(s)$ y $P_2(s)$ son igualmente disímiles con respecto a $D(s)$, siempre según $d^{(2}_{\{0,1\}}$, mientras que si usamos $d^{(2}_{\{0,1/2,1\}}$, $P_2(s)$ es más disímil con respecto a $D(s)$ de lo que lo es $P_1(s)$.

Con respecto al desajuste, como $(P_1(s))_{01} \subset (D(s))_{01}$, entonces:

$$\mathsf{M}^{(2}(D(s), P_1(s)) = 0$$

mientras que:

$$\begin{aligned} \mathsf{M}^{(2}_{\{0,1\}}(D(s), P_2(s)) &= 1.975 \\ &< \mathsf{M}^{(2}_{\{0,1/2,1\}}(D(s), P_2(s)) \\ &= 1.9833 \end{aligned}$$

Observemos que el ajuste de $P_2(s)$ a D es peor que el correspondiente a $P_1(s)$, con respecto a cualquiera de las propuestas $d^{(2}_{\{0,1\}}$ o $d^{(2}_{\{0,1/2,1\}}$, incluso aun cuando, con respecto a la primera, la disimilitud de $P_2(s)$ y $P_1(s)$ con respecto a $D(s)$ son las mismas.

La extensión a intervalos de tipo n es inmediata. No obstante, carece de interés para nuestro estudio aumentar de esta manera el grado de complejidad en la abstracción. Por otro lado, este proceso nos trae a la memoria el esquema iterativo propuesto en §6.20.2 para el (α, β)-percentilado.

14.5 Ajuste y desajuste entre subconjuntos Φ-borrosos: tres aproximaciones

En esta sección proponemos y desarrollamos tres aproximaciones para medir el ajuste y desajuste entre subconjuntos Φ-borrosos.

14.5.1 Basada en secciones verticales de tipo 2

Para cada referente $u \in \mathcal{U}$, la sección vertical de un subconjunto Φ-borroso $A = (\underline{A}, \overline{A})$ es el intervalo de tipo 2:

$$A(u) = [0, [\underline{A}(u), \overline{A}(u)]] \tag{14.10}$$

Podemos extender las asignaciones suaves de ajuste y desajuste $\mathsf{F}^{(2}$ y $\mathsf{M}^{(2}$ entre secciones verticales a las asignaciones suaves de ajuste y desajuste $\mathsf{F}^{\mathrm{V}}_{\Phi}$ y $\mathsf{M}^{\mathrm{V}}_{\Phi}$ entre subconjuntos Φ-borrosos. Sea X un subconjunto Φ-borroso de $\mathcal{U}$ y $\mathfrak{I} \in \mathfrak{F}_{\Phi}(\mathcal{U})$ un subconjunto que se considera un ideal. Entonces:

$$\mathsf{F}^{\mathrm{V}}_{\Phi}(\mathfrak{I}, X) = \sum_{u \in \mathcal{U}} \mathsf{F}^{(2}(\mathfrak{I}(u)^{(2}, X(u)^{(2)}) \diagup u \tag{14.11}$$

$$\mathsf{M}^{\mathrm{V}}_{\Phi}(\mathfrak{I}, X) = \sum_{u \in \mathcal{U}} \mathsf{M}^{(2}(\mathfrak{I}(u)^{(2}, X(u)^{(2)}) \diagup u \tag{14.12}$$

Observemos que $\mathsf{F}^{\mathrm{V}}_{\Phi}$ y $\mathsf{M}^{\mathrm{V}}_{\Phi}$ son asignaciones suaves de ajuste y desajuste, por serlo $\mathsf{F}^{(2}$ y $\mathsf{M}^{(2}$, respectivamente.

14.5.2 Basada en α-cortes

Sea $(V, \preceq)$ un retículo normado e $I, J \in \mathbb{I}V$. Bajo estas condiciones, el α-corte de un subconjunto Φ-borroso $A = (\underline{A}, \overline{A})$ de V es el intervalo de tipo 2:

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}A &= [{}^{\alpha}A_0, {}^{\alpha}A_1] \\ &= [[{}^{\alpha}\overline{a_0}, {}^{\alpha}\underline{a_0}], [{}^{\alpha}\underline{a_1}, {}^{\alpha}\overline{a_1}]] \end{aligned} \tag{14.13}$$

Sean $\mathsf{F}^{(2}$ y $\mathsf{M}^{(2}$ una asignación suave de ajuste y una de desajuste, respectivamente, entre intervalos de tipo 2 —*cfr. supra* §14.4—. Definimos unas nuevas asignaciones suaves $\mathsf{F}^{\mathrm{H}}_{\Phi}$ y $\mathsf{M}^{\mathrm{H}}_{\Phi}$, de ajuste y desajuste, respectivamente, entre subconjuntos Φ-borrosos, a partir de la acción de las asignaciones $\mathsf{F}^{(2}$ y $\mathsf{M}^{(2}$ sobre sus α-cortes. Sean X un subconjunto Φ-borroso de $\mathcal{U}$ y $\mathfrak{I} \in \mathfrak{F}_{\Phi}(\mathcal{U})$ un subconjunto que se considera un prototipo. Entonces:

$$\mathsf{F}^{\mathrm{H}}_{\Phi}(\mathfrak{I}, X) = \int_0^1 \mathsf{F}^{(2}({}^{\alpha}\mathfrak{I}, {}^{\alpha}X) d\alpha \tag{14.14}$$

$$\mathsf{M}^{\mathrm{H}}_{\Phi}(\mathfrak{I}, X) = \int_0^1 \mathsf{M}^{(2}({}^{\alpha}\mathfrak{I}, {}^{\alpha}X) d\alpha \tag{14.15}$$

Obsérvese que $\mathsf{F}^{\mathrm{H}}_{\Phi}$ y $\mathsf{M}^{\mathrm{H}}_{\Phi}$ son asignaciones suaves de ajuste y desajuste, por serlo $\mathsf{F}^{(2}$ y $\mathsf{M}^{(2}$, respectivamente. Quizás sea lícito decir que se trata de una aproximación «horizontal» no simétrica y no acotada.

14.5.3 Uso de disimilitudes α-percentiladas doblemente ponderadas

Sea $\mathcal{U}$ un universo de discurso no vacío, que puede ser visto como un conjunto de posibles atributos o característi, y que esta posibilidad es cuantitativamente medible. Sea $\mathcal{I}$ un conjunto de ideales, prototipos o «representantes» de clase. Sea κ una relación binaria borrosa definida en $\mathcal{U} \times \mathcal{I}$. El índice ponderal $\kappa(u, \mathfrak{I})$ especifica la relevancia o importancia relativa de u en la descripción que como subconjunto Φ-borroso, hemos adoptado para el ideal $\mathfrak{I}$.

Proponemos la siguiente familia de asignaciones suaves de desajuste, normalizadas (en $[0, 1]$), inspiradas en la familia de métricas de Minkowski. Cualquier miembro de esta familia, permite que estimemos el desajuste de cualquier subconjunto Φ-borroso de $\mathcal{U}$, con respecto al representante de clase, dependiendo de los desajustes locales que se producen en los α-percentiles, cuyos rangos son todos los intervalos definidores de las representaciones como subconjuntos Φ-borrosos de los ejemplares y del prototipo. En este sentido, es una aproximación «vertical».

Sea X un subconjunto Φ-borroso de $\mathcal{U}$. Abreviemos, para todo $u \in \mathcal{U}$:

$$X(u) = \langle \underline{X}(u), \overline{X}(u) \rangle \tag{14.16}$$

Supongamos que X se toma como prototipo e Y como ejemplar. De este modo, definimos ímplicitamente la función $D_\lambda(\cdot,\cdot;\kappa,\omega):\mathfrak{F}_\Phi(\mathcal{U})\to\mathbb{R}_0^+$, mediante:

$$\begin{aligned}
&4\,|\mathfrak{u}|\,\{D_\lambda(X,Y;\kappa,\omega)\}^\lambda \\
&= \frac{1}{|J_\langle|}\sum_{u\in J_\langle}|\kappa(u,X)|^\lambda\sum_{\alpha\in\mathfrak{u}}\omega(\alpha)\left|\Delta_\alpha^{Y(u),X(u)}\right|^\lambda \\
&+ \frac{1}{|J_\rangle|}\sum_{u\in J_\rangle}|\kappa(u,X)|^\lambda\sum_{\alpha\in\mathfrak{u}}\omega(\alpha)\left|\Delta_\alpha^{Y(u),X(u)}\right|^\lambda \\
&+ \frac{1}{|J_\cap^-|}\sum_{u\in J_\cap^-}|\kappa(u,X)|^\lambda\left|\tfrac{\underline{X}(u)-\underline{Y}(u)}{\overline{Y}(u)-\underline{Y}(u)}\right|^\lambda\sum_{\alpha\in\mathfrak{u}}\omega(\alpha)\left|\Delta_\alpha^{\langle\underline{Y}(u),\underline{X}(u)\rangle,X(u)}\right|^\lambda \\
&+ \frac{1}{|J_\cap^+|}\sum_{u\in J_\cap^+}|\kappa(u,X)|^\lambda\left|\tfrac{\overline{Y}(u)-\overline{X}(u)}{\overline{Y}(u)-\underline{Y}(u)}\right|^\lambda\sum_{\alpha\in\mathfrak{u}}\omega(\alpha)\left|\Delta_\alpha^{X(u),\langle\overline{X}(u),\overline{Y}(u)\rangle}\right|^\lambda
\end{aligned}\tag{14.17}$$

donde convenimos en que 0/0 es 0, y además:

$\lambda\in[1,+\infty)$;

$J_\langle=\{u:Y(u)\ \{\prec\ ,\ \mathsf{m}\}\ X(u)\}$;

$J_\rangle=\{u:Y(u)\ \{\succ\ ,\ \mathsf{m}^\smile\}\ X(u)\}$;

$J_\cap^-=\{u:Y(u)\ \{\mathsf{m},\ \mathsf{o},\ \mathsf{d},\ \mathsf{s},\ \equiv\}\ X(u)\}$;

$J_\cap^+=\{u:Y(u)\ \{\mathsf{m}^\smile,\ \mathsf{o}^\smile,\ \mathsf{d}^\smile,\ \mathsf{f},\ \equiv\}\ X(u)\}$;

$\Delta_\alpha^{I,J}=|i_\alpha-j_\alpha|$;

$\mathfrak{u}$ es el α-percentilado uniforme —*cfr.* Def. 83;

y, para todo $\alpha\in\mathfrak{u}$, los índices ponderales $\omega(\alpha)$ son no negativos y tales que $\sum_{\alpha\in\mathfrak{u}}\omega(\alpha)=1$.

Observación 280 *La función $D_\lambda(\cdot,\cdot;\kappa,\omega)$ es una* ***asignación suave de desajuste integral****. Podemos, por tanto, usarla tal cual. En nuestros ejemplos, tiene la ventaja de permitirnos considerar una relación borrosa κ en $\mathcal{S}\times\mathcal{J}$ (resp., $\mathcal{S}\times\mathcal{D}$) tal que $\kappa(s,J)$ (resp., $\kappa(s,d)$) indique la relevancia de la cualificación (resp., del síntoma) s en la* ***elección del puesto*** *de trabajo J (resp., en la* ***diagnosis o prognosis*** *de la enfermedad d).*

Obsérvese también que si usamos D_λ, entonces para toda cualificación (resp., síntoma) $s\in\mathcal{S}$, $\langle\underline{J}(s),\overline{J}(s)\rangle$ y $\langle\underline{A}(s),\overline{A}(s)\rangle$ (resp., $\langle\underline{D}(s),\overline{D}(s)\rangle$ y $\langle\underline{P}(s),\overline{P}(s)\rangle$), están ambos α-percentilados por $\mathfrak{p}_s$, siendo $\mathfrak{p}_s$, en general, distinto para diferentes s.

Finalmente, notemos que la ***unificación de los problemas de ajuste y desajuste*** *puede verse como un* ***problema bi-objetivo*** *—simplemente, sustituyendo la cercanía $\mathsf{N}_\Phi^{\circledcirc}$ por una asignación de ajuste y la lejanía F_Φ° por una asignación de desajuste, de acuerdo a las ecuaciones que aparecen en la Obs. 261.*

Observación 281 *De aquí en adelante, nos permitiremos abusar del lenguaje y usar* ***ajuste suave (básico)*** *por asignación suave (básica) de ajuste, y* ***desajuste suave (básico)*** *por asignación suave (básica) de desajuste.*

14.6 Tras los cuatro ensayos: una visión parcial del marco

Con la Fig. 14.3 (pág. 398) intentamos mostrar algunas de **las relaciones de inclusión entre algunas de las diferentes asignaciones de medida de las diferencias** que hemos definido en estos cuatro ensayos.

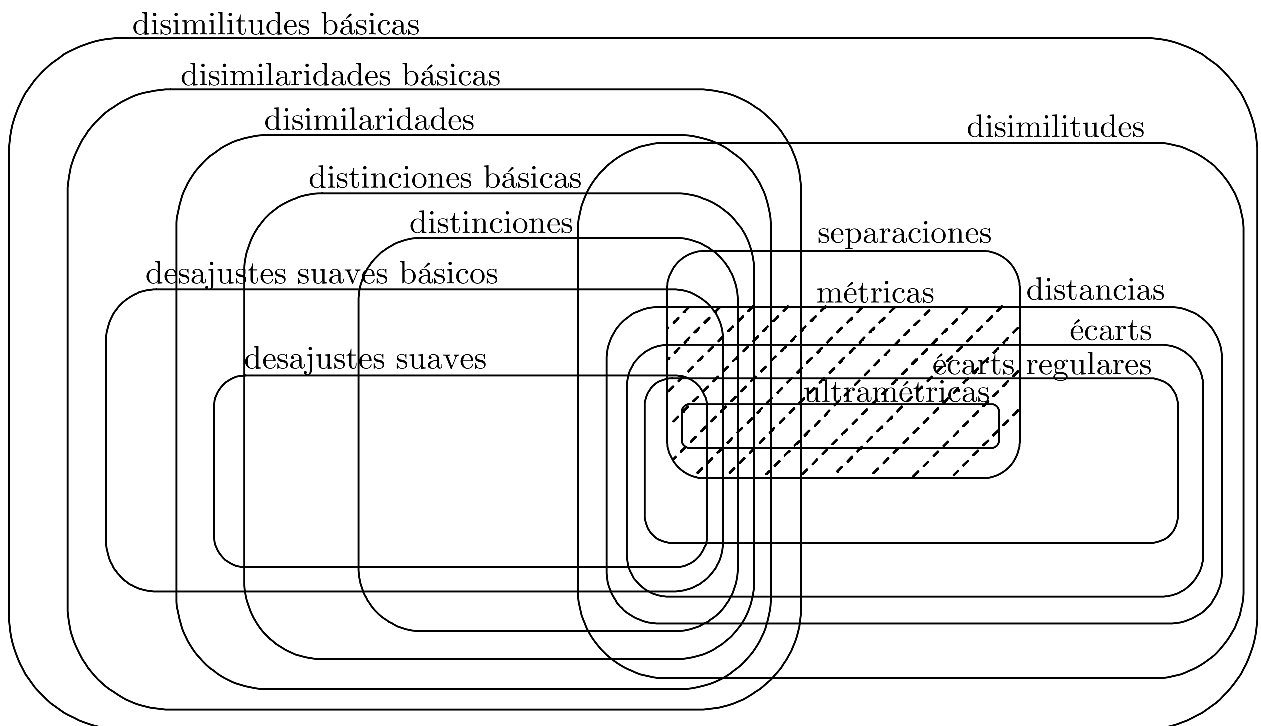


Figura 14.3: *Algunas de las relaciones de inclusión entre algunas de las diferentes asignaciones de medida de las diferencias que hemos definido en estos cuatro ensayos.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

15

Un minero de datos ataviado con indumentaria tornasolada (borrosa y bayesiana)



«Cuantas más diversas y contrarias las voces se unen,
tanto más maravilloso resuena el concierto.»
—Angelus Silesius (1624-1677)
<Dísticos del viajero querubínico>

«Reflexionar es negar lo que se cree.»
—Alain <Disertaciones sobre la religión>

El apego metodológico sigue siendo una seña de identidad en la comunidad científica. No olvidemos, como ya hemos comentado en varios sitios, y seguro que seguiremos comentando, que muchos todavía consideran no ortodoxo a lo bayesiano. Baste recordar, por ejemplo, lo que figura en la contracubierta de Introduction to Probability and Statistics (from a Bayesian Viewpoint). Part 2. Inference de Dennis V. Lindley *[44], publicado en 1965: «El tratamiento de la inferencia adopta el punto de vista bayesiano; esto es, está basado en el concepto de una medida numérica del grado de creencia en una hipótesis científica. Aún hoy en día, se considera algo no ortodoxa esta aproximación pero cada año que pasa se generaliza más su aceptación.».*
Con estos tres capítulos: «Un minero de datos ataviado con indumentaria tornasolada (borrosa y bayesiana)», bis y ter, tratamos de contribuir a suavizar el tajante exclusivismo existente en la disyunción entre lo bayesiano y lo borroso. En todo momento nos hemos sentido animados por un «espíritu ecuménico» —como decía House *[45]—, un talante ecléctico, postulante de la complementariedad metódica y teórica, arraigado firmemente en nuestra naturaleza humana.*
Para lograr estos fines, pensamos que deben usarse formalismos de representación de conocimiento incierto e inexacto. La aplicación de lo borroso y lo bayesiano se ha visto colmada de éxitos. La lógica borrosa —cfr. Klir *y* Yuan *[46]— y las redes bayesianas —cfr.* Pearl *[47];* Castillo, Gutiérrez *y* Hadi *[48]—, junto a los algoritmos asociados a ellas que se usan para razonar, son dos formalismos de representación del conocimiento que han sido usados para tratar esta cuestión, en multitud de estudios punteros.*

En este primero, suponemos que disponemos de una evidencia nítida que se ha asignado al ítem bajo estudio con relación al grado de satisfacción de una propiedad, grado que se clasifica en tipos diversos. Por ejemplo, cualquier nota o puntuación numérica nítida (p. ej., en media, por una comisión evaluadora de expertos) que sea dada a un trabajador, con relación al grado de destreza en el desempeño de una tarea determinada, según la realice torpemente*,* atolondradamente*,* con soltura*,* con pericia*, o* con habilidad sorprendente*.*
Para conseguir que varios expertos compartan información relacionando la evidencia con tales clases, parece mucho más conveniente usar evidencia borrosa en vez de evidencia nítida. Consideramos un conjunto de términos de cinco valores lingüísticos o palabras, de cinco valores borrosos de evidencia: $\mathcal{L}(E) = \{$muy bajo (MB), bajo (B), medio (M), alto (A), muy alto (MA)$\}$.
Abundando en ello, y de forma explícita, la idea que subyace a nuestra propuesta es la asunción de que ningún valor numérico preciso puede considerarse como una puntuación razonable para asignarla a un ítem (p. ej., un trabajador) en relación al grado de satisfacción de una propiedad (p. ej., el grado de destreza en el desempeño de una tarea).
El problema consiste en estudiar la propagación bayesiana borrosa de tal imprecisión en la evidencia. La ejemplificación ilustrativa que vemos de tal problema es: dado un trabajador, al que se le ha asignado (p. ej., en media, por una comisión evaluadora de expertos) una puntuación numérica nítida, en referencia a la evaluación del desempeño de una tarea (por una prueba o test rápido de desempeño), entonces, decidir cuál es el grado de destreza del trabajador en el desempeño de la tarea en cuestión (durante una actividad normal y no en una prueba o test rápido), es decir, clasificar la tarea, con respecto a dicho trabajador, en una de las cinco clases mencionadas anteriormente, según la tarea sea desempeñada por dicho trabajador, torpemente*,* atolondradamente*,* con soltura*,* con pericia*, o* con habilidad sorprendente*.*

15.1 Inferencia bayesiana borrosa

«Todo el mundo cree en la curva de Gauss, me decía un día Lipmann, pues los experimentadores se imaginan que es un teorema de matemáticas, y los matemáticos, que es un hecho experimental.»
—Henri POINCARÉ, *via* Pius SERVEN [1334]

Los primeros trabajos en inferencia bayesiana borrosa se originaron en el estudio de proyectos de seguridad en diferentes investigaciones de fiabilidad estructural —*cfr.* ITOH e ITAGAKI [1335]; CHOU y YUAN [1336]; FURTHSIRTH-SCHNATER [1337].

Dado un valor lingüístico e_L de la evidencia, y un conjunto de hipótesis exhaustiva y mutuamente excluyentes H_j $(j = 1, \ldots, m)$, podemos calcular la verosimilitud para dicho valor borroso de la evidencia $p(e_L|H_j)$ mediante:

$$p(e_L|H_j) = \int_{e \in e_L} \mu_{e_L}(e) f(e|H_j) de \tag{15.1}$$

donde $f(e|H_j)$ es la función de densidad de verosimilitud evaluada en e, dada la hipótesis H_j. Podemos calcular la probabilidad a posteriori mediante:

$$p(H_j|e_L) = \frac{p(H_j) \int_{e \in e_L} \mu_{e_L}(e) f(e|H_j) de}{\sum_{k=1}^{m} \left(p(H_k) \int_{e \in e_L} \mu_{e_L}(e) f(e|H_k) de \right)} \tag{15.2}$$

C. C. YANG [1338] observa dos dificultades importantes en este método:

i) la determinación de la función de densidad de verosimilitud $f(e|H_j)$ —aproximada en los trabajos de ITOH e ITAGAKI [1335], CHOU y YUAN [1336] y FURTHSIRTH-SCHNATER [1337], por distribuciones normales y WEIBULL, lo que conlleva el elevado coste computacional de la estimación de sus parámetros, complicando excesivamente el cálculo;

ii) una vez que ha sido determinada $f(e|H_j)$, el cálculo de las integral tampoco es nada evidente.

En lugar de lo anterior, YANG propone estimar la función de densidad de verosimilitud para el valor continuo de la evidencia —la $f(e|H_j)$ en (15.1)—, a partir de la verosimilitud del valor borroso de la evidencia $p(e_L|H_j)$, o sea, la Ec. (15.1) vista en sentido contrario —*cfr.* YANG [1338]; YANG [1338] y CHEUNG [1339].

La propuesta concreta de YANG consiste en calcular:

$$f(e|H_j) = c \sum_{e_L \in \mathcal{L}(E)} \frac{\mu_{e_L}(e)}{W(e_L)} p(e_L|H_j) \tag{15.3}$$

siendo c la constante —respecto de todas las e_L consideradas en el conjunto de términos $\mathcal{L}(E)$— no nula:

$$c = \frac{W(e_L)}{\int_{e \in e_L} \mu_{e_L}(e) de} \tag{15.4}$$

estando así f normalizada.

Por último, la probabilidad a posteriori se puede calcular mediante la regla de BAYES:

$$p(H_j|e) = \frac{f(e|H_j)p(H_j)}{\sum_{j=1}^{m} f(e|H_j)p(H_j)} \tag{15.5}$$

La utilización de esta constante c en el método de YANG, equivale a imponer la restricción de que la razón entre el tamaño $W(e_L)$ del rango cubierto por cualquier valor lingüístico e_L (el intervalo soporte de su función de pertenencia μ_{e_L}) y la área de μ_{e_L}, es la misma, sea cual sea el valor lingüístico e_L. El valor de tal cociente es c.

La propuesta para evidencia múltiple que desarrollan Chien-Lung CHAN y Chung-Hsien LAN [1340] (pp. 405-406), conserva la dependencia de la constante c.

En este capítulo, presentamos varias propuestas, según consideremos imprecisión o no. *Ninguna de ellas está parametrizada por constante alguna —cfr.* §15.2.4.

15.2 Propagación bayesiana borrosa de la imprecisión en la evidencia: un primer minero

«Ignorando de dónde vengo, sin saber a dónde voy.»
—Alphonse de LAMARTINE <El hombre>

15.2.1 Probabilidad de un subconjunto borroso

Sea e_L un valor borroso —*cfr.* §4.7— para la evidencia y $\{H_j : j = 1, \ldots, m\}$ un conjunto finito de hipótesis exhaustivas y mutuamente excluyentes.

Sea p una ley de probabilidad definida en E. Sea $\mathcal{A}$ una familia probabilizable de subconjuntos de E —*cfr.* Nota a pie de página n°. 16 (pág. 64)—. Para todo $A \in \mathcal{A}$, puede escribirse su probabilidad:

$$p(A) = \sum_{e \in E} \chi_A(e) p(e) \tag{15.6}$$

siendo χ_A la función característica de A.

Esta formulación puede extenderse a los subconjuntos borrosos de E. Para ello, se define una familia probabilizable de subconjuntos borrosos, con las mismas propiedades que para subconjuntos nítidos —*cfr.* Nota a pie de página n°. 16 (pág. 64)—, salvo que ahora se usan la complementación y la unión correspondientes a conjuntos borrosos —*cfr.* §4.4.3.

Así, si $\mathcal{A}$ es una familia probabilizable de subconjuntos borrosos de E, entonces, para todo $A \in \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{F}(E)$, puede escribirse su probabilidad, sustituyendo en (15.6), la función característica por la función de pertenencia, de modo que la **probabilidad del conjunto borroso** A es:

$$p(A) = \sum_{e \in E} A(e) p(e) \tag{15.7}$$

si $\mathcal{A}$ es una álgebra, y:

$$p(A) = \int_{\mathbb{R}} A(e) p(e) de \tag{15.8}$$

si $E = \mathbb{R}$, un ejemplo de que $\mathcal{A}$ sea una σ-álgebra. Puede verse la demostración de que es una probabilidad, por ejemplo, en la obra de KAUFMANN y GIL ALUJA [412] (pp. 72-73).

15.2.2 Probabilidad de un suceso borroso elemental

Sea $\mathcal{L}(E)$ una *partición borrosa*[1]. Consideremos como universo de discurso $\mathcal{L}(E)$, finito. De su conjunto potencia, $\mathfrak{P}(\mathcal{L}(E))$, podemos extraer familias probabilizables de subconjuntos nítidos de $\mathcal{L}(E)$. Llamamos **suceso borroso elemental** a cualquier elemento $e_L \in \mathcal{L}(E)$.

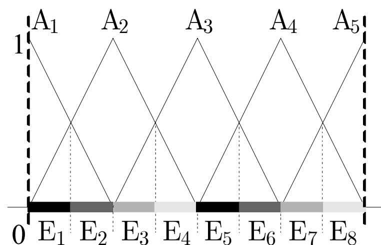


Figura 15.1: *Partición nítida* $\{E_1, \ldots, E_8\}$ *inducida por la partición borrosa* $\{A_1, \ldots, A_5\}$.
— *Cfr.* Nota a pie de página n. 1.
— *Fuente:* Elaboración propia.

Si no consideramos la posibilidad de sobrevaloración (esto es, crear nuevas etiquetas e_L), entonces podemos considerar $\mathcal{L}(E) = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ como un *sistema completo de sucesos borrosos*, en el sentido de su exhaustividad:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \mathcal{L}(E) \tag{15.11}$$

y de ser mutuamente excluyentes para una interpretación natural ($\alpha > 0.5$, si se trata de una partición triangular como la de la Fig. 15.1):

$$\mathcal{T}(A_1, A_2) = 0$$

donde $\mathcal{T}$ es una t-norma. Todo ello permite definir una probabilidad sobre $\mathcal{L}(E)$[2].

Teorema 282 *Sea p una ley de probabilidad definida en E. Entonces:*

$$p(e_L) = \int_{\mathbb{R}} e_L(e)p(e)de \tag{15.12}$$

es una ley de probabilidad sobre $\mathcal{L}(E)$.

[1] Una *partición borrosa* la entendemos tal y como la definió Ruspini [1341]. Sean $\mathcal{U}$ un universo de discurso no vacío y $A, A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$, no vacíos. Se dice que la colección $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una **partición borrosa**$^{(*)}$ de A precisamente si $\forall u \in \mathcal{U}$:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(u) = A(u) \tag{15.9}$$

Observe el lector que, en particular, se dice que la colección $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una partición borrosa de $\mathcal{U}$ precisamente si $\forall u \in \mathcal{U}$, (15.9) queda:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(u) = 1 \tag{15.10}$$

Pedrycz [449] (p. 81) denomina **partición nítida inducida** por una partición borrosa, a aquella cuyos miembros son los intervalos definidos por las ordenadas de los puntos intersección de las gráficas de las funciones de pertenencia de los miembros de la partición borrosa —*cfr.* Fig. 15.1.

$^{(*)}$ Algunos autores —*cfr. v. gr.* Cordón, Herrera, Hoffmann y Magdalena [1342] (p. 113)— califican como «fuerte» a la que Ruspini [1341] llamó simplemente partición borrosa. Otros autores —*cfr. v. gr.* Klir y Yuan [46]— la denominan pseudopartición borrosa, reservando el nombre de partición borrosa a las generadas por relaciones de equivalencia borrosas. Klir y Yuan [46] (p. 392, Ec. 13.2) exigen además que ningún A_i sea $\varnothing$ ni $\mathcal{U}$.

[2] Sea $(E, \mathfrak{B}, P)$ un espacio de probabilidades. Sea ξ una v.a. discreta que toma los valores X_n $(n = 1, 2, ...)$. Sea A_n el suceso $\xi = A_n$, o sea: $A_n = \{a \in E : \xi(a) = X_n\}$. Resulta evidente que: *i)* $A_n \cap A_m = \varnothing$, *ii)* $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = E$, y *iii)* $\Sigma_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 1$. La colección de sucesos $\{A_n\}$, se dice que es un **sistema completo de sucesos** (nítidos), precisamente si satisface las condiciones *i)* y *ii)*. Si, además, se satisface *iii)*, se dice que se tiene un sistema completo de sucesos con sus probabilidades (dadas por una **distribución de probabilidad**, finita o numerable) —*cfr.* Ríos (p. 36).

Demostración. En efecto:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{e_L \in \mathcal{L}(E)} p(e_L) &= \textstyle\sum_{e_L \in \mathcal{L}(E)} \left(\int_{\mathbb{R}} e_L(e) p(e) de\right) \\
&= \textstyle\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{e_L \in \mathcal{L}(E)} e_L(e)\right) p(e) de \\
&= \textstyle\int_{\mathbb{R}} p(e) de \qquad (*) \\
&= 1 \qquad (**)
\end{aligned}$$

$(*)$ por ser $\mathcal{L}(E)$ una partición borrosa;
$(**)$ por ser p una densidad sobre E. ∎

15.2.3 Función de verosimilitud para un valor numérico de la evidencia

Sea $\{E_1, \ldots, E_n\}$ la partición nítida de E, inducida por la partición borrosa $\mathcal{L}(E)$. Para todo $e \in E$, podemos escribir:

$$p(e) = k_e \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(e) p(E_i) \tag{15.13}$$

siendo (debido a la aditividad de una probabilidad) $k_e \in [0, 1]$ y $\sum_{e \in E_i} k_e = 1$, para cualquier $i = 1, \ldots, n$.

Proponemos basar la definición de la probabilidad de una evidencia simple e, en las probabilidades de los subconjuntos borrosos miembros de la partición borrosa $\mathcal{L}(E)$ inductora de la partición nítida $\{E_1, \ldots, E_n\}$, es decir, en los sucesos borrosos elementales $e_L \in \mathcal{L}(E)$:

$$p(e) \propto \sum_{e_L \in \mathcal{L}(E)} e_L(e) p(e_L) \tag{15.14}$$

De aquí, que definamos la verosimilitud correspondiente a un valor e de la evidencia E, mediante:

$$p(e|H_j) \propto \sum_{e_L \in \mathcal{L}(E)} e_L(e) p(e_L|H_j) \tag{15.15}$$

De este modo, dada una hipótesis H_j, proponemos definir la **función de verosimilitud para un valor numérico de la evidencia**, $e \in E$, a partir de las verosimilitudes de los valores borrosos e_L de la evidencia (dada la misma hipótesis H_j):

$$L(H_j|e) \propto \sum_{e_L \in \mathcal{L}(E)} e_L(e) p(e_L|H_j) \tag{15.16}$$

15.2.4 Un primer minero

Podemos normalizar $L(H_j|e)$ con respecto a la evidencia:

$$L^*(H_j|e) = \sum_{e_L \in \mathcal{L}(E)} \frac{e_L(e)}{A(e_L)} p(e_L|H_j) \tag{15.17}$$

donde $A(e_L)$ es la área de la función de pertenencia e_L, es decir:

$$A(e_L) = \int_{\mathbb{R}} e_L(e) de \tag{15.18}$$

Proponemos un primer mecanismo bayesiano borroso; un primer minero:

i) Definir la verosimilitud correspondiente a cualquier valor continuo e de la evidencia (dada una causa o hipótesis H_j), a partir de las verosimilitudes $p(e_L|H_j)$ de los valores borrosos e_L de la evidencia (dada la misma hipótesis H_j), a través de $L^*(H_j|e)$, es decir:

$$f(e|H_j) = L^*(H_j|e) \tag{15.19}$$

ii) Combinar la fdp a priori con la función de verosimilitud para obtener la fdp a posteriori:

$$p(H_j|e) \propto p(H_j) f(e|H_j) \tag{15.20}$$

iii) Normalizar la fdp a posteriori utilizando la norma $\| \|_1$:

$$p(H_j|e) = \frac{p(H_j)f(e|H_j)}{\sum_{k=1}^{m} p(H_k)f(e|H_k)} \tag{15.21}$$

Este método para evidencia simple, extensible de inmediato al caso de evidencia múltiple —*cfr.* §15.4— no está parametrizado por ninguna constante, como ocurría con la propuesta de YANG —*cfr.* §15.1— y con la de CHAN y LAN [1340] (pp. 405-406).

Basta suponer que $e_L(e)$ sea integrable para que obtengamos como función de distribución absolutamente continua $F(e|H_j) = \int_{-\infty}^{e} f(u|H_j)du$, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 283 *Supongamos que todas las $e_L \in \mathcal{L}(E)$ son integrables. Entonces, para cada causa o hipótesis H_j:*

$$F(e|H_j) = \int_{-\infty}^{e} f(u|H_j)du \tag{15.22}$$

es una función de distribución, siendo $f(e|H_j)$ su función de densidad.

Demostración. En efecto:

i) F es no decreciente, ya que si $e < e'$, entonces, para cualquier $e_L \in \mathcal{L}(E)$:

$$\int_{-\infty}^{e} e_L(u)du \leq \int_{-\infty}^{e'} e_L(u)du \tag{15.23}$$

(en el soporte de e_L, la desigualdad es estricta). Por tanto, $F(e|H_j) \leq F(e'|H_j)$.

ii) $\lim_{e \longrightarrow -\infty} F(e|H_j) = 0$, pues suponemos que todas las $e_L \in \mathcal{L}(E)$ tienen área finita.

iii) $\lim_{e \longrightarrow +\infty} F(e|H_j) = 1$, pues:

$$\begin{aligned}
\lim_{e \longrightarrow +\infty} F(e|H_j) &= \int_{\mathbb{R}} f(u|H_j)du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{e_L \in \mathcal{L}(E)} \frac{e_L(u)}{A(e_L)} p(e_L|H_j) \right) du \\
&= \sum_{e_L \in \mathcal{L}(E)} \left(p(e_L|H_j) \frac{1}{A(e_L)} \int_{\mathbb{R}} e_L(u)du \right) \\
&= \sum_{e_L \in \mathcal{L}(E)} \left(p(e_L|H_j) \frac{1}{A(e_L)} A(e_L) \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

■

Observación 284 *La normalización con respecto a la evidencia no es la única posibilidad. También podríamos haber* ***normalizado con respecto al espacio de parámetros****:*

$$L^*(H_j|e) = \frac{L(H_j|e)}{\max\{L(H|e) : H \in \Theta\}} \tag{15.24}$$

Esta normalización, en realidad, nos dice que:

$$\max\{L^*(H|e) : H \in \Theta\} = 1 \tag{15.25}$$

cuyo significado (el máximo de lo verosímil lo establece la perfección, lo total y absolutamente verosímil) no es el mismo que el de la normalización aditiva (lo más verosímil es la unión de todo lo verosímil, y viceversa). Cuando el lector lea en el Desenlace de esta Tesis acerca de la teoría de la posibilidad —cfr. §18.6—, se topará de nuevo con la normalización por máximo, y justo en el mismo sentido que aquí.

15.3 Ejemplo ilustrativo: Grado de destreza en el desempeño de una tarea

«No hay malos soldados, sino malos oficiales.»
—Napoleón Bonaparte



Debemos aclarar qué aspectos nos interesa medir, en particular, en este caso, qué destrezas son necesarias para evaluar el desempeño de un tarea, y de qué manera las valoraremos (cuantitativa o cualitativamente). Además, en la **heterodescripción del desempeño de una tarea**, concurren, al menos: el desempeño de la labor por parte de un trabajador, lo que observan los expertos observadores, el ambiente de trabajo, lo que observan los compañeros del trabajador, la comunicación de lo observado al trabajador y el aprovechamiento por parte del trabajador de lo observado.

Además de la distinción entre los factores personales y los factores relativos a la tarea, debemos diferenciar, como subtipos, entre los permanentes y los coyunturales o transitorios.

«El conocimiento de las variables de la persona (o atributos personales) tiene dos facetas; a saber, el conocimiento de las capacidades y cualidades permanentes de uno mismo [...] y el conocimiento de procesos y estados transitorios.»
—J. Nisbet y J. Schucksmith [1343], *via* Carlos Monereo (coord.), Montserrat Castelló, Mercé Clariana, Montserrat Palma y María Llüisa Cabaní, [112] (p. 79)

Y como subtipos específicos de los factores personales, ciertas componentes características de toda persona, y en las cuales somos diferentes, pero a las cuales no somos indiferentes: componentes *sensoriales discriminativas*, componentes *motoras*, componentes *afectivas* (emocionales) y componentes *vegetativas* (autónomas).

Por otro lado, cuando alguien se enfrenta a una tarea, su creencia en que podrá realizarla con más o menos éxito se basa en su bagaje. Esta aseveración, que puede asemejársenos banal, no lo es. La experiencia promueve una actitud o predisposición optimista o pesimista hacia la tarea —piense en lector en frases como: «Lo haré bien, como siempre.»; «Lo haré mal, como la otra vez.»—. Esta actitud es consecuencia de una miscelánea entre las que podríamos denominar **autoconcepción** —valoración personal de nuestros hábitos o competencias— y **autocompetencia orientada** —valoración personal de nuestra competencia para realizar una tarea determinada.

Otra cuestión es si lo que nos interesa evaluar es el *proceso* o el *producto* —*cfr.* Thorndike [915] (p. 66)—. En cualquier caso, debemos determinar qué aspectos (del proceso o del producto) deben evaluarse, cuál es su naturaleza, y cómo deben ser ponderados para la evaluación global.

Dado un trabajador y una tarea, distinguimos cinco hipótesis o situaciones exhaustivas y mutuamente excluyentes, según el grado de destreza del trabajador al desempeñar dicha tarea. La tarea puede ser desempeñada: torpemente, atolondradamente, con soltura, con pericia —queriendo decir esto que el trabajador ha incorporado recursos extra para el desempeño de la misma—, o con habilidad sorprendente. Denominamos *grado de destreza en el desempeño* a cada una de estas clases. Dado un trabajador, la finalidad es clasificar cada tarea a desempeñar en una de estas cinco clases, indicando así el grado de destreza del trabajador en el desempeño de la tarea en cuestión.

La evidencia nítida está representada por cualquier nota o puntuación (por ejemplo, en una escala de 0 a 10) que sea dada al trabajador (por ejemplo, por una comisión evaluadora de expertos) en relación al grado de destreza en el desempeño de una tarea determinada. Notamos por e tal nota, esto es, cualquier valor puntual numérico y nítido de la evidencia.

Pero para conseguir que varios expertos compartan información relacionando la evidencia con las clases de

grado de destreza, parece mucho más conveniente usar evidencia borrosa en vez de evidencia nítida. Consideramos un conjunto de términos de cinco valores lingüísticos o palabras, de cinco valores borrosos de evidencia:

$$\mathcal{L}(E) = \{\text{muy bajo (MB), bajo (B), medio (M), alto (A), muy alto (MA)}\} \tag{15.26}$$

El problema es: dado un trabajador, al que se le ha asignado (p. ej., en media, por una comisión evaluadora de expertos) una puntuación numérica nítida, en referencia a la evaluación del desempeño de una tarea (por una prueba o test rápido de desempeño), entonces, decidir cuál es el grado de destreza del trabajador en el desempeño de la tarea en cuestión (durante una actividad normal y no en una prueba o test rápido), es decir, clasificar la tarea, con respecto a dicho trabajador, en una de las cinco clases mencionadas anteriormente, según la tarea sea desempeñada por dicho trabajador, torpemente, atolondradamente, con soltura, con pericia, o con habilidad sorprendente:



Los valores lingüísticos $e_L \in \mathcal{L}(E)$ deben definirse, o sea que tenemos que definir la forma de sus funciones de pertenencia. Por ejemplo, en la teoría de control borroso son muy utilizados los números borrosos triangulares y los trapezoidales, debiéndose principalmente, a su facilidad de cómputo. Deberíamos recordar que las funciones de pertenencia son medidas subjetivas de los términos lingüísticos que nos permiten estar cerca de la computación con palabras.

Si suponemos que son números borrosos trapezoidales, o sea, como la siguiente función dependiente de cuatro parámetros (los vértices del trapecio):

$$TRAP(e; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{e-a}{b-a}, 1, \frac{d-e}{d-b}\right), 0\right) \tag{15.27}$$

significando esto que si $e_L(e) = TRAP(e; a, b, c, d)$, entonces si la puntuación (la evidencia simple numérica e) de un trabajador está entre b y c, consideramos como cierto que el término asociado a esa puntuación es e_L. Las formas trapezoidales reflejan nuestras dudas en las *colas*, o sea, que si la puntuación del trabajador está entre a y b o entre c y d, no estamos en absoluto seguros de que el término lingüístico asociado a tal puntuación sea e_L.

Si $b = c$, es decir, si el intervalo «cierto» se reduce a un punto, entonces se dice que se trata de un número borroso triangular, esto es, una función dependiente de tres parámetros (los vértices del triángulo):

$$T(e; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{e-a}{b-a}, 1, \frac{c-e}{c-b}\right), 0\right) \tag{15.28}$$

significando esto que si $e_L(e) = T(e; a, b, c)$, entonces si la puntuación (la evidencia simple numérica e) de un trabajador es b, consideramos como cierto que el término asociado a esa puntuación es e_L.

En particular, suponemos que trabajamos con números borrosos triangulares y con una escala de 0 a 10 para las puntuaciones numéricas. Concretamente, supongamos que los valores borrosos que consideramos son los de la Tabla 15.1, que podemos también observar en la Fig. 15.2.

	a	b	c
muy bajo	-2.5	0	2.5
bajo	0	2.5	5
medio	2.5	5	7.5
alto	5	7.5	10
muy alto	7.5	10	12.5

Tabla 15.1: *Valores numéricos actuales que suponemos para los parámetros de los valores borrosos triangulares.* —*Fuente:* Elaboración propia.

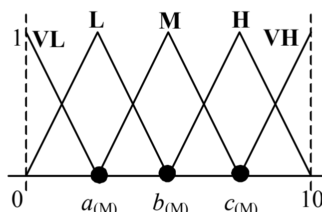


Figura 15.2: *Números borrosos triangulares. Figuran destacados los parámetros del valor lingüístico* MEDIO. — *Fuente:* Elaboración propia.

Podemos usar el mecanismo de inferencia bayesiano borroso que hemos propuesto en §15.2.4, para determinar la clase del grado de destreza, conocidas las a priori y las probabilidades de verosimilitud. Estimaremos la clase de grado de destreza a la que pertenece la tarea, con respecto al trabajador en estudio, como la máxima a posteriori (MAP):

$$\widehat{H} = \arg \max_{H \in \{H_j\}} \{p(H_j|e)\} \tag{15.29}$$

siempre que las probabilidades condicionadas $p(e_L|H_j)$ y las a priori $p(H_j)$ sean conocidas.

Las a priori «basadas en datos» para cualquier clase de grado de destreza pueden deducirse a partir de la información contenida en muestras de experiencias pasadas en las que la misma tarea ha tenido que ser desempeñada. Caso de haber varias distribuciones correspondientes a diferentes épocas, atribuiremos una mayor importancia a las correspondientes a períodos más recientes, puesto que suponemos una componente claramente evolutiva, de desarrollo y perfeccionamiento profesional, de manera que los datos más recientes reflejarán con mayor precisión lo que acontecerá en un futuro.

A la hora de calcular el MAP necesitamos las probabilidades condicionadas $p(e_L|H_j)$ de la evidencia borrosa dadas las hipótesis, y las probabilidades a priori de la hipótesis —*cfr.* Ecs. (15.19) y (15.21)—. Supongamos que la distribución a priori y las condicionadas son las que muestran las Tablas 15.2 y 15.3, respectivamente.

	$p(\cdot)$
torpemente	0.125
atolondradamente	0.200
con soltura	0.600
con pericia	0.050
con habilidad sorprendente	0.025

Tabla 15.2: *Ejemplo de distribución a priori.* —*Fuente:* Elaboración propia.

Debemos hacer notar que, por ejemplo, $p($atolondradamente$) = .2$ significa que nuestra confianza en el hecho de que un trabajador seleccionado aleatoriamente desempeñe de manera atolondrada una tarea elegida

	muy bajo	bajo	medio	alto	muy alto
torpemente	0.76	0.21	0.03	0	0
atolondradamente	0.15	0.39	0.34	0.10	0
con soltura	0.05	0.11	0.67	0.17	0
con pericia	0	0	0.07	0.67	0.26
con habilidad sorprendente	0	0	0	0.02	0.98

Tabla 15.3: *Ejemplo de probabilidades condicionadas valoradas numéricamente.* —*Fuente:* Elaboración propia.

aleatoriamente es 0.2. También debemos recordar que, por ejemplo, una probabilidad p(muy bajo | con habilidad sorprendente) igual a cero, es razonable, porque significa que cero es la probabilidad —entendiendo que representa un grado de creencia razonable o confianza, más que una frecuencia— de que un experto clasifique como muy bajo el grado de destreza que hace referencia al desempeño de una tarea por parte de un trabajador que en realidad lo hace con habilidad sorprendente.

Podemos pues, en este momento, dada una puntuación numérica (mediante una prueba o test rápido de desempeño), calcular las probabilidades a posteriori, y aplicar la Ec. (15.29), para conocer el estimador MAP del grado de destreza con el que este trabajador desempeñará la tarea (durante una actividad normal y no en una prueba o test rápido).

15.4 Estudio real de un caso: Modelos de alumnos (*bis*)

«Clasificamos en exceso y no disfrutamos lo suficiente.»
—Okakura Kakuzo (1862-1913) <El libro del té>

Consideremos la colección de todas las respuestas dadas a las encuestas por los alumnos del curso 2002-03. Elijamos aleatoriamente una respuesta ¿Qué especialidad está cursando el alumno que la proporcionó, I.T.I.S. o I.I.?

Las hipótesis, exhaustivas y mutuamente excluyentes son: H_1 = «ser alumno de I.T.I.S.» y H_2 = «ser alumno de I.I.». Como distribuciones a priori, podríamos pensar en construirlas a partir del «historial» de la Escuela Politécnica:

$$p(ITIS) = \frac{\#\text{matriculados en ITIS}}{\#\text{matriculados en ITIS} + \#\text{matriculados en II}} \tag{15.30}$$

$$p(II) = \frac{\#\text{matriculados en II}}{\#\text{matriculados en ITIS} + \#\text{matriculados en II}} \tag{15.31}$$

Las frecuencias relativas nos permiten estimar las verosimilitudes.

Curso 02-03		no importante	poco importante	medianamente importante	importante	muy importante
GE	ITIS	0.000	$1/21 \approx 0.048$	$8/21 \approx 0.381$	$10/21 \approx 0.476$	$2/21 \approx 0.095$
	II	$1/39 \approx 0.026$	$1/39 \approx 0.026$	$10/39 \approx 0.256$	$16/39 \approx 0.410$	$11/39 \approx 0.282$
SG	ITIS	0.000	0.000	$8/21 \approx 0.381$	$4/21 \approx 0.190$	$9/21 \approx 0.429$

Para relajar la notación, podemos numerar las motivaciones profesionales: $1 \leftarrow$ GE, $2 \leftarrow$ SG, etc. Así, por ejemplo:

$$p_1(\text{medianamente importante} \mid H_2) = 10/39 = 0.256$$

significa que ésta es la probabilidad de que la motivación profesional GE sea considerada como no importante por un alumno de I.I. del curso 2002-03.La evidencia múltiple está dada por un vector observado $(e_1, \ldots, e_{15})$, donde cada $e_i \in \{3, 4, \ldots, 15\}$.

Así, para toda hipótesis H_j (ITIS ó II) y para toda motivación profesional $i \in \{1, \dots, 15\}$:

$$f_i(e_i|H_j) = \frac{\mathrm{NI}(e_i)}{A(\mathrm{NI})} p_i(\mathrm{NI}|H_j) + \frac{\mathrm{PI}(e_i)}{A(\mathrm{PI})} p_i(\mathrm{PI}|H_j) + \ldots + \frac{\mathrm{MyI}(e_i)}{A(\mathrm{MyI})} p_i(\mathrm{MyI}|H_j) \tag{15.32}$$

Sin contar la diagonal, los valores de la matriz de correlación por pares, correspondiente a los datos del curso 2002-03, son, en un 90 por ciento, menores que 0.5. Por ello, suponemos que las 15 motivaciones profesionales son mutuamente independientes. Entonces:

$$p(H_j|e_1, \dots, e_{15}) = p(H_j) \prod_{i=1}^{15} \frac{f_i(e_i|H_j)}{f_i(e_i|\mathrm{ITIS})p(\mathrm{ITIS}) + f_i(e_i|\mathrm{II})p(\mathrm{II})} \tag{15.33}$$

siendo:

$$f_i(e_i|H_j) = \sum_{e_L \in \mathcal{L}(E)} \frac{e_L(e_i)}{A(e_L)} p_i(e_L|H_j) \tag{15.34}$$

De este modo:

$$\widehat{H} = \arg \max_{H \in \{\mathrm{ITIS}, \mathrm{II}\}} \{p(H|e_1, \dots, e_{15})\} \tag{15.35}$$

Este estudio queda planteado y se podría desarrollar durante los próximos años. Hemos de tener mayor evidencia, un número mayor de alumnos encuestados.

Una vez que pase tiempo y completemos la experiencia, podríamos tener una primera idea del comportamiento de nuestro método utilizando los tres indicadores siguientes. Denotemos por VP el número de **verdaderos positivos**, o sea el número de casos positivos clasificados correctamente; por VN, el número de **verdaderos negativos**, es decir, el número de casos negativos clasificados correctamente; por FP, el número de **falsos positivos**, esto es, el número de verdaderos negativos que han sido clasificados como positivos, y por FN, el número de **falsos negativos**, o sea, el número de verdaderos positivos que han sido clasificados como negativos.

En la experiencia que planteamos, los VP con respecto a ITIS (VP_{ITIS}) son los VN con respecto a II (VN_{II}), ocurriendo algo parecido con los demás casos, como muestra la Tabla 15.4.

	Realmente es de ITIS	Realmente es de II
Clasificado como de ITIS	$VP_{ITIS} = VN_{II}$	$FP_{ITIS} = FN_{II}$
Clasificado como de II	$FN_{ITIS} = FP_{II}$	$VN_{ITIS} = VP_{II}$

Tabla 15.4: *Verdaderos positivos (VP), verdaderos negativos (VN), falsos positivos (FP) y falsos negativos (FN). Obsérvese que un caso verdadero positivo con respecto a ITIS es un caso verdadero negativo con respecto a II.*
— *Fuente:* Elaboración propia.

Sea M nuestro método clasificador. La probabilidad de que M clasifique un alumno de H_i, representado por un perfil $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{15})$, en H_j, es:

$$\gamma_{ij}(M) = P(M(\mathbf{e}) = j|\mathbf{e} \in H_i) \tag{15.36}$$

que, por solo haber dos hipótesis, es la probabilidad de clasificar mal un alumno de H_i.

Como indicadores del comportamiento de nuestro clasificador M, podemos estimar su **sensibilidad** (probabilidad de que no aparezcan falsos negativos), con respecto a H_1 (I.T.I.S.):

$$\gamma_{11}(M) = 1 - \gamma_{12}(M) \tag{15.37}$$

$$= \frac{VP_{ITIS}}{VP_{ITIS} + FN_{ITIS}} \tag{15.38}$$

y con respecto a H_2 (I.I.):

$$\gamma_{22}(M) = 1 - \gamma_{21}(M) = \frac{VP_{II}}{VP_{II} + FN_{II}}$$

que son, respectivamente, su **especificidad** (probabilidad de que no aparezcan falsos positivos) con respecto a H_2 (I.I.):

$$\frac{VN_{II}}{VN_{II} + FP_{II}} \tag{15.39}$$

y con respecto a H_1 (I.T.I.S.):

$$\frac{VN_{ITIS}}{VN_{ITIS} + FP_{ITIS}} \tag{15.40}$$

Observe el lector que valores altos de sensibilidad y especificidad indicarían la adecuación del método.

Insistimos, la finalidad de su inclusión en nuestra Tesis es meramente ilustrativa, para apreciar cómo actúa nuestro método en el caso de evidencia múltiple, bajo supuesto de independencia mutua.

15.5 Síntesis reflexiva

«Reflexionar es desordenar los pensamientos.»
—Jean Rostand <Pensamientos de un biólogo>

En un futuro muy cercano, la sección de Cocina del Hospital Central observa que necesitan renovar su batería de cocina, adquiriendo nuevos peroles, aunque esta vez «inteligentes». Han oído hablar de los últimos adelantos, y les suenan términos como «control inteligente», «tri-logic» o «"fasi" logic». Deciden pues, comprar varios de estos modernos «peroles que integran sistemas de cocción inteligente», en concreto, uno que asegura poder conocer el estado de las viandas en cualquier instante de tiempo a partir de la temperatura en el interior del perol medida en ese instante de tiempo. Si algún lector está pensando que el control no es necesario, observe que la el tiempo de cocción depende de muchos factores, entre otros de la calidad del agua, y de la intensidad del fuego. Hojeando el manual de instrucciones descubren que el artefacto, distingue tres situaciones —las viandas no están todavía en su punto, están en su punto, y se han recocido—, y diferencia entre cinco posibles temperaturas en el interior del perol: muy baja, baja, medianamente baja, media, medianamente alta, alta, y muy alta. El perol tiene dos pantallitas LCD, una indica la temperatura interior, y la otra indica el estado de las viandas. Medio minuto antes de que haya que apagar el fuego, el perol comienza a emitir un sonido estridente para requerir nuestra atención. Por cierto, que es la versión V1Z-01.2B de este tipo de peroles, y según sus fabricantes la experiencia ha sido amplísima, por lo que dicen que emplean inferencia Bayesiana[3].

Los primeros trabajos en inferencia bayesiana borrosa se originaron en el estudio de proyectos de seguridad en diferentes investigaciones de fiabilidad estructural. La función de densidad de verosimilitud para el valor continuo de la evidencia era aproximada por distribuciones normales y Weibull, lo que conllevaba el elevado coste computacional de la estimación de sus parámetros, complicando excesivamente su cálculo. Ante esto, Yang propone estimar dicha función de densidad de verosimilitud, a partir de la verosimilitud del valor borroso de la evidencia. Sin embargo, su propuesta está parametrizada por una constante, hecho que equivale a a imponer la restricción de que la razón entre el tamaño del rango cubierto por cualquier valor lingüístico e_L (el intervalo soporte de su función de pertenencia μ_{e_L}) y la área bajo μ_{e_L}, es la misma, sea cual sea el valor lingüístico e_L (el valor de tal cociente es el parámetro constante c). La propuesta para evidencia múltiple que desarrollan recientemente (2001) Chien-Lung Chan y Chung-Hsien Lan, para el caso de independencia mutua, conserva la dependencia de la constante c.

La propuesta que hemos presentado en este capítulo, *no está parametrizada por constante alguna —cfr.* §15.2.4—. Ilustramos su aplicación con el problema de evaluación del grado de destreza en el desempeño de una tarea —*cfr.* §15.3.

Las a priori «basadas en datos» para cualquier clase de grado de destreza pueden deducirse a partir de la información contenida en muestras de experiencias pasadas en las que la misma tarea ha tenido que ser

[3]En un futuro algo menos cercano, leemos un reportaje sobre cómo antiguamente tenías que comprar la cocina por un lado y los peroles por otro. Ahora, las cocinas incorporan peroles y todo es «inteligente». Los peroles intercambian información con los sistemas de calentamiento. Robots especializados cortan las verduras, carnes, etc., por lo que la cocina cuenta con datos precisos sobre las viandas (su calidad, cantidad, etc.), analizados por los sistemas de visión inteligente de todas estas máquinas. Los manuales de las cocinas se jactan de que ya no es necesario inferir. «No hace falta el pasado. El control exacto del presente asegura el conocimiento exacto del futuro», puede leerse en casi todas las esquinas (que por cierto, por Ley, todas son redondeadas). El lema de esta generación: la magia del sorites.

desempeñada. También puede ser que tengamos taxonomías de tareas o incluso ontologías. Como es lo habitual, estas taxonomías estarían expresadas por árboles jerárquicos, redes semánticas, estructuras conceptuales, etc. Esenciales para su construcción son las dificultades encontradas en el desempeño de las tareas pertenecientes a ellas. Las taxonomías de las tareas no se construyen para que dependan de un trabajador concreto. Podemos tener también taxonomías de trabajadores. Podríamos hacer, incluso, que las a priori dependiesen de ambas taxonomías.

La aplicación de nuestra propuesta al caso de evidencia múltiple, bajo independencia mutua, es inmediata; lo hemos ilustrado prosiguiendo el estudio de «modelos de alumnos» —*cfr.* §15.4.

En el siguiente capítulo suponemos que la evidencia nítida se ha valorado con intervalos. Si nos planteamos aplicar el esquema visto en este capítulo, entonces, para una $_\square e_L$ arbitraria, podríamos estimar $_\square A(e_L)$ mediante **integración Montecarlo** —*cfr. v. gr.* Ríos, Ríos y Martín [1344] (pp. 178ss). Si $\text{sop}^{(2}(e_L)$ denota el intervalo de tipo 2 soporte de e_L, entonces:

1. **Generar** $U_1, \ldots, U_N \sim \mathcal{U}\left(\mathbb{I}_G | \, \text{sop}^{(2}(e_L)\right)$
2. **Hacer** $\widehat{_\square A}(e_L) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} {_\square e_L}(U_i)$

La función de distribución de una v.a. $\mathcal{U}(a, b)$ es:

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt \tag{15.41}$$

$$= \frac{x-a}{b-a} \tag{15.42}$$

por lo que, mediante inversión, podemos generar números u, uniformes en (a, b):

$$F^{-1}(u) = a + (b-a)u \tag{15.43}$$

Una función de inclusión para F es[4]:

$$_\square F(X) = \int_A^X \frac{1}{B-A} dI \tag{15.44}$$

$$= \frac{X-A}{B-A} \tag{15.45}$$

siendo una función de inclusión de F^{-1} la siguiente:

$$_\square F^{-1}(I) = A + (B-A)I \tag{15.46}$$

[4] Sea $f(x)$ una función y $_\square f(X)$ una función de inclusión para ella. Una primitiva (antiderivada o integral indefinida) de $_\square f(X)$ es cualquier función de inclusión para una primitiva de $f(x)$, o sea:

$$\int {_\square f(X)} = {_\square \int f(x)}$$

Por ejemplo, si $f(x) = 2x$, una primitiva de $f(x)$ es:

$$\int f(x) = x^2$$

y una primitiva de $_\square f(X) = 2X$ es:

$$\int {_\square f(X)} = X^2$$

Definimos la integral (definida) de $_\square f(X)$ como una función de inclusión para la integral de $f(x)$. Por ejemplo, como:

$$\int_x^y f(u)du = y^2 - x^2$$

es la integral de $f(x) = 2x$, con límites $x, y \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\int_X^Y {_\square f(U)} dU = {_\square \int_x^y f(u)du} = Y^2 - X^2$$

es la integral de $_\square f(U)$ con límites $X, Y \in \mathbb{IR}$.

Observemos que el referencial de la integral es $\mathbb{IR}$. Esto es así porque el soporte de $_\square f$ es un intervalo de tipo 2 —intervalo cuyos extremos no son números, sino intervalos ordinarios (de tipo 1)—. El valor del área comprendida bajo $_\square f$ y entre los extremos inferior y superior del intervalo de tipo 2, no se expresa mediante un número real, sino mediante un intervalo de números reales.

Pero, si $-$ es la diferencia estándar entre intervalos, entonces:

$$A + (B - A)I \tag{15.47}$$

no es una solución de la ecuación:

$$I = \frac{X - A}{B - A} \tag{15.48}$$

Aunque algunos autores han estudiado posibles diferencias no estándares —*cfr.* MARKOV [301, 303, 1345, 286]; DIMITROVA, MARKOV y POPOVA [1346]—, nosotros optamos por otro punto de vista, que desarrollamos en los capítulos siguientes.

16

Un minero de datos ataviado con indumentaria tornasolada (borrosa y bayesiana) (*bis*)

«*La imprecisión de los instrumentos de medida (particularmente en problemas de decisión) y la complejidad de las decisiones que deben ser comparadas, hacen que, a menudo, sea difícil traducir en números precisos, la evaluación de una decisión tomada desde un punto de vista. En tales casos, cada acción a puede ser evaluada mediante un intervalo* $[\mathrm{x}_a,\mathrm{y}_a]$.»
—Philippe Vincke [104] (p. 12)

En esta segunda parte, suponemos que disponemos de una evidencia nítida, valorada con intervalos, que se ha asignado al ítem bajo estudio con relación al grado de satisfacción de una propiedad, grado que se clasifica en varios tipos. Continuaremos con el mismo ejemplo relativo al grado de destreza en el desempeño de una tarea. El problema es: dado un trabajador, al que se le ha asignado (p. ej., en media, por una comisión evaluadora de expertos) una puntuación nítida, en forma de intervalos, en referencia a la evaluación del desempeño de una tarea (por una prueba o test rápido de desempeño), entonces, decidir cuál es el grado de destreza del trabajador en el desempeño de la tarea en cuestión (durante una actividad normal y no en una prueba o test rápido), es decir, clasificar la tarea, con respecto a dicho trabajador, en una de las cinco clases mencionadas anteriormente, según la tarea sea desempeñada por dicho trabajador, torpemente, atolondradamente, con soltura, con pericia, *o* con habilidad sorprendente.
Insistimos en la diferencia con el planteamiento del capítulo anterior: la evidencia se valora aquí con intervalos. En el capítulo siguiente, la tercera parte del «minero», abordaremos el problema suponiendo que la evidencia se valora con palabras.

16.1 Obertura: Los satisfactores de Max-Neef

«*La gente se divide en dos categorías: unos buscan y no encuentran; otros encuentran y no están contentos.*»
—Mihail Eminescu <Pensamientos>

El propósito de la Economía, es ayudar a la sociedad a decidir cómo crear, distribuir y consumir la riqueza. La riqueza es un medio para alcanzar un fin, un medio por el cual las personas pueden desarrollar su potencial innato y llevar vidas plenas y satisfactorias. Los economistas llaman a este fin el **bienestar**. Entre sus componentes podemos citar: la renta, la salud, la cantidad y calidad del trabajo y del ocio, la calidad del medio ambiente, la seguridad personal y social, y la vida emocional y espiritual del individuo. Posiblemente, estos componentes están relacionados con la **satisfacción** o la **felicidad**. Pero ambas son cualidades subjetivas. La postura tradicional de la Economía ha sido considerar como «**deseos**» todas las componentes del bienestar, y además, bajo la máxima de «cuanto más, mejor», aplicada tanto al número de «deseos», como a la satisfacción de cada uno de ellos.

La **Economía Verde** —*cfr.* Ekins, Hillman y Hutchison [180] (p. 31)— distingue entre deseos y

necesidades. El bienestar llega, en primer lugar, a través de la satisfacción de **necesidades**[1]. También llega por la satisfacción de deseos, pero, y esto es lo importante, también llega de la disminución del número de deseos. Perfectamente podemos considerar satisfecho el deseo de algo, desde el momento que hemos dejado de desearlo. El problema real es que en las sociedades de consumo, cada vez son más las personas que necesitan cada vez más cosas (reflexione el lector sobre el propósito del *marketing*: convertir los deseos en necesidades). Para los ámish —comunidad protestante descendiente de los menonitas, originarios de Suiza, seguidores de la interpretación estricta de la amonestación de San Pablo: «No os amoldéis a este mundo» (Romanos, 12, 2)—, por ejemplo, el consumo consiste en la satisfacción de necesidades, y no de deseos.

Manfred Max-Neef relaciona el bienestar objetivo con la satisfacción subjetiva a través de las necesidades humanas. En su teoría del **Desarrollo a Escala Humana** [1348], defiende que las **necesidades humanas fundamentales** son objetivas, invariables, universales y clasificables. Estas necesidades son: la subsistencia, la protección, el afecto, la comprensión, la participación, la creación, el recreo, la identidad y la libertad. Lo variable son los medios mediante los que se satisfacen tales necesidades: sus **satisfactores**. Para cualquier necesidad fundamental, Max-Neef clasifica sus satisfactores según cuatro modos de la experiencia humana: *ser*, *hacer*, *tener* y *relacionarse*. La Tabla 16.1 muestra los satisfactores de la necesidad fundamental «creación», clasificados según los modos de la experiencia humana que Max-Neef considera.

Creación			
Ser	**Tener**	**Hacer**	**Relacionarse**
Pasión	Habilidades	Trabajar	Marcos productivos
Decisión	Oficios	Inventar	y de reaprovechamiento
Intuición	Método	Construir	de la información
Imaginación	Trabajo	Diseñar	Seminarios
Audacia		Componer	Grupos culturales
Racionalidad		Interpretar	Auditorios
Inventiva			Espacios para la expresión
Autonomía			Libertad temporal
Curiosidad			

Tabla 16.1: *Satisfactores de la necesidad fundamental «creación», clasificados según los modos de la experiencia humana que* Max-Neef *considera en su teoría del Desarrollo a Escala Humana.*
— *Fuente:* Max-Neef [1348].

La evaluación del grado de satisfacción de cualquier necesidad fundamental, es la evaluación del grado de satisfacción de sus satisfactores.

Algunos de estos satisfactores propuestos por Max-Neef, pueden sernos útiles como factores para la evaluación de ciertos aspectos en el **desempeño de tareas** y en el **aprendizaje de conceptos**. En concreto, la «creación», no ya como necesidad fundamental, sino como factor, y sus satisfactores como subfactores, es un actor importante en la evaluación del desempeño de determinadas tareas —*cfr.* nota a pie de página número 11 (pág. 11).

Tropezamos, de nuevo, como tantas veces, con cuestiones difíciles: problemas de calificación de los grados de pasión, decisión, intuición, inventiva, motivación, emoción, etc.

«La concepción de un mundo posible comprende la concepción de procedimientos para actuar sobre él.»
—Jerome S. Bruner [3] (p. 112)

16.2 La estimación de máxima verosimilitud

«La nuca es un misterio para el ojo.»
—Paul Valéry <Malos pensamientos y otros>

verosímil (del lat. *veri similis*) 1. adj. Que tiene apariencia de verdadero. || 2. Creíble por no ofrecer carácter alguno de falsedad.

Queremos estimar lo que tiene más apariencia de verdadero, lo que es más creíble por no ofrecer carácter alguno de falsedad. Tal estadístico se conoce como el *estimador de máxima verosimilitud* (EMV) —*maximum likelihood estimate* (MLE), en inglés.

[1] Necesidades consideradas como expresión sintética del movimiento en el tiempo y en el espacio tanto del individuo como del **colectivo**, ya sea en el plano de la familia, de una red de relaciones primarias, de un territorio determinado, etc. —*cfr.* León y Zemelman [1347] (p. 22).

Sea $\Theta = \{H_1, \dots, H_m\}$ el conjunto de hipótesis y $(\widetilde{\chi}_1, \widetilde{\chi}_2, \dots, \widetilde{\chi}_n)$ una muestra de datos imprecisos observados. La **función de verosimilitud** de H para $(\widetilde{\chi}_1, \widetilde{\chi}_2, \dots, \widetilde{\chi}_n)$ es la función:

$$L(\ |\widetilde{\chi}_1, \widetilde{\chi}_2, \dots, \widetilde{\chi}_n) : \Theta \to [0, 1]$$

tal que:

$$L(H|\widetilde{\chi}_1, \widetilde{\chi}_2, \dots, \widetilde{\chi}_n) = p(\widetilde{\chi}_1|H) \cdot \ldots \cdot p(\widetilde{\chi}_n|H) \tag{16.1}$$

para todo $H \in \Theta$.

El valor de H, notado $\widehat{H}^{\mathrm{EMV}}$, para el cual la verosimilitud para esa observación es máxima, se denomina el **estimador de máxima verosimilitud** de H:

$$\widehat{H}^{\mathrm{EMV}} = \arg \max_{H_k \in \Theta} L(H_k|\widetilde{\chi}_1, \widetilde{\chi}_2, \dots, \widetilde{\chi}_n) \tag{16.2}$$

Observación 285 *Notamos la función de verosimilitud mediante $L(H_j|e)$ para destacar que no es una función de densidad de probabilidad, al contrario que la verosimilitud $p(e|H_j)$ que sí lo es —cfr.* Zellner *[390] (p. 14),* Ríos *[1349] (pp. 398, 295)—. La función de verosimilitud $L(H_j|e)$ no es más que la verosimilitud $p(e|H_j)$ considerada como función de H_j. El* ***principio de verosimilitud*** *establece que la función de verosimilitud «constituye la evidencia completa del experimento, o sea, que dice todo lo que el experimento tiene que decir» —cfr.* Savage *[1350];* Birnbaum *[1351];* Berger *y* Wolpert *[1352]—.* Lindley *[44] (p. 59) lo enuncia en los siguientes términos:*
«Si dos conjuntos de datos, $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$*, satisfacen las siguientes propiedades:*
(i) sus distribuciones dependen del mismo conjunto de parámetros;
(ii) las verosimilitudes de estos parámetros para los dos conjuntos son las mismas;
(iii) las densidades a priori de los parámetros son las mismas para ambos conjuntos;
entonces, cualquier afirmación hecha acerca de los parámetros, usando $\boldsymbol{x}$*, debería ser la misma que cualquiera hecha usando* $\boldsymbol{y}$*.»*

16.3 Modelo de probabilidades imprecisas

«El ignorante afirma, el sabio duda y reflexiona.»
—Aristóteles

Toda distribución de probabilidad asigna un *valor preciso de probabilidad* a cada hipótesis, por lo que no asume la existencia de incertidumbre. Pero si la información a priori es escasa, existe incertidumbre.

Fundamentalmente, existen dos metodologías para tratar esta incertidumbre —*cfr.* Walley [1259]; Perichi y Walley [1353]—. La primera, conocida como **análisis de sensibilidad bayesiano** o Bayes *robusto* —*cfr.* Berger [1354]; Wassermann [1355]— asume la existencia de una distribución a priori ideal que modela, en teoría, la incertidumbre a priori, una vez asumido un error debido a ciertas limitaciones, por ejemplo en la asignación de las probabilidades.

La segunda aproximación se conoce como la teoría de *las* **probabilidades imprecisas**, *probabilidades inferior y superior* o *previsiones inferior y superior*, y ha sido desarrollada, principalmente, por Peter Walley [1259] —*cfr.* Gert De Cooman y Peter Walley [1356]—, a partir de ideas de Keynes [1357], Smith [1358] y Good [1359].

Según esta teoría, una distribución de probabilidad precisa, por ella sóla, no puede ser un modelo apropiado —*cfr.* Walley, Gurrin y Burton [1360]—. En vez de una única distribución, podemos usar una clase $\mathcal{M}$ de distribuciones a priori, de tal manera que cada a priori de $\mathcal{M}$ se actualiza mediante la regla de Bayes, generando una clase de distribuciones a posteriori. Las probabilidades inferior y superior de un suceso o hipótesis H, notadas mediante $\underline{P}(H)$ y $\overline{P}(H)$, se definen por:

$$\underline{P}(H) = \inf\{P(H) \mid P \in \mathcal{M}\} \tag{16.3}$$

$$\overline{P}(H) = \sup\{P(H) \mid P \in \mathcal{M}\} \tag{16.4}$$

La idea que subyace a esta teoría es la asunción de que ninguna distribución precisa de $\mathcal{M}$ puede considerarse como un modelo razonable para la incertidumbre a priori. De este modo, las conclusiones estadísticas se expresarán en términos de probabilidades a posteriori o esperanzas inferior y superior —*cfr.* Walley, Gurrin y Burton [1360].

16.4 Cálculo de las probabilidades a posteriori inferior y superior

«¡Ay de aquel que quiere seguir su camino en solitario!»
—Monique Bosco <La mujer de Loth>

Walley, Gurrin y Burton [1360] (pp. 463, 475-476) proponen calcular las probabilidades a posteriori inferior $\underline{P}(H|\mathbf{x})$ y superior $\overline{P}(H|\mathbf{x})$, correspondientes a una hipótesis H, de la forma que vamos a relatar en esta sección. Veámoslo con un ejemplo —*cfr.* Walley, Gurrin y Burton [1360] (p. 463).

Unos enfermos tratados con T_1 tienen una probabilidad constante de sobrevivir de θ_c y otros enfermos tratados con T_2 tienen una probabilidad constante de supervivencia de θ_e. Sea M una clase de distribuciones a priori de probabilidad, que modelan la ignorancia a priori acerca de θ_c y θ_e. Sea $L(\ |\mathbf{x})$ la función de verosimilitud generada por los datos $\mathbf{x}$: de 10 enfermos tratados con T_1, sobrevivieron 6, y de 9, tratados con T_2, sobrevivieron todos. Asumiendo independencia:

$$L(\theta_c, \theta_e|\mathbf{x}) \propto \theta_c^6(1-\theta_c)^4\theta_e^9 \tag{16.5}$$

De esta manera:

1. Se obtienen las distribuciones a posteriori $P(\ |\mathbf{x})$ a partir de las a priori $P \in M$ y de $L(\ |\mathbf{x})$:

$$\pi(\theta_c, \theta_e|\mathbf{x}) \propto \pi(\theta_c, \theta_e)L(\theta_c, \theta_e|\mathbf{x}) \tag{16.6}$$

   donde π y $\pi(\ |\mathbf{x})$ son las funciones de densidad de P y $P(\ |\mathbf{x})$, respectivamente.

2. Las distribuciones $\underline{P}(H|\mathbf{x})$ y $\overline{P}(H|\mathbf{x})$ se obtienen minimizando y maximizando la a posteriori $P(H|\mathbf{x})$ en el conjunto de distribuciones a posteriori.

Es de destacar que:

- Las inferencias satisfacen automáticamente el principio de verosimilitud —*cfr.* Obs. 285—; y
- debido al teorema 7.8.1 de Walley [1259], este método produce inferencias mutuamente consistentes o coherentes —*cfr.* Walley, Gurrin y Burton [1360] (pp. 459, 463).

Walley, Gurrin y Burton [1360] (p. 476) obtienen las probabilidades a posteriori inferior y superior de un subconjunto del espacio de parámetros. Sean Θ el espacio de parámetros y $A \subseteq \Theta$. Las probabilidades a posteriori inferior y superior de A se obtienen minimizando y maximizando, respectivamente, en el conjunto de densidades a posteriori $\pi^*(\ |\mathbf{x})$, la probabilidad a posteriori normalizada:

$$\pi(A|\mathbf{x}) = \frac{\int_A \pi^*(\theta|\mathbf{x})d\theta}{\int_\Theta \pi^*(\theta|\mathbf{x})d\theta} \tag{16.7}$$

Suponemos que la clase de densidades a posteriori $\pi^*(\ |\mathbf{x})$ puede expresarse en forma de intervalo de medidas —*cfr.* DeRobertis y Hartigan [1361]:

$$\Im^* = \{p^* : \forall\theta \in \Theta,\ l^*(\theta|\mathbf{x}) \leq p^*(\theta|\mathbf{x}) \leq u^*(\theta|\mathbf{x})\} \tag{16.8}$$

Por ello, para minimizar la probabilidad a posteriori normalizada $\pi(A|\mathbf{x})$, Walley, Gurrin y Burton [1360] (p. 476) proponen tomar en (16.7):

$$\pi^*(\theta|\mathbf{x}) = \begin{cases} l^*(\theta|\mathbf{x}) & \text{si } \theta \in A \\ u^*(\theta|\mathbf{x}) & \text{si } \theta \in \Theta\backslash A \end{cases} \tag{16.9}$$

pues, de esta manera, asignamos la mínima masa posible a A y la máxima masa posible al complementario de A en Θ. Para maximizar $\pi(A|\mathbf{x})$, basta intercambiar $u^*(\theta|\mathbf{x})$ y $l^*(\theta|\mathbf{x})$.

Este proceder conduce a las siguientes expresiones para la **probabilidad a posteriori inferior**:

$$\underline{P}(A|\mathbf{x}) = \frac{\int_A l^*(\theta|\mathbf{x})d\theta}{\int_A l^*(\theta|\mathbf{x})d\theta + \int_{\Theta\backslash A} u^*(\theta|\mathbf{x})d\theta} \tag{16.10}$$

y para la **probabilidad a posteriori superior**:

$$\overline{P}(A|\mathbf{x}) = \frac{\int_A u^*(\theta|\mathbf{x})d\theta}{\int_A u^*(\theta|\mathbf{x})d\theta + \int_{\Theta\backslash A} l^*(\theta|\mathbf{x})d\theta} \tag{16.11}$$

Observación 286 *Aunque* WALLEY, GURRIN *y* BURTON *[1360] (p. 476) las denominan así: probabilidad a posteriori inferior y probabilidad a posteriori superior, no son verdaderas probabilidades, pues, aunque:*

$$\begin{aligned} \underline{P}(\Theta|\mathbf{x}) &= \frac{\int_\Theta l^*(\theta|\mathbf{x})d\theta}{\int_\Theta l^*(\theta|\mathbf{x})d\theta + \int_\varnothing u^*(\theta|\mathbf{x})d\theta} \\ &= 1 \\ &= \frac{\int_\Theta u^*(\theta|\mathbf{x})d\theta}{\int_\Theta u^*(\theta|\mathbf{x})d\theta + \int_\varnothing l^*(\theta|\mathbf{x})d\theta} \\ &= \overline{P}(\Theta|\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{16.12}$$

y:

$$\begin{aligned} \underline{P}(\varnothing|\mathbf{x}) &= \overline{P}(\varnothing|\mathbf{x}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{16.13}$$

$\underline{P}$ *no es aditiva, ya que, notando:*

$$l_C^* \rightleftharpoons \int_C l^*(\theta|\mathbf{x})d\theta \tag{16.14}$$

$$u_C^* \rightleftharpoons \int_C u^*(\theta|\mathbf{x})d\theta \tag{16.15}$$

siendo $C \subseteq \Theta$*, entonces:*

$$\underline{P}(A|\mathbf{x}) + \underline{P}((\Theta\backslash A)|\mathbf{x}) = \frac{\int_A l^*(\theta|\mathbf{x})d\theta}{\int_A l^*(\theta|\mathbf{x})d\theta + \int_{\Theta\backslash A} u^*(\theta|\mathbf{x})d\theta} + \frac{\int_{\Theta\backslash A} l^*(\theta|\mathbf{x})d\theta}{\int_{\Theta\backslash A} l^*(\theta|\mathbf{x})d\theta + \int_A u^*(\theta|\mathbf{x})d\theta} \tag{16.16}$$

$$= \frac{l_A^* u_A^* + 2 l_A^* l_{\Theta\backslash A}^* + l_{\Theta\backslash A}^* u_{\Theta\backslash A}^*}{l_A^* u_A^* + l_A^* l_{\Theta\backslash A}^* + l_{\Theta\backslash A}^* u_{\Theta\backslash A}^* + u_A^* u_{\Theta\backslash A}^*} \tag{16.17}$$

$$= \frac{k + l_A^* l_{\Theta\backslash A}^*}{k + u_A^* u_{\Theta\backslash A}^*} \tag{16.18}$$

donde k *es constante, por lo que:*

$$\underline{P}(A|\mathbf{x}) + \underline{P}((\Theta\backslash A)|\mathbf{x}) < 1 \tag{16.19}$$

siendo igual a 1*, sólo si* $l^* = u^*$*; sucediendo algo parecido para* $\overline{P}$*:*

$$\overline{P}(A|\mathbf{x}) + \overline{P}((\Theta\backslash A)|\mathbf{x}) = \frac{\int_A u^*(\theta|\mathbf{x})d\theta}{\int_A u^*(\theta|\mathbf{x})d\theta + \int_{\Theta\backslash A} l^*(\theta|\mathbf{x})d\theta} + \frac{\int_{\Theta\backslash A} u^*(\theta|\mathbf{x})d\theta}{\int_{\Theta\backslash A} u^*(\theta|\mathbf{x})d\theta + \int_A l^*(\theta|\mathbf{x})d\theta} \tag{16.20}$$

$$= \frac{l_A^* u_A^* + 2 u_A^* u_{\Theta\backslash A}^* + l_{\Theta\backslash A}^* u_{\Theta\backslash A}^*}{l_A^* u_A^* + l_A^* l_{\Theta\backslash A}^* + l_{\Theta\backslash A}^* u_{\Theta\backslash A}^* + u_A^* u_{\Theta\backslash A}^*} \tag{16.21}$$

$$= \frac{k' + u_A^* u_{\Theta\backslash A}^*}{k' + l_A^* l_{\Theta\backslash A}^*} \tag{16.22}$$

donde k' *es constante, por lo que:*

$$\overline{P}(A|\mathbf{x}) + \overline{P}((\Theta\backslash A)|\mathbf{x}) > 1 \tag{16.23}$$

siendo igual a 1*, sólo si* $l^* = u^*$*.*

Observación 287 *Pero esto no debe preocuparnos, porque precisamente estamos inmersos en un entorno de imprecisión. En realidad desconocemos la probabilidad verdadera a posteriori, mejor dicho, no sólo la desconocemos, sino que apostamos por su no existencia, y sólo sabemos que para cada subconjunto* A *la probabilidad está acotada:*

$$\underline{P}(A|\mathbf{x}) \le P(A|\mathbf{x}) \le \overline{P}(A|\mathbf{x}) \tag{16.24}$$

No obstante, el reparto de masas es consistente, pues ***las «probabilidades» a posteriori inferior y posterior****,* $\underline{P}$ *y* $\overline{P}$*, aunque no repartan una masa de* 1 *cada una,* ***reparten una masa total de probabilidad de 2, entre cualquier conjunto A y su complementario*** $\Theta\backslash\mathbf{A}$ *—basta sumar las Ecs. (16.17) y (16.21):*

$$\underline{P}(A|\mathbf{x}) + \underline{P}((\Theta\backslash A)|\mathbf{x}) + \overline{P}(A|\mathbf{x}) + \overline{P}((\Theta\backslash A)|\mathbf{x}) = 2 \tag{16.25}$$

16.5 Funciones de inclusión para las a posteriori inferior y superior

«Ningún animal había más calamitoso que el hombre, por la sencilla razón de que todos se conforman con los límites de su naturaleza, mientras que sólo el hombre se afana por sobrepasar los límites de la suya.»
—Erasmo de ROTTERDAM <Elogio de la locura>

Sea $_\square e_L$ una función de inclusión para e_L. Entonces, la extensión natural de la función de verosimilitud (o sea, una función de inclusión para ella) para un valor numérico de la evidencia —*cfr.* Ec. 15.16— al caso de que esta última se valore con intervalos, es:

$$\begin{aligned} {}_\square L(H_j|\,[e]) &\propto \sum_{e_L \in \mathcal{L}(E)} {}_\square e_L([e]) p(e_L|H_j) \\ &\rightleftharpoons \left[({}_\square L(H_j|\,[e]))_0\,, ({}_\square L(H_j|\,[e]))_1\right] \end{aligned} \tag{16.26}$$

La información a priori (la que representa la opinión del experto) forma parte de la función de densidad de probabilidad (fdp) a posteriori $p(H_j|e)$ por medio de la fdp a priori $p(H_j)$. Al mismo tiempo, se incorpora la información de la muestra (datos que se conocen o han sido recogidos) por medio de la función de verosimilitud $L(H_j|e)$. De este modo, obtenemos la fdp a posteriori no normalizada:

$$p(H_j|e) \propto p(H_j) L(H_j|e) \tag{16.27}$$

Las verosimilitudes inferior y superior proporcionan una clase (de tipo inferior-superior) de funciones de inclusión para las a posteriori no normalizadas:

$$\Im^* = \{{}_\square p^* : \forall H_j, {}_\square l^*\,(H_j|\,[e]) \leq {}_\square p^*\,(H_j|\,[e]) \leq {}_\square u^*\,(H_j|\,[e])\} \tag{16.28}$$

donde:

$$ {}_\square l^*\,(H_j|\,[e]) \propto ({}_\square L(H_j|\,[e]))_0\, p(H_j) \tag{16.29}$$

$$ {}_\square u^*\,(H_j|\,[e]) \propto ({}_\square L(H_j|\,[e]))_1\, p(H_j) \tag{16.30}$$

Sea $\Im$ la clase de funciones de inclusión normalizadas $_\square p(H_j|\,[e])$ para las a posteriori. Si lo que queremos es una expresión del tipo inferior-superior para la clase $\Im$, debemos minimizar y maximizar $_\square p(H_j|\,[e])$ sobre $\Im^*$. Para minimizarla, tomamos:

$$ {}_\square p^*(H|\,[e]) = \begin{cases} {}_\square l^*(H|\,[e]) & \text{if } H = H_j \\ {}_\square u^*(H|\,[e]) & \text{if } H \neq H_j \end{cases} \tag{16.31}$$

de manera que asignemos la mínima masa posible a H_j y la máxima masa a toda $H \neq H_j$. Para maximizar $_\square p(H_j|\,[e])$ simplemente hay que intercambiar $_\square l^*(H|\,[e])$ y $_\square u^*(H|\,[e])$.

De este modo, obtenemos las *a posteriori inferior y superior normalizadas:*

$$ {}_\square l\,(H_j|\,[e]) = \frac{{}_\square l^*(H_j|\,[e])}{{}_\square l^*(H_j|\,[e]) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^m {}_\square u^*(H_k|\,[e])} \tag{16.32}$$

$$ {}_\square u\,(H_j|\,[e]) = \frac{{}_\square u^*(H_j|\,[e])}{{}_\square u^*(H_j|\,[e]) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^m {}_\square l^*(H_k|\,[e])} \tag{16.33}$$

16.6 Apunte: La EMV como MAP

«Cuando se ama la vida, se ama el pasado, porque es el presente tal como ha sobrevivido en la memoria humana.»
—Marguerite YOURCENAR <Los ojos abiertos>

Esta sección es elemental, pero esencial. Mirando a través del prisma del teorema de BAYES:

$$p(H|e) = \frac{p(e|H)p(H)}{p(e)} \tag{16.34}$$

la estimación de máxima verosimilitud supone escoger una distribución uniforme como a priori, o sea, que si $\Theta = \{H_1, \dots, H_m\}$, entonces, $\forall j \in \mathbb{N}_m^+$:

$$p(H = H_j) = \frac{1}{m} \tag{16.35}$$

de donde:

$$p(H|e) \propto \frac{p(e|H)}{p(e)} \tag{16.36}$$

Por otro lado, $p(e)$ no depende de H, por lo que:

$$p(H|e) \propto p(e|H) \tag{16.37}$$

de modo que: el estimador de máxima verosimilitud de H es el valor $\widehat{H}^{\mathrm{EMV}} \in \Theta$ que hace más probable la evidencia observada.

Ejemplo 288 *Algunos dicen que un decisor siempre debe tener una moneda a mano para resolver situaciones de indiferencia. ¿Cuál es la estimación de máxima verosimilitud de la probabilidad de salir cara? Sabemos que de m veces que hemos lanzado esa moneda ha salido cara n veces. Sea $C = p(cara)$. El estimador de máxima verosimilitud es el valor de $\alpha \in [0,1]$ que hace máxima $p(C = \alpha|e)$. Sabemos que:*

$$p(C = \alpha|e) \propto p(e|C = \alpha) \tag{16.38}$$

Como el lanzamiento obedece a una binomial:

$$p(e|C = \alpha) = \alpha^n \, (1-\alpha)^{m-n} \tag{16.39}$$

basta hallar el máximo de la función de una variable:

$$\Phi(\alpha) = \alpha^n \, (1-\alpha)^{m-n} \tag{16.40}$$

Obtenemos que $p(C = \alpha|e)$ es máxima para $\alpha = n/m$.

16.7 Berkeley y Bayes

«Cuando Berkeley le dice a Bayes: "¿de dónde ha salido esa a priori?", Bayes puede responder: "¿de dónde ha salido ese espacio muestral?"»
—Dennis V. Lindley [562] (p. 20).

Pero, ¿y si con la moneda que portamos no para de salir cara?

En este caso, obtenemos que $p(C = \alpha|e)$ es máxima para $\alpha = 1$. Lo cual es lógico, desde el principio de máxima verosimilitud.

Ante una moneda «con tanta cara», la solución consiste en suponer la no uniformidad de nuestra creencia a priori sobre las monedas: hay monedas sesgadas, pero si la moneda no tiene dos caras, es posible y puede que también probable, que alguna vez salga cruz[2].

El punto de vista frecuentista y el bayesiano difieren en su manera de incorporar esta suposición a sus formalizaciones respectivas. En la comunidad estadística, parece eterno el enfrentamiento entre bayesianos

[2] L. J. Savage muestra la importancia del contexto descrito en términos de la probabilidad a priori con el siguiente ejemplo, de tintes similares —que nos proporciona Francisco Javier Girón [168]:

1. Una dama inglesa, que añade leche a su té, afirma que es capaz de distinguir si la leche se añadió antes o después del té. Se realizan diez pruebas y en las diez acierta correctamente lo que se añadió primero.

2. Un experto en música afirma que es capaz de distinguir una página de una partitura de Franz Joseph Haydn de una de Wolfgang Amadeus Mozart. En cada una de las diez pruebas que se le proponen reconoce al compositor.

3. Un amigo nuestro, que ese día está bebido, afirma que es capaz de adivinar el resultado del lanzamiento de una moneda de curso legal. Se lanza la moneda diez veces y en las diez ocasiones predice correctamente el resultado.

El modelo probabilístico es una binomial de parámetros 10 y θ, donde el parámetro representa la probabilidad de acertar. En los tres casos, el estimador de máxima verosimilitud de θ es 1. Sin embargo, a poco que meditemos, nos damos cuenta de lo temerario de esta estimación en el tercer supuesto. Más bien, nuestro lógico pensar nos lleva a que lo que ha ocurrido en este último caso es una racha de suerte, suponiendo eso sí, que es cierto, como nos dicen, que la moneda es de curso legal, o sea, que no está «cargada».

(estrictos o no) y no-bayesianos (estrictos o no). La dificultad en la obtención de una distribución a priori, es comparada, por ejemplo, por LINDLEY [562], con la dificultad en la especificación de un espacio muestral —*cfr. v. gr. item* LEHMANN [1362]; BAYARRI, DEGROOT y KADANE [563]—. Es la dificultad de medir la incertidumbre, sea del tipo que sea (si es cierto que hay diferentes tipos). Por ejemplo, en §4.10, mencionábamos procedimientos para elegir una función de pertenencia.

Para entender la dificultad intrínseca en la definición del espacio muestral, quizás baste la definición que nos recuerda Sir Harold JEFFREYS (defensor de la probabilidad lógica[3]): es «*la clase de observaciones que deberían haber sido obtenidas pero que no lo fueron*».

Para descubrir un valor EMV $\alpha \neq 1$, hemos de ampliar el espacio muestral, y asegurar que hay lanzamientos en los que haya salido cruz. Esto puede hacerse revisando el «historial» de lanzamientos de esa moneda, o bien, lanzándola sistemáticamente hasta que podamos asegurar lo mismo. El problema es, pues, de ampliación del espacio muestral, y por tanto, inherentemente, de magnitud: ¿cuánto ha de ampliarse el espacio muestral? Esta es la postura frecuentista, y esto proporciona, recursivamente, la razón a JEFFREYS.

El punto de vista bayesiano supone usar una a priori no uniforme. Por ejemplo, podríamos suponer que:

$$p(C = \alpha) = \left(1 - (1 - 2\alpha)^2\right)/4 \tag{16.41}$$

El MAP es el valor de $\alpha \in [0, 1]$ que hace máxima $p(C = \alpha|e)$. Sabemos que:

$$p(C = \alpha|e) \propto p(e|C = \alpha)p(C = \alpha) \tag{16.42}$$

Como el lanzamiento obedece a una binomial:

$$p(e|C = \alpha) = \alpha^n (1 - \alpha)^{m-n}$$

el estimador MAP de α es:

$$\widehat{\alpha}^{\text{EMV}} = \arg \max_{\alpha \in [0,1]} \frac{\alpha^n (1 - \alpha)^{m-n} \left(1 - (1 - 2\alpha)^2\right)}{4} \tag{16.43}$$

por lo que $p(C = \alpha|e)$ es máxima para:

$$\widehat{\alpha}^{\text{EMV}} = \frac{n + 1}{m + 2} \tag{16.44}$$

Esta a priori asegura que $\frac{m+1}{m+2}$ es el valor de α que hace más probable la evidencia observada de cara en todos los lanzamientos. Como bien puede apreciar el lector, a medida que m se hace mayor (esto es, a medida que se amplia el espacio muestral), si los lanzamientos siguen resultando ser cara (o sea, $n = m$), el valor de α se aproxima a uno:

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{m + 1}{m + 2} = 1 \tag{16.45}$$

Es decir, lo propugnado por el EMV correspondería a un espacio muestral infinito, visto desde la perspectiva bayesiana.

La pregunta que ha de surgir en el lector es la siguiente: los puntos de vista frecuentista y bayesiano, ¿tienen la misma «potencia» de resolución de problemas? ¿Son o no son «equivalentes»? En el ejemplo de la moneda, y a pesar[4] de las Ecs. 16.44 y 16.45, ¿podemos asegurar la existencia de un espacio muestral y una distribución a priori de forma que los caminos frecuentista y bayesiano proporcionen las mismas respuestas, sea cual sea la moneda?

Si nos conformamos, lo vemos: lo objetivo, como límite de lo subjetivo. Lo objetivo como limitador de «la arbitrariedad atributiva nacida de la subjetividad no controlada» —*cfr.* SANTOS GUERRA [1363] (p. 89).

16.8 Ejemplo ilustrativo: Grado de destreza en el desempeño de una tarea (*bis*)

> «*Todos pueden gobernar [una nave] cuando la mar está en calma.*»
> —PUBLIO SIRIO (h. 85-43) <Sentencias>

[3] *Cfr.* Cap. 18.
[4] Insistimos, la percepción del límite (16.45) no es frecuentista, sino bayesiana.

En esta sección continuamos el estudio comenzado en §15.3, en relación a lo expuesto en este capítulo. Remitimos al lector a dicha sección por si desea recordar las nociones fundamentales.

El problema es: dado un trabajador, al que se le ha asignado (p. ej., en media, por una comisión evaluadora de expertos) una puntuación nítida, en forma de intervalos, en referencia a la evaluación del desempeño de una tarea (por una prueba o test rápido de desempeño), entonces, decidir cuál es el grado de destreza del trabajador en el desempeño de la tarea en cuestión (durante una actividad normal y no en una prueba o test rápido), es decir, clasificar la tarea, con respecto a dicho trabajador, en una de las cinco clases mencionadas anteriormente, según la tarea sea desempeñada por dicho trabajador, torpemente, atolondradamente, con soltura, con pericia, o con habilidad sorprendente.

Para poder hallar funciones de inclusión para las a posteriori inferior y superior —*cfr.* §16.5—, debemos comenzar por hallar funciones de inclusión $_\square e_L$ para los términos e_L que expresan la evidencia borrosa. Como comentábamos, dada la facilidad de su tratamiento computacional, lo usual es suponer que se trate de números borrosos triangulares o trapezoidales. Así, por ejemplo, dado el número borroso triangular:

$$T(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right) \tag{16.46}$$

observemos que una función de inclusión para él, es:

$$\begin{aligned} {}_\square T([x]\,; a, b, c) = {} & [T(x_0; a, b, c), T(x_1; a, b, c)]\,\chi_{x_1 \leq b} \\ & + [T(x_1; a, b, c), T(x_0; a, b, c)]\,\chi_{b \leq x_0} \\ & + [\min\{T(x_0; a, b, c), T(x_1; a, b, c)\}, 1]\chi_{x_0 < b < x_1} \end{aligned} \tag{16.47}$$

donde χ_P denota la función característica del predicado P:

$$\chi_P = \begin{cases} 1 & \text{si } P \text{ es cierto} \\ 0 & \text{si } P \text{ es falso} \end{cases}$$

16.8.1 Estimación de máxima verosimilitud

Datos precisos

En (16.1), supongamos que $n = 1$ y $\widetilde{\chi}_1 = e = 6.5 \in \mathbb{R}$, o que $e = 6.5$ es un valor numérico medio, agregado a partir de las puntuaciones asignadas por varios expertos (los n datos de la muestra) para el desempeño. De acuerdo con (15.16) y con las definiciones triangulares de los valores borrosos e_L —*cfr.* Tabla 15.1—, las verosimilitudes numéricas de las hipótesis para esta evidencia se muestran en la Tabla 16.2. A partir de estos resultados, obtenidos sólamente con la información muestral, podemos deducir que el MLE —*cfr.* Ec. 16.2— para la destreza del trabajador en el desempeño de la tarea es: $\widehat{H}^{\text{EMV}}$ =con pericia.

	$L(\cdot\|6.5) \propto$
torpemente	0.120
atolondradamente	0.196
con soltura	0.370
con pericia	0.430
con habilidad sorprendente	0.120

Tabla 16.2: *Verosimilitudes numéricas.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

Datos no precisos

Asumamos ahora que los expertos deciden puntuar con intervalos y no con valores numéricos precisos. En la Ec. (16.1), suppongamos que $n = 1$ y $\widetilde{\chi}_1 = [e] = [6, 7] \in \mathbb{IR}$. De acuerdo con (16.26), y con las definiciones triangulares de los valores borrosos e_L —*cfr.* Tabla 15.1—, y con (16.47), las verosimilitudes con valoración en intervalos, de las hipótesis para esta evidencia se muestran en la Tabla 16.3. A partir de estos resultados, obtenidos, de nuevo, sólamente con la información muestral, podemos deducir que el estimador de máxima verosimilitud —*cfr.* Ec. 16.2— para la destreza del trabajador en el desempeño de la tarea es $\widehat{H}^{\text{MLE}}$ =con pericia.

	$L(\cdot\|\,[6,7])\propto$
torpemente	$[.006, .018]$
atolondradamente	$[.108, .284]$
con soltura	$[.202, .538]$
con pericia	$[.282, .578]$
con habilidad sorprendente	$[.008, .016]$

Tabla 16.3: *Verosimilitudes valoradas en intervalos.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

Parece obvio que, al trabajar con intervalos, debemos saber cómo ordenarlos. No obstante, debemos observar que los intervalos $[.202, .538]$ y $[.282, .578]$ coinciden en un 68 por ciento de su unión. Es decir, la afirmación de que $[.282, .578]$ es mayor que $[.202, .538]$ sólo se manifiesta en un 32 por ciento frente a la afirmación de su igualdad que se manifiesta en el 68 por ciento restante.

16.8.2 Estimación MAP bayesiana borrosa

De acuerdo con lo expuesto en §16.5, y en las Tablas 15.2 y 15.3, podemos calcular las probabilidades a posteriori inferior y superior normalizadas. Estas probabilidades se muestran en la Tabla 16.4.

	$[_{\square}l\,(\cdot\|\,[6,7])\propto,_{\square}u\,(\cdot\|\,[6,7])\propto]$
torpemente	$[0.00183, 0.01412]$
atolondradamente	$[0.05745, 0.29422]$
con soltura	$[0.57838, 0.89804]$
con pericia	$[0.03558, 0.16739]$
con habilidad sorprendente	$[0.00049, 0.00253]$

Tabla 16.4: *Probabilidades a posteriori valoradas en intervalos.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

A la luz de estos resultados, podemos decir que cuando estamos ante un trabajador al que se le ha asignado (en media, por una comisión evaluadora de expertos) una puntuación (en forma de intervalos) de $[6, 7]$ en referencia a la evaluación del desempeño de una tarea (por una o varias pruebas o tests rápidos de desempeño), entonces, esperamos que este trabajador desempeñe con soltura la tarea (durante una actividad normal y no en una prueba o test rápido).

16.9 Resumen

«Cuando decimos que una cosa es infinita, solamente queremos decir que no somos capaces de concebir sus límites y sus términos: no es de esa cosa de la que tenemos una concepción, sino de nuestra incapacidad.»
—Thomas Hobbes <Leviatán>

Toda distribución de probabilidad asigna un **valor preciso de probabilidad** a cada hipótesis, por lo que no asume la existencia de incertidumbre. Pero si la información a priori es escasa, existe incertidumbre. Fundamentalmente, existen dos metodologías para tratar esta incertidumbre: el **análisis de sensibilidad bayesiano**, que asume la existencia de una distribución a priori ideal que modela, en teoría, la incertidumbre a priori, una vez asumido un error debido a ciertas limitaciones, por ejemplo en la asignación de las probabilidades, y la teoría de las **probabilidades imprecisas**, según la cual, una distribución de probabilidad precisa, por ella sóla, no puede considerarse como un modelo razonable para la incertidumbre a priori, proponiendo que, en vez de una única distribución, usemos una clase $\mathcal{M}$ de distribuciones a priori, de tal manera que cada a priori de $\mathcal{M}$ se actualiza mediante la regla de Bayes, generando una clase de distribuciones a posteriori.

En nuestro caso, representamos estas clases de distribuciones por intervalos de medidas. En §16.4, adoptamos la propuesta de Walley, Gurrin y Burton para calcular las probabilidades a posteriori inferior y superior, si bien demostramos que no son verdaderas probabilidades pues la inferior es superaditiva y la superior, subaditiva, aunque el reparto de masas total que efectuan ambas «probabilidades» conjuntamente, es consistente.

En §16.5 definimos las **extensiones naturales a intervalos de las probabilidades inferior y superior**, a partir de la extensión natural de la función de verosimilitud para un valor numérico de la evidencia, al caso de que ésta se valore con intervalos. En §16.8 continuamos el estudio comenzado en §15.3, con respecto al grado de destreza en el desempeño de una tarea, en relación a lo expuesto en este capítulo. El problema es: dado un trabajador, al que se le ha asignado (p. ej., en media, por una comisión evaluadora de expertos) una puntuación nítida, en forma de intervalos, en referencia a la evaluación del desempeño de una tarea (por una prueba o test rápido de desempeño), entonces, decidir cuál es el grado de destreza del trabajador en el desempeño de la tarea en cuestión (durante una actividad normal y no en una prueba o test rápido), es decir, clasificar la tarea, con respecto a dicho trabajador, en una de las cinco clases mencionadas anteriormente, según la tarea sea desempeñada por dicho trabajador, torpemente, atolondradamente, con soltura, con pericia, o con habilidad sorprendente.

Para poder hallar funciones de inclusión para las a posteriori inferior y superior, debemos comenzar por hallar funciones de inclusión ${}_{\square}e_L$ para los términos e_L que expresan la evidencia borrosa. Como comentábamos, dada la facilidad de su tratamiento computacional, lo usual es suponer que se trate de **números borrosos triangulares** o trapezoidales.

Una vez aplicado el método podemos presentar conclusiones como la siguiente: «A la luz de estos resultados, podemos decir que cuando estamos ante un trabajador al que se le ha asignado (en media, por una comisión evaluadora de expertos) una puntuación (en forma de intervalos) de $[6, 7]$ en referencia a la evaluación del desempeño de una tarea (por una o varias pruebas o tests rápidos de desempeño), entonces, esperamos que este trabajador desempeñe con soltura la tarea (durante una actividad normal y no en una prueba o test rápido).»

17

Un minero de datos ataviado con indumentaria tornasolada (borrosa y bayesiana) (*ter*)

«Hemos de aceptar el hecho de que la exactitud respecto al comportamiento humano parece ser imposible.»
—Charles A. DAILEY y Frederick C. DYER [138] (p. 78)

Como decíamos en el capítulo anterior, ha sido muy habitual el representar las probabilidades por números reales del intervalo $[0, 1]$*. Sin embargo, esta es sólo una posibilidad, y quizás no sea la más frecuente. Allí tratamos el caso de que las probabilidades se representasen por intervalos. Este capítulo lo dedicamos a las palabras. «Gran probabilidad», «mucha probabilidad», «probabilidad baja», etc., son expresiones frecuentes en nuestro lenguaje natural.*
El origen de estas expresiones está en una información insuficiente, en una falta de datos, que nos impide estimar de manera precisa las probabilidades. Las anteriores son ejemplos de «probabilidades» lingüísticas o cualitativas, pero también empleamos intervalos de probabilidades numéricas («la probabilidad está entre $1/5$ *y* $1/4$*»), intervalos de «probabilidades» lingüísticas («con una probabilidad* media-baja*») o probabilidades de segundo orden («la verdad es que hay una probabilidad* bastante alta *de que la probabilidad de que llueva mañana esté entre* 0.2 *y* 0.3*»).*
Tradicionalmente, también se ha exigido la aditividad en los juicios basados en probabilidades o frecuencias (esto es, si la frecuencia asignada a un suceso es igual a la suma de las frecuencias asignadas a un conjunto exhaustivo de componentes suyas, mutuamente excluyentes). Pero, de nuevo, en las relaciones humanas, esta es una mera posibilidad. Es mucha la evidencia, por ejemplo, a favor de la Teoría del Soporte, de Amos TVERSKY *y Derek J.* KOEHLER *[49], según la cual lo más frecuente es la subaditividad.*

17.1 Algunas maneras de expresar lo impreciso

«Nada es indescriptible salvo el vacío. Nada es inmutable, salvo lo que no existe.»
—Gilbert SINOUÉ [152] (p. 409)

Pensemos en **la expresión de una calificación**. Habitualmente, usamos una escala numérica o una escala de palabras, dependiendo fundamentalmente de la medida en que consideremos cuantitativa o cualitativa la propiedad calificada. El uso de estas escalas puede ser simple, usando un número o una palabra, o compuesto, usando un intervalo de números o de palabras. Asimismo, podríamos pensar en utilizar intervalos de tipo n (intervalos cuyos extremos son intervalos de tipo $n-1$, siendo los de tipo 1 los ordinarios). En nuestros actos de comunicación, lo más frecuente es considerar cualquiera de las siguientes cuatro formas para expresar una calificación.

- un **número**: «En la prueba de diseño, SARA ha obtenido, sobre 10, un $7,734$»[1];

[1] *Cfr.* pág. 155, donde criticamos el uso de calificaciones con tantos decimales.

- un **intervalo de números**: «El grado de destreza que Marina ha demostrado en la prueba de composición, está, sobre 10, entre el 6 y el 7»;
- una **palabra**: «Podemos decir que Sara es bastante autónoma»; «En la prueba de diseño, Sara ha obtenido un notable»;
- un **«intervalo» de palabras**: «Podemos decir que el grado de curiosidad de Marina es medio-alto»; «El grado de destreza que Marina ha demostrado en la prueba de composición, está, sobre diez, entre el seis y el siete».

Cuando expresamos una calificación con un número, pecamos de esa exactitud rigurosa, de esa precisión en los datos, que sólo Dios posee —lo mismo sucede con respecto a los intervalos de tipo $n > 2$—. Cualquiera de las otras tres soluciones parece *más* humana. La naturaleza de estos datos es responsable de su imprecisión. Podemos suponer la existencia de un valor numérico exacto *ideal*[2], para ser asignado al valor observado que, debido a ciertas limitaciones, no podemos medir con exactitud[3].

Una forma clásica es usar un procedimiento estadístico utilizando algún modelo estocástico, entendiendo la evidencia numérica como la realización de una variable aleatoria, por lo general asumiendo que se distribuye según una normal, y valorar la incertidumbre como desviación típica —*cfr.* Lindley [44] (cap. 5)—. Pero, ¿por qué asumir esa distribución de probabilidad? Aún más, ¿por qué usar una distribución de probabilidad? Queremos decir, ¿por qué asumimos el azar como la naturaleza de la imprecisión de los datos? ¿Realmente creemos que la esencia de no poder medir con exactitud un valor observado es el azar? ¿Que es una situación equivalente a tirar una moneda, un dado, o a otro modelo estocástico? ¿Por qué no usar alguna aproximación no-estocástica para describir esta clase de conocimiento imperfecto puntual, en un momento dado?

- ¿Es aleatorio que un profesor imparta un día mal sus clases? Desde el punto de vista de la monotonía de la precisión respecto de la información (a priori), sí (y así lo admitimos, y así trabajamos), pero no lo es «a toro pasado». Nada hay aleatorio en no saber clasificar cómo ha impartido una clase un profesor un determinado día, si muy mal, mal, casi normal, algo mejor de lo normal, bien o muy bien. O, ¿tiramos un dado, y dejamos que el azar decida?

  «La probabilidad de que Sara desempeñe con pericia la tarea T es alta.»

- ¿Es aleatorio que un concepto se le «resista» a un alumno? Parece lógico que habrá que considerar perfiles cognitivos anteriores del alumno como información previa para poder inferir la probabilidad de que un alumno tenga o no dificultades en el aprendizaje de un concepto determinado. Pero, la naturaleza de nuestra indecisión para clasificar el grado de conocimiento que el estudiante posee del concepto no es aleatoria. El concepto no está aprendido aún, está casi aprendido, está aprendido, está más que aprendido —queriendo decir esto que el estudiante ha incorporado conocimiento extra—, o está mucho más que aprendido. La culpa de no saber clasificar no es del azar, sino de la no precisión en las fronteras de estos adjetivos, esto es, de la vaguedad del lenguaje.

  «La probabilidad de que Marina haya aprendido el concepto C es media.»

- ¿Es aleatorio que una persona se sienta molesta? Hay que pensar en la causa. Si ésta es conocida y se han producido interacciones previas causa-persona, entonces podrá inferirse la probabilidad de que la causa provoque en la persona un grado de molestia muy bajo, suave, moderado, intenso o severo. De nuevo, la dificultad proviene de la vaguedad inherente al lenguaje natural.

  «La probabilidad de que el ruído R provoque en Montaña un grado de molestia intenso es muy alta.»

Nuestro espíritu es el de Didier Dubois y Henri Prade [165], tender puentes y no barreras, entre lo probable y lo posible, entre la probabilidad y la borrosidad.

Suponemos que los datos (la evidencia nítida) son imprecisos y los representamos, en vez de con números, bien con intervalos, bien con palabras. Ciertamente inspirados por el modelo de probabilidades imprecisas

[2]Este ideal es *kantiano*, no tiene porqué suponer la existencia de un ente que sea consciente de su valor. Se trata de la cuarta posibilidad sobre el origen psicológico de la vaguedad que comentábamos en la Sección §4.2: *la vaguedad es ignorancia —cfr.* Williamson [355]; Bonini, Osherson, Viale y Williamson [360].

[3]Las limitaciones de cualquier ente construido por humanos son **limitaciones humanas**. A fin de cuentas, la interpretación *final* de los resultados es humana. Cuando ésto deje de ser así, nosotros seremos el mecanismo bajo su mando. Ese punto *hiper-descartiano*[(*)], sin retorno, ese triunfo de la automática, de suceder pronto, será el final del progreso y la postrimería de la humanidad.

[(*)] En filosofía, se conoce como *automatismo* a la hipótesis de Descartes según la cual la materia viva carece de diferencia específica con respecto a la materia inerte.

—*cfr.* §16.3 de la presente Tesis—, la idea subyacente de nuestra aproximación, para los tres ejemplos que proponemos, es la suposición de que *ningún valor numérico preciso puede considerarse como una puntuación razonable para asignarla*:

- *a un trabajador en relación al grado de destreza en el desempeño de una tarea*;
- *a un estudiante en relación al grado de comprensión, aprendizaje o conocimiento de un concepto*;
- *a un valor observado de nivel sonoro.*

De aquí que el proceso de inferencia bayesiana borrosa hace que las conclusiones estadísticas se expresen en términos de **probabilidades inferiores y superiores**, en el caso de intervalos, y de **cuasi-probabilidades** o **probabilidades lingüísticas**, en el segundo (aunque como decíamos también permitimos intervalos de probabilidad lingüística).

«La probabilidad de que SARA desempeñe con pericia la tarea T está entre el 80 y el 90 por ciento.»

«La probabilidad de que el ruido R provoque en MONTAÑA un grado de molestia intenso está entre alta y muy alta.»

17.2 Cuasi-probabilidad lingüística

«Lo "nuevo" place, pero no en los primeros días.»
—Benito Jerónimo FEIJOO <Teatro crítico> *(1726-1740)*
(las comillas son nuestras)

Pasamos a definir lo que nosotros entendemos y, por tanto, proponemos, como cuasi-probabilidad lingüística. Para ello, entenderemos por cero y uno, dos términos lingüísticos, siempre disponibles, que se caracterizan por ser conjuntos borrosos abiertos, por la izquierda y por la derecha, respectivamente —*cfr.* Def. 9—, esto es, tal que $\lim_{u\downarrow 0} \mathsf{cero}(u) = 1$, $\lim_{u\uparrow 1} \mathsf{cero}(u) = 0$, $\lim_{u\downarrow 0} \mathsf{uno}(u) = 0$ y $\lim_{u\uparrow 1} \mathsf{uno}(u) = 1$.

Definición 289 *Sea $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso y $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{L}([0,1])$ un conjunto de términos lingüísticos. Llamamos* ***asignación lingüística de medida de conjuntos*** *a cualquier función $\mu : \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \to \mathcal{L}([0,1])$ que satisfaga:*

$$\begin{array}{rl} i) & \mu(\varnothing) = \mathsf{cero} \\ ii) & (\forall A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))\,(B \subseteq A \Longrightarrow \mu(B) \preceq \mu(A)) \\ iii) & \mu(\mathcal{U}) = \mathsf{uno} \end{array}$$

donde $\preceq$ es un orden definido en $\mathcal{L}([0,1])$.

Usualmente, por ejemplo en control borroso, $\mathcal{L}([0,1]) \subseteq \mathfrak{N}([0,1])$, es decir, los términos lingüísticos se representan mediante números borrosos. Si este es el caso, entonces, obsérvese que una asignación lingüística de medida de conjuntos es un caso particular de asignación básica normalizada de medida de conjuntos con valoración borrosa —*cfr.* Def. 209.

Definición 290 *Sea $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso y $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{L}([0,1])$ un conjunto de términos lingüísticos. Denominamos* ***cuasi-probabilidad lingüística*** *a toda asignación lingüística de medida de conjuntos $\mu : \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \to \mathcal{L}([0,1])$ que sea σ-subaditiva (subaditiva si $\mathcal{U}$ es finito):*

$$\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{U}) : \left((\forall i,j \in \mathbb{N})(A_i \cap A_{j(\neq i)} \neq \varnothing) \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \subseteq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \right) \tag{17.1}$$

Definición 291 *De un procedimiento de borrosificado —esto es, de un procedimiento, llamémosle $\mathfrak{b}$, mediante el cual, a cada número $u \in D \subseteq \mathbb{R}$, le sea asignado un conjunto borroso $\mathfrak{b}(u) \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$—, decimos que es un* ***borrosificado monótono creciente*** *—en realidad, un homomorfismo de orden (o isotonía)— si:*

$$(\forall u, v \in D \subseteq \mathbb{R})\,(u \leq v \Longrightarrow \mathfrak{b}\,(u) \preceq \mathfrak{b}\,(v)) \tag{17.2}$$

siendo $\preceq$ un orden entre números borrosos.

Definición 292 *Llamamos* ***borrosificado natural*** *a la función* $\mathfrak{n} : [0,1] \to \mathcal{L}([0,1])$*, definida por:*

$$\mathfrak{n}(u) = \arg\max\{e_L(u) : e_L \in \mathcal{L}([0,1])\} \tag{17.3}$$

Lema 293 *El borrosificado natural* $\mathfrak{n}$ *es un borrosificado monótono creciente respecto al* ***orden natural*** $\preceq$ *entre etiquetas lingüísticas —según su significado en nuestra lengua natural, por ejemplo, si:*

$$\mathcal{L}([0,1]) = \{\textsf{\textit{baja}}, \textsf{\textit{media}}, \textsf{\textit{alta}}\}$$

entonces:

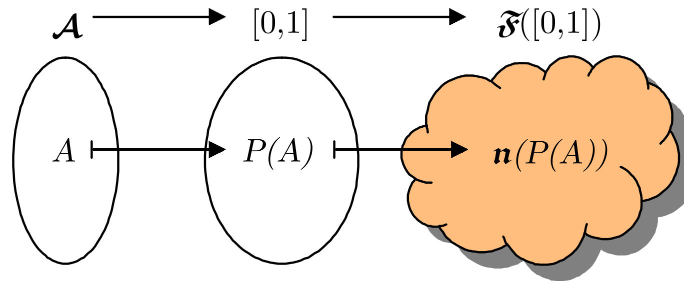
$$\textsf{baja} \preceq \textsf{media} \preceq \textsf{alta}$$

Teorema 294 *Sea* $\mathcal{U}$ *un universo no vacío de discurso y* $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ *una* σ*-álgebra en* $\mathcal{U}$*. Sea* $P : \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \to [0,1]$ *una probabilidad sobre* $(\mathcal{U}, \mathfrak{M}(\mathcal{U}))$*. La función* $\widetilde{P} : \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \to \mathcal{L}([0,1])$*, definida como:*

$$\widetilde{P}(A) = \mathfrak{n}(P(A)) \tag{17.4}$$

donde $\mathfrak{n}$ *es el borrosificado natural, es una cuasi-probabilidad lingüística.*

Demostración. En efecto. Veamos primero que $\widetilde{P}$ es una asignación lingüística de medida de conjuntos. La Fig. **??** muestra el supuesto de este teorema.



Por definición: $\text{Ran}\,\mu \subseteq \mathcal{L}([0,1])$. Además, por ser P una probabilidad:

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(\varnothing) &= \mathfrak{n}(P(\varnothing)) \\ &= \mathfrak{n}(0) \end{aligned}$$

y:

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(\mathcal{U}) &= \mathfrak{n}(P(\mathcal{U})) \\ &= \mathfrak{n}(1) \end{aligned}$$

o sea, un 0 y un 1 borrosos, resultados de la acción del borrosificado natural $\mathfrak{n}$ sobre 0 y 1, nítidos, respectivamente. Al ser P una probabilidad, también se satisface:

$$(\forall A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U}))\,(B \subseteq A \Longrightarrow P(B) \le P(A))$$

y por ser $\mathfrak{n}$ un borrosificado monótono creciente, si $P(B) \le P(A)$, entonces $\mathfrak{n}(P(B)) \preceq \mathfrak{n}(P(A))$. Por tanto, $\forall A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{U})$, si $B \subseteq A$:

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(B) &= \mathfrak{n}(P(B)) \\ &\preceq \mathfrak{n}(P(A)) \\ &= \widetilde{P}(A) \end{aligned}$$

Veamos ahora que a $\widetilde{P}$ es σ-subaditiva. En efecto, por ser $\widetilde{P}$ una cuasi-probabilidad lingüística, proviene de una probabilidad P sobre $(\mathcal{U}, \mathfrak{M}(\mathcal{U}))$, que por definición es σ-aditiva, es decir:

$$\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{U}) : \left((\forall i, j \in \mathbb{N})(A_i \cap A_{j(\neq i)} \neq \varnothing) \Longrightarrow P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) \right)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\widetilde{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mathfrak{n}\left(P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right)\\ &= \mathfrak{n}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)\right)\\ &\subseteq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{n}(P(A_n))\\ &= \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{P}(A_n)\end{aligned}$$

■

Esta subaditividad de las cuasi-probabilidades lingüísticas no debe extrañarnos[4]. Por un lado, tal como está definida la suma de intervalos, la anchura del intervalo suma es la suma de las anchuras, lo cual se refleja en la suma de números borrosos, pues esta se realiza recorriendo los α-cortes —*cfr.* 4.31 (pág. 65) y Fig. 4.40 (pág. 65)—. De este modo, si x e y son números nítidos, entonces:

$$\widetilde{x+y} \subseteq \widetilde{x} + \widetilde{y} \tag{17.6}$$

Por otro, al menos desde la perspectiva lingüística. Los modelos normativos de juicios probabilistas suponen invarianza con respecto a la descripción, esto es, la probabilidad de un suceso no depende de la descripción del mismo. Pero esto no es cierto. Por ejemplo, las personas asignan una probabilidad menor a la hipótesis «empaquetada»: «Muerte por homicidio, más que muerte accidental» que a la hipótesis coextensiva «desempaquetada»: «Muerte por homicidio, por un conocido o por un extraño, más que muerte accidental» —*cfr.* ROTTENSTREICH y TVERSKY [1365].

Amos TVERSKY y Derek J. KOEHLER, con su teoría del soporte [49],

Tradicionalmente, se ha exigido normativamente la aditividad en los juicios basados en probabilidades o frecuencias (esto es, si la frecuencia asignada a un suceso es igual a la suma de las frecuencias asignadas a un conjunto exhaustivo de componentes suyas, mutuamente excluyentes). Pero, de nuevo, en las relaciones humanas, esta es una mera posibilidad. Es mucha la evidencia, por ejemplo, a favor de la teoría del soporte de Amos TVERSKY y Derek J. KOEHLER [49], quienes sugieren que las probabilidades subjetivas no se asignan a sucesos sino a descripciones de sucesos o hipótesis, y de la cual se deriva que lo más frecuente es la subaditividad.

Una de los supuestos básicos de la Teoría del soporte es que la disociación de una hipótesis H en un conjunto de sub-hipótesis exhaustivas y mutuamente excluyentes, siempre tiene un sentido positivo, al verse incrementado el soporte de H:

$$s(H) \leq s(H_1 \vee H_2 \vee \ldots \vee H_2) \tag{17.7}$$

Es decir, subaditividad, la cual ha sido confirmada en diversas experiencias —*cfr. v. gr.* ROTTENSTREICH y TVERSKY [1365]; BEARDEN y WALLSTEN [1366].

No obstante, otros autores argumentan aunque puede tener un efecto negativo (decremento del soporte o la evidencia), de modo que nuestro juicio de probabilidades es superaditivo —*cfr.* SHAFER [1265]—. De todos modos, esto ocurre para instancias poco representativas —*cfr.* MACCHI, OSHERSON y KRANTZ [1367]; HADJICHRISTIDIS, SLOMAN y WISNIEWSKI [1368].

17.3 Probabilidad lingüística

«Nada debería recibir un nombre, por miedo a que ese mismo nombre lo transforme.»
—Virginia WOLF, *<Las olas> (1931)*

[4] Marcilia Andrade CAMPOS, en su tesis doctoral [1364], construye una probabilidad intervalar, basada en sustituir un número por el intervalo formado por las aproximaciones racionales inferior $\bigtriangledown x$ y superior $\bigtriangleup x$, respectivamente, del número real:

$$x \rightsquigarrow [\bigtriangledown x, \bigtriangleup x] \tag{17.5}$$

extendidas a la mayor precisión posible que permita la aritmética de coma flotante con la que se trabaje. Este intervalo es único. Marcilia lo denomina **intervalo de exactitud máxima**. Al trabajar con ellos, Marcilia consigue que su probabilidad intervalar sea σ-aditiva.

Supongamos, como acontece en control borroso, que $\mathcal{L}([0,1]) \subseteq \mathfrak{N}([0,1])$, es decir, que los términos lingüísticos se representan mediante números borrosos.

Definición 295 *De un procedimiento de borrosificado —esto es, de un procedimiento, llamémosle $\mathfrak{b}$, mediante el cual, a cada número $u \in D \subseteq \mathbb{R}$, le sea asignado un conjunto borroso $\mathfrak{b}(u) \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$—, decimos que es un* ***borrosificado numérico****, precisamente si:*

$$\mathfrak{b}(u) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}) \wedge (\forall u \in D \subseteq \mathbb{R})\,(u \in \operatorname{core} \mathfrak{b}(u)) \tag{17.8}$$

y que es un ***borrosificado cuasi-numérico****, precisamente si:*

$$\mathfrak{b}(u) \in \mathfrak{CN}(\mathbb{R}) \wedge (\forall u \in D \subseteq \mathbb{R})\,(u \in \operatorname{cima} \mathfrak{b}(u)) \tag{17.9}$$

siendo:

$$\operatorname{cima}(A) = \{y \in \mathcal{U} : y = \arg\max_{u \in \mathcal{U}} \{A(u)\}\} \tag{17.10}$$

Pues bien, en el caso de ser $\mathcal{L}([0,1]) \subseteq \mathfrak{N}([0,1])$, exigiremos que el borrosificado natural $\mathfrak{n}$, sea numérico; hablaremos del **borrosificado numérico natural** (que además es monótono creciente respecto al **orden natural** $\preceq$ entre etiquetas lingüísticas).

Definición 296 *Sean $\mathcal{U}$ un universo de discurso no vacío y finito y $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$. Consideremos $\mathcal{U}$ como un sistema completo de sucesos. Decimos que una asignación lingüística de medida de conjuntos $\mu : \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \to \mathcal{L}([0,1])$ es una* ***probabilidad lingüística****, precisamente si:*

$$\mathcal{L}([0,1]) \subseteq \mathfrak{N}([0,1]) \tag{17.11}$$

y si es lingüísticamente aditiva:

$$\bigoplus_{A \in \mathcal{U}} \mu(A) = \mathsf{uno} \tag{17.12}$$

Teorema 297 *Sea $\mathcal{U}$ un universo no vacío de discurso, finito, y $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ una σ-álgebra en $\mathcal{U}$. Sea $P : \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \to [0,1]$ una probabilidad sobre $(\mathcal{U}, \mathfrak{M}(\mathcal{U}))$. Toda cuasi-probabilidad lingüística $\widetilde{P} : \mathfrak{M}(\mathcal{U}) \to \mathcal{L}([0,1])$, definida como:*

$$\widetilde{P}(A) = \mathfrak{n}(P(A))$$

cuyo borrosificado $\mathfrak{n}$ sea el borrosificado numérico natural, es una probabilidad lingüística.

Demostración. En efecto. Veamos que $\widetilde{P}$ es lingüísticamente aditiva (es decir, es una distribución de probabilidad sobre el sistema completo de sucesos en que consiste el universo de discurso). Por ser $\mathfrak{n}$ el borrosificado numérico natural:

$$\mathcal{L}([0,1]) \subseteq \mathfrak{N}([0,1])$$

Además, por ser $\mathfrak{n}$ un borrosificado numérico y:

$$\mathfrak{n}\left(\sum_{A \in \mathcal{U}} P(A)\right) \subseteq \bigoplus_{A \in \mathcal{U}} \mathfrak{n}(P(A))$$

entonces:

$$\begin{aligned} 1 \in \operatorname{core} \mathfrak{n}(1) \quad &\Leftrightarrow 1 \in \operatorname{core} \mathfrak{n}\left(\textstyle\sum_{A \in \mathcal{U}} P(A)\right) \\ &\Rightarrow 1 \in \operatorname{core} \textstyle\bigoplus_{A \in \mathcal{U}} \mathfrak{n}(P(A)) \\ &\Leftrightarrow 1 \in \operatorname{core} \textstyle\bigoplus_{A \in \mathcal{U}} \widetilde{P}(A) \end{aligned}$$

de donde, por ser la suma de números borrosos, un número borroso, tenemos:

$$\bigoplus_{A \in \mathcal{U}} \widetilde{P}(A) = \mathsf{uno}$$

■

Definimos el **suceso complementario** de un suceso A, y lo notamos A^c, como aquél que satisface:

$$\widetilde{P}(A) \oplus \widetilde{P}(A^c) = \mathsf{uno} \tag{17.13}$$

Ejemplo 298 *Por ejemplo, consideremos el conjunto de términos lingüísticos:*

$$\mathcal{L}([0,1]) = \{\textsf{nula, muy baja, baja, media, alta, muy alta, sobresaliente}\}$$

definidos como números borrosos triangulares según la Tabla 17.1.

	a	b	c
nula	$-1/6$	0	$1/6$
muy baja	0	$1/6$	$1/3$
baja	$1/6$	$1/3$	$1/2$
media	$1/3$	$1/2$	$2/3$
alta	$1/2$	$2/3$	$5/6$
muy alta	$2/3$	$5/6$	1
sobresaliente	$5/6$	1	$7/6$

Tabla 17.1: *Parámetros de los valores borrosos triangulares que representan a los términos lingüísticos que se muestran.*

Sea $\mathcal{U} = \{\textsf{cara}, \textsf{cruz}\}$. *Observemos que:*

$$T(0; 0,25; 0,5) \oplus T(0,5; 0,75; 1) = T(0,5; 1; 1,5)$$

es decir:

$$\textsf{baja} \oplus \textsf{alta} = \textsf{uno}$$

por lo que es coherente hablar de cara *y* cruz *como de sucesos complementarios.*

17.4 Particiones de enteros y el número de distribuciones de probabilidad lingüística para n palabras

«Los guías siempre van en línea recta. Sólo se pierden quienes los siguen ciegamente.»
—Vlada BULATOVIC-VIB <Un paso atrás>

Consideremos de nuevo el ejemplo anterior. Observemos la Tabla 17.1. Si los valores de b: $1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6$, los expresamos con denominador común 6: $1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6$, entonces, el problema consiste en enumerar efectivamente todas las particiones no restrictivas de 6, en sumas, con los elementos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Por ejemplo, la Tabla 17.2 muestra las particiones de 6.

Particiones no unitarias de 6 con respecto a $\{1,2,3,4,5\}$			
i)	$1+1+1+1+1+1$	*vi)*	$1+5$
ii)	$1+1+1+1+2$	*vii)*	$1+2+3$
iii)	$1+1+1+3$	*viii)*	$2+2+2$
iv)	$1+1+4$	*ix)*	$2+4$
v)	$1+2+2$	*x)*	$3+3$

Tabla 17.2: *Ejemplo de descomposición de un entero positivo, en este caso del número 6, sin tener en cuenta el orden.*

Si pensamos en las distribuciones de probabilidad posibles, debemos considerar también la partición unitaria:

xi) 6

Además, al considerar el 0, entonces el número de 11 particiones anteriores pasa a ser infinito, al poder sumar cuantos ceros queramos (aunque no podamos), p. ej.:

$$1 + 5 + 0 + \ldots + 0$$

e incluso:

$$1 + 5 + 0 + \ldots$$

que corresponden a la distribución sobre un conjunto de $n + 2$ referentes:

$$\{\textsf{muy baja}, \textsf{muy alta}\} \cup \{\textsf{nula}, \overset{(n)}{\ldots}, \textsf{nula}\}$$

y a:

$$\{\textsf{muy baja}, \textsf{muy alta}\} \cup \{\textsf{nula}, \textsf{nula}, \overset{(\aleph_0)}{\ldots}\}$$

respectivamente.

De este modo, para nuestro ejemplo, las distribuciones de probabilidad posibles son las que muestra la Tabla 17.3.

i)	$\{\textsf{muy baja}, \textsf{muy baja}, \textsf{muy baja}, \textsf{muy baja}, \textsf{muy baja}, \textsf{muy baja}\} \cup \{\textsf{nula}, \textsf{nula}, \overset{(n \vee \aleph_0)}{\ldots}\}$
ii)	$\{\textsf{muy baja},\textsf{muy baja},\textsf{muy baja},\textsf{muy baja},\textsf{baja}\} \cup \{\textsf{nula}, \textsf{nula}, \overset{(n \vee \aleph_0)}{\ldots}\}$
iii)	$\{\textsf{muy baja}, \textsf{muy baja}, \textsf{muy baja}, \textsf{media}\} \cup \{\textsf{nula}, \textsf{nula}, \overset{(n \vee \aleph_0)}{\ldots}\}$
iv)	$\{\textsf{muy baja}, \textsf{muy baja}, \textsf{alta}\} \cup \{\textsf{nula}, \textsf{nula}, \overset{(n \vee \aleph_0)}{\ldots}\}$
v)	$\{\textsf{muy baja}, \textsf{baja}, \textsf{baja}\} \cup \{\textsf{nula}, \textsf{nula}, \overset{(n \vee \aleph_0)}{\ldots}\}$
vi)	$\{\textsf{muy baja}, \textsf{muy alta}\} \cup \{\textsf{nula}, \textsf{nula}, \overset{(n \vee \aleph_0)}{\ldots}\}$
vii)	$\{\textsf{muy baja}, \textsf{baja}, \textsf{media}\} \cup \{\textsf{nula}, \textsf{nula}, \overset{(n \vee \aleph_0)}{\ldots}\}$
viii)	$\{\textsf{baja}, \textsf{baja}, \textsf{baja}\} \cup \{\textsf{nula}, \textsf{nula}, \overset{(n \vee \aleph_0)}{\ldots}\}$
ix)	$\{\textsf{baja}, \textsf{alta}\} \cup \{\textsf{nula}, \textsf{nula}, \overset{(n \vee \aleph_0)}{\ldots}\}$
x)	$\{\textsf{media}, \textsf{media}\} \cup \{\textsf{nula}, \textsf{nula}, \overset{(n \vee \aleph_0)}{\ldots}\}$
xi)	$\{\textsf{sobresaliente}\} \cup \{\textsf{nula}, \textsf{nula}, \overset{(n \vee \aleph_0)}{\ldots}\}$

Tabla 17.3: *Distribuciones de probabilidad posibles, para el ejemplo de partición lingüística dado en la Tabla 17.1.*

Insistimos, querido lector, cada cosa en su sitio. Las probabilidades lingüísticas sirven para comunicarnos los humanos en nuestra lengua natural, y de hecho, coloquialmente, son las que más usamos:

«La probabilidad de que MARINA haya aprendido el concepto C es alta.»

«La probabilidad de que SARA desempeñe con pericia la tarea T es muy alta.»

«La probabilidad de que el ruído R provoque en MONTAÑA un grado de molestia intenso es baja.»

17.5 Propagación bayesiana borrosa de imprecisión borrosa en la evidencia

«Lo visible abre nuestros ojos a lo invisible.»
—ANAXÁGORAS <Fragmentos>

La probabilidad lingüística no extiende el método FBP que hemos propuesto anteriormente. FBP modela la imprecisión de la a posteriori mediante dos distribuciones, una a posteriori inferior y una a posteriori superior. Lo único que suponemos sobre «la» a posteriori es que, precisamente, no podemos decir «la» a posteriori, pues suponemos que la imprecisión en los datos, hace que no podamos admitir una única a posteriori como modelo.

En resumen, FBP no proporciona *una* probabilidad que toma valores en $\mathbb{I}[0, 1]$, sino *dos* probabilidades valoradas numéricamente.

Lo que sí sucede a veces, en el devenir cotidiano, es que nos falta el calificativo adecuado, y lo sustituimos por dos calificativos contiguos —a lo que usualmente uno se refiere como sobreclasificar—. Por ejemplo:

«Podemos afirmar que MARINA
ha aprendido el concepto C
con una probabilidad entre alta y muy alta.»

Proponemos modelar esta situación modificando FBP, de manera que la imprecisión de la a posteriori quede expresada mediante dos distribuciones de probabilidad lingüística, una a posteriori inferior y una a posteriori superior.

Consideremos un perfil descriptor $\{\langle R_i, (E_{i0}, E_{i1})\rangle : i = 1, \ldots, n\}$, donde R_i denota el ítem (tarea, concepto o ruido, en nuestros ejemplos), E_{i0} y E_{i1} son valores borrosos de $[0, 1]$, que acotan borrosamente nuestra incertidumbre acerca de la evidencia referida a R_i.

R$_1$	R$_2$	R$_3$	...	...	R$_n$	
$[E_{10}, E_{11}]$	$[E_{20}, E_{21}]$	$[E_{30}, E_{31}]$	...	...	$[E_{n0}, E_{n1}]$	...

Observe el lector que no hemos insistido sobre que estos conjuntos sean los que deben ser, sino que, sin más, los hemos establecido como ciertos, como seguros, asignándoles probabilidad uno. Ya quisiéramos disponer de escenarios controlables, pero la realidad es bien distinta. Quizás debiésemos partir de un perfil descriptor «híbrido»[5], donde E_{i0} y E_{i1}, en vez de ser cotas seguras, fuesen las cotas *más probables*.

Ejemplo 299 *Por ejemplo, supongamos que R_i representa el concepto «programación orientada a objetos». Supongamos que un determinado alumno o alumna, ha realizado una prueba o examen acerca de este concepto. Consideremos que para calificar la prueba se usa una partición borrosa de $[0, 1]$, compuesta de siete términos lingüísticos: {nula, muy baja, baja, media, alta, muy alta, sobresaliente}, definidos por la Tabla 17.1. Parece lógico pensar que el evaluador puede dudar entre dos de estos términos. Para el intervalo $[E_{i0}, E_{i1}]$, sus extremos E_{i0} y E_{i1}, representan el término menor y el mayor, respectivamente, en el orden natural de la partición —o sea, que si el evaluador duda entre muy alto y sobresaliente, entonces cuenta con la posibilidad de responder [muy alto,sobresaliente], es decir, de responder de una manera natural «entre muy alto y sobresaliente».*

Proponemos extender la función de verosimilitud al caso en que la evidencia es borrosa mediante:

$$\widetilde{L}(H_j|E) \propto \sum_{e_L \in \mathcal{L}(\mathcal{E})} \widetilde{e_L}(E) p(e_L|H_j) \tag{17.14}$$

donde $\widetilde{e_L} : \mathfrak{F}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{F}([0, 1])$ es la extensión de $e_L : \mathcal{E} \to [0, 1]$, por el teorema de extensión de ZADEH —*cfr.* Teorema 300, para el caso de ser e_L un número borroso triangular.

17.5.1 Extensión de un número borroso triangular

En el siguiente teorema, encontramos la expresión definitoria de la extensión $\widetilde{e_L} : \mathfrak{F}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{F}([0, 1])$, de $e_L \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, para el caso en que este último sea un número borroso triangular.

Teorema 300 *Si $e_L \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ es un número borroso triangular de parámetros[6] a, b, c, entonces, su extensión $\widetilde{e_L} : \mathfrak{F}(\mathcal{E}) \to \mathfrak{F}([0, 1])$, está definida, $\forall A \in \mathfrak{F}(\mathcal{E})$, y $\forall y \in [0, 1]$, mediante:*

$$\widetilde{e_L}(A)(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } h_{e_L} < y \\ \max\left\{A\left(a + \frac{b-a}{h_{e_L}} y\right), A\left(c + \frac{b-c}{h_{e_L}} y\right)\right\} & \text{si } y \le h_{e_L} \end{cases} \tag{17.15}$$

Demostración. Si $e_L \in \mathcal{L}(E)$ es un número triangular:

$$\begin{array}{rccl} e_L : & E & \longrightarrow & [0, 1] \\ & x & \longmapsto & e_L(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right) \end{array} \tag{17.16}$$

entonces su extensión —por el teorema de extensión de Zadeh— a $\mathfrak{F}(E)$ es:

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{e_L} : & \mathfrak{F}(E) & \longrightarrow & \mathfrak{F}([0, 1]) \\ & A & \longmapsto & \widetilde{e_L}(A) \end{array} \tag{17.17}$$

donde:

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{e_L}(A) : & [0, 1] & \longrightarrow & [0, 1] \\ & y & \longmapsto & \widetilde{e_L}(A)(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } e_L^{-1}(y) = \varnothing \\ \sup_{x \in e_L^{-1}(y)} A(x) & \text{si } e_L^{-1}(y) \neq \varnothing \end{cases} \end{array} \tag{17.18}$$

[5] Recordemos que estas comillas encuentran su explicación en el Desenlace de nuestra Tesis.
[6] Relajamos la notación de $e_L(x; a, b, c)$ a $e_L(x)$.

Como, $\forall y \in [0,1]$:

$$e_L^{-1}(y) = \{x \in E : e_L(x) = y\} \tag{17.19}$$

$$= \begin{cases} \varnothing & \text{si } h_{e_L} < y \\ \left\{a + \frac{b-a}{h_{e_L}} y, c + \frac{b-c}{h_{e_L}} y\right\} & \text{si } y \leq h_{e_L} \end{cases} \tag{17.20}$$

obtenemos que la imagen de $A \in \mathfrak{F}(E)$ por la extensión $\widetilde{e_L}$, de e_L a $\mathfrak{F}(E)$, es el subconjunto borroso $\widetilde{e_L}(A) \in \mathfrak{F}([0,1])$, definido, $\forall y \in [0,1]$, mediante:

$$\widetilde{e_L}(A)(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } h_{e_L} < y \\ \max\left\{A\left(a + \frac{b-a}{h_{e_L}} y\right), A\left(c + \frac{b-c}{h_{e_L}} y\right)\right\} & \text{si } y \leq h_{e_L} \end{cases} \tag{17.21}$$

■

Proponemos la extensión de la expresión (16.47) al caso de intervalos con extremos borrosos, de manera natural:

$$\begin{aligned} {}_\square\widetilde{T}([E]\,; a,b,c) = & \left[\widetilde{T}(E_0; a,b,c), \widetilde{T}(E_1; a,b,c)\right] \chi_{x_1 \leq b} \\ & + \left[\widetilde{T}(E_1; a,b,c), \widetilde{T}(E_0; a,b,c)\right] \chi_{b \leq x_0} \\ & + [\min\{\widetilde{T}(E_0; a,b,c), \widetilde{T}(E_1; a,b,c)\}, 1] \chi_{x_0 < b < x_1} \end{aligned} \tag{17.22}$$

siendo χ_P la función característica del predicado P:

$$\chi_P = \begin{cases} 1 & \text{si } P \text{ es cierto} \\ 0 & \text{si } P \text{ es falso} \end{cases} \tag{17.23}$$

y si e_L es la triangular $T(x; a,b,c)$, entonces explicitamos $\widetilde{T}(E_i; a,b,c)$ como $\widetilde{e_L}(E_i)$, donde $\widetilde{e_L}$ viene dada por (17.15).

17.5.2 Extensión de FBP

El miembro de la derecha en (17.14) es un número borroso, efectivamente computable, para todo $x \in [0,1]$, asociativa e iterativamente, a partir de la definición de suma de números borrosos, recorriendo $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, pues suponemos, sin lugar a dudas, que $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ es finito.

La suma de números borrosos es un número borroso —*cfr.* Klir y Yuan [46] (Teor. 4.2, pp. 106-109). Por tanto, $\widetilde{L}(H_j|E)$ (Ec. 17.14) es un número borroso.

Proponemos una función de inclusión ${}_\square\widetilde{L}(H_j|\,[E])$ para $\widetilde{L}(H_j|E)$, extendiendo el miembro de la derecha en (17.14) al caso en que la evidencia venga dada por un intervalo de extremos borrosos $[E]$, basándonos en una función de inclusión ${}_\square\widetilde{e_L}([E])$ para $\widetilde{e_L}(E)$ —*cfr. v. gr.* nuestra propuesta de extensión natural para el caso de ser $\widetilde{e_L}(E)$ un número borroso triangular, en la Ec. (17.22):

$$\begin{aligned} {}_\square\widetilde{L}(H_j|\,[E]) & \propto \sum_{e_L \in \mathcal{L}(\mathcal{E})} {}_\square\widetilde{e_L}([E]) p(e_L|H_j) \\ & \rightleftharpoons \left[\left({}_\square\widetilde{L}(H_j|\,[E])\right)_0, \left({}_\square\widetilde{L}(H_j|\,[E])\right)_1\right] \end{aligned}$$

donde, si $[E] = [E_0, E_1]$, entonces:

$$\left({}_\square\widetilde{L}(H_j|\,[E])\right)_0 = {}_\square\widetilde{L}(H_j|E_0) \tag{17.24}$$

$$\left({}_\square\widetilde{L}(H_j|\,[E])\right)_1 = {}_\square\widetilde{L}(H_j|E_1) \tag{17.25}$$

obedeciendo a la expresión (17.14).

Las verosimilitudes inferior y superior proporcionan una clase (de tipo inferior-superior) de a posteriori no normalizadas extendidas a evidencia borrosa:

$$\Im^* = \{{}_\square\widetilde{p}^* : \forall H_j, {}_\square\widetilde{l}^*\,(H_j|\,[E]) \leq {}_\square\widetilde{p}^*\,(H_j|\,[E]) \leq {}_\square\widetilde{u}^*\,(H_j|\,[E])\} \tag{17.26}$$

siendo:

$$\square\widetilde{l}^*(H_j|\,[E]) \quad\propto\quad \left(\square\widetilde{L}(H_j|\,[E])\right)_0 p(H_j) \tag{17.27}$$

$$\square\widetilde{u}^*(H_j|\,[E]) \quad\propto\quad \left(\square\widetilde{L}(H_j|\,[E])\right)_1 p(H_j) \tag{17.28}$$

De manera semejante a la expuesta en §16.5, proponemos definir las a posteriori inferior y superior normalizadas, mediante:

$$\square\widetilde{l}(H_j|\,[E]) = \frac{\square\widetilde{l}^*(H_j|\,[E])}{\square\widetilde{l}^*(H_j|\,[E]) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\square\widetilde{u}^*(H_k|\,[E])} \tag{17.29}$$

$$\square\widetilde{u}(H_j|\,[E]) = \frac{\square\widetilde{u}^*(H_j|\,[E])}{\square\widetilde{u}^*(H_j|\,[E]) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\square\widetilde{l}^*(H_k|\,[E])} \tag{17.30}$$

De manera similar a como ocurría en §16.4, veamos que estas a posteriori normalizadas no son verdaderas probabilidades sobre el sistema completo $\Theta = \{H_1, \ldots, H_m\}$ de hipótesis.

En efecto, según las definiciones de las operaciones entre números borrosos a partir de operaciones entre sus α-cortes —*cfr.* Ecs. (4.40-4.43)—, los α-cortes de las distribuciones a posteriori normalizadas $\widetilde{l}$ y $\widetilde{u}$ son, para una hipótesis determinada H_j, y para todo $\alpha \in (0,1]$:

$$^{\alpha}\square\widetilde{l}(H_j|\,[E]) \quad=\quad \left[\frac{\left(\widetilde{l}_j^*\right)_0^{\alpha}}{\left(\widetilde{l}_j^*\right)_1^{\alpha} + \sum_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\widetilde{u}_k^*\right)_1^{\alpha}}, \frac{\left(\widetilde{l}_j^*\right)_1^{\alpha}}{\left(\widetilde{l}_j^*\right)_0^{\alpha} + \sum_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\widetilde{u}_k^*\right)_0^{\alpha}}\right] \tag{17.31}$$

$$^{\alpha}\square\widetilde{u}(H_j|\,[E]) \quad=\quad \left[\frac{\left(\widetilde{u}_j^*\right)_0^{\alpha}}{\left(\widetilde{u}_j^*\right)_1^{\alpha} + \sum_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\widetilde{l}_k^*\right)_1^{\alpha}}, \frac{\left(\widetilde{u}_j^*\right)_1^{\alpha}}{\left(\widetilde{u}_j^*\right)_0^{\alpha} + \sum_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\widetilde{l}_k^*\right)_0^{\alpha}}\right] \tag{17.32}$$

donde $\widetilde{l}_j^* \rightleftharpoons \square\widetilde{l}^*(H_j|\,[E])$ y $\widetilde{u}_j^* \rightleftharpoons \square\widetilde{u}^*(H_j|\,[E])$.

Demostremos ahora que $1 \in \text{core}\,\square\widetilde{l}(\Theta|\,[E])$. Consideremos $\widetilde{l}_\theta^* \rightleftharpoons \square\widetilde{l}^*(\Theta|\,[E])$ y denotemos por X_0^α y X_1^α los extremos inferior y superior, respectivamente, del α-corte de un subconjunto borroso X, entonces:

$$^{\alpha}\square\widetilde{l}(\Theta|\,[E]) = \left[\frac{\left(\widetilde{l}_\theta^*\right)_0^{\alpha}}{\left(\widetilde{l}_\theta^*\right)_1^{\alpha}}, \frac{\left(\widetilde{l}_\theta^*\right)_1^{\alpha}}{\left(\widetilde{l}_\theta^*\right)_0^{\alpha}}\right] \tag{17.33}$$

pues los sumatorios se extienden sobre el rango vacío.

Como para cualquier subconjunto borroso X, y para todo $\alpha \in (0,1]$, $X_0^\alpha \leq X_1^\alpha$, entonces:

$$\forall\alpha \in (0,1],\ 1 \in {}^{\alpha}\widetilde{l}(\Theta|\,[E]) \tag{17.34}$$

de donde:

$$1 \in \text{core}\,\square\widetilde{l}(\Theta|\,[E]) \tag{17.35}$$

De manera similar, podemos demostrar que $1 \in \text{core}\,\square\widetilde{u}(\Theta|\,[E])$.

De forma parecida a lo que veíamos en §16.4, podemos demostrar que:

$$\square\widetilde{l}(A|\,[E]) \oplus \square\widetilde{l}((\Theta\backslash A)|\,[E]) \preccurlyeq \mathsf{UNO} \tag{17.36}$$

Notemos:

$$\widetilde{l}_C^* \quad\rightleftharpoons\quad \square\widetilde{l}^*(C|\,[E]) \tag{17.37}$$

$$\widetilde{u}_C^* \quad\rightleftharpoons\quad \square\widetilde{u}^*(C|\,[E]) \tag{17.38}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
& {}_{\square}\widetilde{l}\,(A|\,[E]) + {}_{\square}\widetilde{l}((\Theta\backslash A)|\,[E]) \\
= \quad & \frac{{}_{\square}\widetilde{l}^{*}(A|\,[E])}{{}_{\square}\widetilde{l}^{*}(A|\,[E]) + {}_{\square}\widetilde{u}^{*}((\Theta\backslash A)|\,[E])} + \frac{{}_{\square}\widetilde{l}^{*}((\Theta\backslash A)|\,[E])}{{}_{\square}\widetilde{l}^{*}((\Theta\backslash A)|\,[E]) + {}_{\square}\widetilde{u}^{*}(A|\,[E])} \\
= \quad & \frac{\widetilde{l}^{*}_{A}\widetilde{u}^{*}_{A} + 2\widetilde{l}^{*}_{A}\widetilde{l}^{*}_{\Theta\backslash A} + \widetilde{l}^{*}_{\Theta\backslash A}\widetilde{u}^{*}_{\Theta\backslash A}}{\widetilde{l}^{*}_{A}\widetilde{u}^{*}_{A} + \widetilde{l}^{*}_{A}\widetilde{l}^{*}_{\Theta\backslash A} + \widetilde{l}^{*}_{\Theta\backslash A}\widetilde{u}^{*}_{\Theta\backslash A} + \widetilde{u}^{*}_{A}\widetilde{u}^{*}_{\Theta\backslash A}} \\
= \quad & \frac{\widetilde{k} + \widetilde{l}^{*}_{A}\widetilde{l}^{*}_{\Theta\backslash A}}{\widetilde{k} + \widetilde{u}^{*}_{A}\widetilde{u}^{*}_{\Theta\backslash A}}
\end{aligned} \tag{17.39}$$

donde $\widetilde{k}$ es una constante borrosa. Utilizando un método cualquiera, pero coherente, de ordenación borrosa —*cfr. v. gr.* KLIR y YUAN [46] (pp. 405ss.)—, obtenemos (17.36).

De manera similar, podemos demostrar que:

$${}_{\square}\widetilde{u}\,(A|\,[E]) \oplus {}_{\square}\widetilde{u}((\Theta\backslash A)|\,[E]) \succcurlyeq \mathsf{UNO}$$

Igual que comentábamos en la Obs. 287, esta no aditividad muestra ser consistente en el reparto total de masas, ya que ${}_{\square}\widetilde{l}$ y ${}_{\square}\widetilde{u}$ **reparten una masa total de probabilidad de** DOS**, entre cualquier conjunto** A **y su complementario** $\Theta\backslash A$ (basta sumar la Ec. (17.39) y la correspondiente para el caso de la a posteriori superior):

$${}_{\square}\widetilde{l}\,(A|\,[E]) + {}_{\square}\widetilde{l}((\Theta\backslash A)|\,[E] + {}_{\square}\widetilde{u}\,(A|\,[E]) + {}_{\square}\widetilde{u}((\Theta\backslash A)|\,[E]) = \mathsf{DOS} \tag{17.40}$$

Observación 301 *En vez de usar puntuaciones numéricas o intervalos, podríamos pensar en* ***usar valores lingüísticos del conjunto de términos*** *(15.26), como valores de la evidencia. En tal caso, no existe imprecisión en la evidencia. La meta de asignar una probabilidad a las palabras que caracterizarán el grado de destreza en el desempeño (*torpemente*,* atolondradamente*, etc.) se consigue mediante un esquema bayesiano clásico en el que tales palabras son las hipótesis y hay cinco valores de la evidencia —los cinco valores lingüísticos de* $\mathcal{L}(E)$.

17.6 Imprecisión borrosa en la evidencia, en las a priori y en las verosimilitudes

«El sueño de la razón produce monstruos.»
—Francisco de GOYA (texto en un grabado suyo)

Para la partición borrosa heptadaria definida en la Tabla 17.1, la Tabla 17.4 muestra un ejemplo de **cuasi-probabilidades lingüísticas condicionadas**, en concreto el borrosificado de las probabilidades condicionadas recogidas en la Tabla 15.3. Por ejemplo, $\widetilde{P}(\mathsf{muy\ bajo} \mid \mathsf{con\ habilidad\ sorprendente}) = \mathsf{nula}$, significa que la cuasi-probabilidad lingüística —entendiendo que representa un grado de creencia razonable o confianza, más que una frecuencia— de que un experto clasifique como muy bajo el grado de destreza que hace referencia al desempeño de una tarea por parte de un trabajador que en realidad lo hace con habilidad sorprendente, es nula. En este caso:

$$\widetilde{P}(\mathsf{muy\ bajo}) + \widetilde{P}(\mathsf{bajo}) + \widetilde{P}(\mathsf{medio}) + \widetilde{P}(\mathsf{alto}) + \widetilde{P}(\mathsf{muy\ alto}) = T_i(1/6; 1; 11/6)$$

donde $T_i(1/6; 1; 11/6)$ denota la sección inicial de $T(1/6; 1; 11/6)$ y es el que tomamos como UNO. Este número borroso satisface que $\lim_{u\downarrow 0} \mathsf{UNO}(u) = 0$ y $\lim_{u\uparrow 1} \mathsf{UNO}(u) = 1$.

Por tanto, en este caso concreto:

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(\mathsf{total}) &= \widetilde{P}(\mathsf{muy\ bajo} \cup \mathsf{bajo} \cup \mathsf{medio} \cup \mathsf{alto} \cup \mathsf{muy\ alto}) \\
&= T_i(1/6; 1; 11/6)
\end{aligned}$$

	muy bajo	bajo	medio	alto	muy alto
torpemente	muy alta	muy baja	nula	nula	nula
atolondradamente	muy baja	baja	baja	muy baja	nula
con soltura	nula	muy baja	alta	muy baja	nula
con pericia	nula	nula	nula	alta	baja
con habilidad sorprendente	nula	nula	nula	nula	sobresaliente

Tabla 17.4: *Cinco ejemplos de cuasi-probabilidades lingüísticas.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

17.7 Trabajando con perfiles híbridos

«Lo real nos sirve para fabricar, bien o mal, un poco de ideal.»
—Anatole France <El jardín de Epicuro>

Consideremos un perfil descriptor $\{\langle R_i, (E_{i0}, E_{i1})\rangle : i = 1, \ldots, n\}$, donde R_i denota el ítem (tarea, concepto o ruido, en nuestros ejemplos), E_{i0} y E_{i1} son valores borrosos de $[0, 1]$, que acotan borrosamente nuestra incertidumbre acerca de la evidencia referida a R_i:

R_1	R_2	R_3	...	...	R_n	
$[E_{10}, E_{11}]$	$[E_{20}, E_{21}]$	$[E_{30}, E_{31}]$	...	...	$[E_{n0}, E_{n1}]$	...

Con nuestra propuesta, hemos pasado a un perfil descriptor:

$$\{\langle R_i, [P_{i0}, P_{i1}]\rangle : i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}\} \tag{17.41}$$

donde P_{i0} y P_{i1} son distribuciones de probabilidad —valoradas borrosamente— sobre el conjunto Θ de las hipótesis:

R_1	R_2	R_3	...	...	R_n	
$[P_{10}, P_{11}]$	$[P_{20}, P_{21}]$	$[P_{30}, P_{31}]$	...	...	$[P_{n0}, P_{n1}]$	...

Este perfil se concreta, caso de que tengamos que proporcionar una respuesta en esta fase, en un perfil descriptor:

$$\{\left\langle R_i, H_{\sigma(i)}, [p_{\sigma(i)0}, p_{\sigma(i)1}]\right\rangle : i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}\} \tag{17.42}$$

R_1	R_2	...	R_n	
$H_{\sigma(1)}$ $[p_{\sigma(1)0}, p_{\sigma(1)1}]$	$H_{\sigma(2)}$ $[p_{\sigma(2)0}, p_{\sigma(2)1}]$	...	$H_{\sigma(n)}$ $[p_{\sigma(n)0}, p_{\sigma(n)1}]$	...

donde:

$$H_{\sigma(i)} = \arg \mathrm{MAX}_{H\in\Theta}[p_{i0}(H), p_{i1}(H)] \tag{17.43}$$

$$p_{\sigma(i)0} = p_{i0}(H_{\sigma(i)}) \tag{17.44}$$

$$p_{\sigma(i)1} = p_{i1}(H_{\sigma(i)}) \tag{17.45}$$

siendo $p_{\sigma(i)0}$ y $p_{\sigma(i)1}$, abreviaturas para las probabilidades a posteriori inferior y superior, valoradas borrosamente:

$$p_{\sigma(i)0} \rightleftharpoons \Box\widetilde{l}\left(H_{\sigma(i)} | [E_{i0}, E_{i1}]\right) \tag{17.46}$$

$$p_{\sigma(i)1} \rightleftharpoons \Box\widetilde{u}\left(H_{\sigma(i)} | [E_{i0}, E_{i1}]\right) \tag{17.47}$$

y MAX está definida, por ejemplo, según (3.30).

En este momento, estamos ante un problema multicriterio, en dos niveles. Por un lado, los criterios o factores principales son los ítems R_i. Por otro, los subcriterios, o factores secundarios, son los referentes, las hipótesis de Θ.

Lo que proponemos para resolverlo es, para cada individuo, convertir su perfil descriptor del tipo dado por la Ec. (17.41) en un perfil descriptor donde no intervengan probabilidades, en realidad, en un perfil descriptor Φ-borroso de tipo 2, donde los extremos de los intervalos son subconjuntos borrosos ordinarios. Dése cuenta el lector que con este tipo de perfiles ya sabemos trabajar.

Para llevar a cabo esto, necesitamos saber medir la distancia o divergencia entre distribuciones de probabilidad. Podemos hacerlo, directamente, esto es, a partir de las disimilitudes locales entre valores de las funciones de distribución, o indirectamente, a partir de medidas locales entre valores de sus funciones de densidad asociadas. En este último caso, KRZANOWSKI [50] distingue entre: medidas relacionadas con la medida de afinidad propuesta por BHATTACHARYYA, y medidas basadas en ideas de teoría de información. Todo ello lo recogemos en el Apéndice B.

Al utilizar divergencias sin ponderar, no es necesario profundizar demasiado para advertir un inconveniente.

Ejemplo 302 *En los ejemplos de* ***desempeño de tareas*** *o de* ***evaluación de los aprendizajes****, imagine por un momento el lector sólo tres categorías: mal, regular, y bien. La* ***distribución ideal de probabilidades****, según la partición borrosa definida en la Tabla 17.1, sería:*

$$\mathcal{I} \equiv \textit{nula/mal} + \textit{nula/regular} + \textit{sobresaliente/bien}$$

Piense en dos sujetos para los que se ha deducido:

$$\begin{aligned} P &\equiv \textit{muy baja/mal} + \textit{muy alta/regular} + \textit{nula/bien} \\ Q &\equiv \textit{muy alta/mal} + \textit{muy baja/regular} + \textit{nula/bien} \end{aligned}$$

Resulta que, con cualquier medida de divergencia D:

$$D(\mathcal{I}, P) = D(\mathcal{I}, Q)$$

pero nosotros, sin duda, preferimos al sujeto que tiene asociada P.

Ejemplo 303 *Preguntamos a un grupo G_1 de personas acerca de lo que ellos consideran "aproximadamente igual" a 7 euros. Con casi absoluta certeza que todos considerarán 6.99 y 7.01 euros igual que 7. El referencial es finito, por ejemplo, $\mathcal{X} = [0, 14]_{\mathbb{N}}$, y la opinión del grupo de personas se representa por una clase $\mathcal{M}_1$ de distribuciones sobre $\mathcal{X}$. Preguntado otro grupo G_2, se obtiene otra clase $\mathcal{M}_2$ de distribuciones sobre $\mathcal{X}$. ¿Cómo medir la divergencia de opinión entre los grupos G_1 y G_2? ¿Influyen las disimilitudes horizontales? Sean por ejemplo las distribuciones:*

x	$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$
6.5	0	0	1/4
6.75	0	1/4	0
7	1	1/2	1/2
7.25	0	1/4	0
7.5	0	0	1/4

Parece natural que $D(P, Q)$ debe ser menor que $D(P, R)$. Sin embargo, cualquier medida de divergencia, de las presentadas en la sección anterior, al no tener en cuenta la naturaleza de los sucesos en estudio, proporcionará el mismo resultado.

Un modo de conseguir lo deseado es introducir una familia de ponderaciones no negativas en las divergencias —*cfr.*§B.4 (pág. 496)—. Si $w(x)$ denota el índice ponderal asociado a x, entonces, una solución al último ejemplo sería exigir que $w(6.5) > w(6.75)$ y que $w(7.25) < w(7.5)$, esto es, cuanto más alejado de 7, las ponderaciones deben ser mayores, de manera que la divergencia aumente.

Parece lógico pensar, pues, que el orden de preferencia determina el orden, en cuanto a magnitud, de los índices ponderales (en el último ejemplo, 7 es lo preferido).

Algo similar haríamos en los casos de evaluación del desempeño o de los aprendizajes. La situación concreta planteada en el Ejemplo 302 puede resolverse con una asignación de índices ponderales, concorde con nuestra

estructura de preferencias, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \textsf{mal} &\leftarrow 1/6 \\ \textsf{regular} &\leftarrow 2/6 \\ \textsf{bien} &\leftarrow 3/6 \end{aligned}$$

y, en general, una infinidad de posibles elecciones, pues basta con que:

$$w(\textsf{mal}) < w(\textsf{regular}) < w(\textsf{bien})$$

17.8 Razón de convergencia a la distribución ideal de probabilidades: De nuevo TOPSIS

«El recuerdo es activo. No es un objeto perdido y recobrado. Hace fermentar la masa del presente y del futuro.»
—Jacques de BOURBON-BUSSET <Tú no morirás>

En el Ejemplo 302, la estructura de preferencia generada por diverger del ideal es la indiferencia entre P y Q:

$$P \succ\prec Q \tag{17.48}$$

Igual que hemos definido la *distribución ideal de probabilidad*, podemos definir la **distribución anti-ideal de probabilidades**:

$$\overline{\mathcal{I}} \equiv \textsf{sobresaliente/mal} + \textsf{nula/regular} + \textsf{nula/bien} \tag{17.49}$$

La estructura de preferencias generada por diverger del anti-ideal es la preferencia por P al elegir entre P y Q:

$$P \succ Q \tag{17.50}$$

Ya conocíamos este hecho: en general, la estructura de preferencia que se obtiene al comparar con el ideal no tiene por qué ser la misma que la que se obtiene al comparar con el anti-ideal. La solución que sugiere el método TOPSIS, la *razón de similitud a la solución ideal* —*cfr.* Ec. 10.6—, hace que propongamos el uso de la que denominamos **razón de convergencia a la distribución ideal de probabilidades**, de manera que, para cualquier distribución P_{ib}, $i \in \{1, \ldots, n\} \wedge b \in \{0, 1\}$, la definimos como el número borroso:

$$C(\mathcal{I}, P_{ib}) = \frac{D^w(\overline{\mathcal{I}}, P_{ib})}{D^w(\mathcal{I}, P_{ib}) + D^w(\overline{\mathcal{I}}, P_{ib})} \tag{17.51}$$

De este modo, transformamos el perfil descriptor:

$$\{\langle R_i, [P_{i0}, P_{i1}]\rangle : i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}\} \tag{17.52}$$

donde P_{i0} y P_{i1} son distribuciones de probabilidad —valoradas borrosamente— sobre el conjunto Θ de las hipótesis:

R_1	R_2	R_3	...	...	R_n	
$[P_{10}, P_{11}]$	$[P_{20}, P_{21}]$	$[P_{30}, P_{31}]$	...	...	$[P_{n0}, P_{n1}]$	...

por ejemplo:

	R_1	...
torpemente	[muy baja, baja]	...
atolondradamente	[baja, baja]	...
con soltura	[media, media]	...
con pericia	[muy baja, muy baja]	...
con habilidad sorprendente	[muy baja, muy baja]	...

en un nuevo perfil descriptor:

$$\{\langle R_i, H_{\sigma(i)}, [C(\mathcal{I}, P_{i0}(H_{\sigma(i)})), C(\mathcal{I}, P_{i1}(H_{\sigma(i)}))]\rangle : i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}\}$$

donde:

R_1	R_2	...	R_n	
$H_{\sigma(1)}$ $[C(\mathcal{I}, P_{10}), C(\mathcal{I}, P_{11})]$	$H_{\sigma(2)}$ $[C(\mathcal{I}, P_{20}), C(\mathcal{I}, P_{21})]$	...	$H_{\sigma(n)}$ $[C(\mathcal{I}, P_{n0}), C(\mathcal{I}, P_{n1})]$	...

es decir, mediante una descripción Φ-borrosa de tipo 2, siendo los extremos de los intervalos, números borrosos. Y, amable lector, ya sabemos trabajar con este tipo de perfiles.

En esta descripción, no queda ni rastro de lo probable (los números borrosos que la configuran ya no son valores de una probabilidad).

17.9 Ejemplo ilustrativo: Inferencia del grado de molestia en la población causado por exposición al ruido

«El silencio no existe; vivir es estar en el centro de un arroyo que sólo la muerte detendrá.»
—François Mauriac (1885-1970) <Nuevas memorias interiores>

Demasiada gente padece, más que soporta, niveles de ruido que los científicos y expertos en salud consideran inaceptables. Por lo general, se experimenta malestar significativo en un campo libre a niveles de presión sonora superiores a 120 dB; sobre 130 dB se produce una sensación táctil o de cosquilleo, y sobre 140 dB, aparece el dolor —*cfr.* Small y Gales [1369] (p. 17.7)—. Pero es a niveles inferiores donde, para la mayoría de las personas, emerge la sensación de molestia, sufriendo trastornos del sueño, y en general, pudiendo sufrir ciertos efectos adversos para su salud. Por cierto que los tribunales no mantienen una postura común —aunque esto suele ser la norma, no sólo en este tema—, pues muchos jueces y jurados sopesan los perjuicios e incluso los daños ocasionados por molestias respecto al «bien común».

Existen muchos equipos de investigadores dedicados al tema de la contaminación acústica. La historia viene de antiguo. Federico Miyara [1370] alude a los estudios sobre ruido llevados a cabo en New York, por Free [1371, 1372], en 1925, y por la Comisión de Lucha Contra el Ruido, en 1929 —*cfr.* Galt [1373]. Un ejemplo muy cercano es el equipo de investigación liderado por Juan Miguel Barrigón Morillas, del Departamento de Física de la Universidad de Extremadura, quienes a partir de una encuesta piloto sobre una muestra de más de 100 personas, deducen que, en Cáceres y Badajoz, las seis fuentes de contaminación acústica más molestas son, por orden de importancia: 1) tráfico de motos, 2) obras, 3) claxon, 4) tráfico de automóviles, 5) voces en el exterior, 6) voces en el interior del edificio. Sus estudios concluyen que «las ciudades de Cáceres y Badajoz, en lo que se refiere a las calles más populosas, pueden considerarse muy ruidosas y, en la mayoría de los casos, superan las recomendaciones nacionales e internacionales» —*cfr.* Barrigón Morillas [1374] (p. 3); Barrigón Morillas, Vílchez, Gómez, Méndez y Tejeiro [1375]; Méndez y Barrigón Morillas [1376].

En la definición del problema participan múltiples variables, incluyendo, entre otras —*cfr.* Harris [1377] (*passim*): la elección del instrumento elegido para medir el sonido y de las posiciones o puntos de medida y su número, medición de la exposición al sonido, potencia e intensidad del sonido, las características de la fuente de ruido, su movilidad y localización, ruido de trenes, aviones, autopistas, estratificación del volumen del tráfico y estado del pavimento —*cfr.* Dieghton y Paterson [1378]; Haugodegard [1379]; Paterson y Scullion [1380]; Cuena [1381]; Kershaw [1382]—, así como la proximidad a colegios, supermercados, ruido comunitario, la precisión requerida en las medidas, el uso al que se piensan destinar los resultados que se obtengan, diseño de encuestas y técnicas de contraste de hipótesis y la habilidad de todas las personas que coparticipan en el estudio. Todos estos datos deben ser almacenados y ser accesibles.

En la actualidad, una parte importante de la investigación se orienta hacia el estudio de los efectos en la salud originados por exposición al ruido, incluyendo también cambios psicológicos y emocionales en los individuos. En un «Green Paper» de 1996 [1383], la Comisión Europea llamaba la atención sobre el hecho de que había sido estimado que sobre un 20 por ciento de la población de la Unión, o sea, unos 80 millones de personas,

padecen niveles de ruido inaceptables. Otros 170 millones de ciudadanos europeos viven en las llamadas «áreas grises», en las que los niveles de ruido son tales que causan serias molestias durante el día.

En este «Green Paper», se identificaban algunos efectos de la exposición al ruido: *trastornos del sueño*; *estresante para la salud* al poder producir cambios medibles, por ejemplo, en la presión sanguínea, en el ritmo cardíaco, en la vasoconstricción, en los niveles de excreción endocrina, y en las tasas de admisión en los hospitales para enfermos mentales; *interferencias en la comunicación*; *molestia general*, o sea, el hecho de que trastorna y molesta a las personas.

También ha formado parte del curriculum investigador de algunos autores la identificación de posibles efectos de la exposición al ruido. Por ejemplo, Stephen STANSFELD, en un documento publicado por el *Institute for Environment and Health* (IEH) de la Universidad de Leicester [1384], identifica nueve grupos clave de efectos sobre la salud que se piensa son causados por la exposición al ruido: *trastornos del sueño*, *problemas en el cumplimiento, realización o ejecución de tareas*, *enfermedades cardiovasculares*, *salud del feto*, *respuestas endocrinas*, *desórdenes psiquiátricos*, *molestia*, *efectos en la salud de los niños*, y *efectos en la salud debido al ruido en combinación con otros estresantes.*

Son palabras de la Comisión Europea: «la sensación de molestia se deriva, no sólo de los trastornos del sueño y de las interferencias en la comunicación, sino también de sensaciones de molestia y afecciones, no tan bien definidas como las anteriores, en todo tipo de actividades, así como durante los períodos de descanso. Debido a la naturaleza subjetiva de la molestia, su evaluación debe ser hecha utilizando técnicas de inspección como cuestionarios. Los estudios hasta la fecha muestran la importancia del ruido producido por el tráfico como un factor de molestia en la población general.»

17.9.1 Inferencia bayesiana del grado de molestia expresado con palabras

Habitualmente, el grado de molestia de una población se infiere a partir de **encuestas sociales** rellenadas por poblaciones expuestas a ruido. Puede ocurrir que se presenten distintos niveles sonoros día(-tarde)-noche, interiores y exteriores, y que por ello, el grado de molestia en la población dependa de la hora del día o noche.

Al igual que ocurre con cualquier cuestionario, hemos de tener cuidado con su diseño. Por ejemplo:

- los fines que pretendemos conseguir deben estar claramente especificados;
- no debemos incluir *preguntas prejuzgadoras*, como: «El ruido del tráfico de vehículos, ¿en qué medida le trastorna su sueño? (poco (1), ..., mucho (5))»; en efecto, al hacer esta pregunta, prejuzgamos que el trastorno *per se* es un hecho aceptado —*cfr.* FIDELL y GREEN [1385] (p. 23.10)—;
- tampoco debemos incluir *preguntas vagas*; la anterior lo es: ¿significa lo mismo un «trastorno del sueño» para mí que para tí?;
- También hemos de evitar las *preguntas «proselitistas»*, como: «¿En qué medida le molesta pasar junto a un martillo neumático que está perforando el asfalto?»;
- hemos de perseguir lo objetivo dentro de lo subjetivo y emocional que es en sí la apreciación de la molestia.

En cualquier caso, como resultado obtenemos un conjunto de parejas formadas por los valores de exposición al ruido y los porcentajes de los individuos encuestados que describen su grado de molestia causada por la exposición, atendiendo a que haya existido una suficiente disposición individual a describirse a sí mismo como molesto en cierto grado (sesgo de la respuesta, que depende de la naturaleza o características sociales o culturales de la comunidad encuestada) —*cfr.* FIDELL y GREEN [1385] (p. 23.3)—. Estos resultados podrán ser buenos indicadores de la satisfacción o insatisfacción media a largo plazo, aunque por lo general, no seamos capaces de predecir de manera fiable una situación individual en un instante determinado de tiempo —*cfr.* VON GIERKE, ELDRED y BREAK [1386] (p. 54.14).

Supongamos, pues, que hemos **entrevistado a la población** acerca de su grado de molestia con respecto al ruido presente en tal lugar. Supongamos, además, que disponemos de **mediciones de nivel sonoro**, recogidas en el lugar en estudio. Ambos estudios son fuentes de información a priori para investigaciones posteriores. Supongamos que en cierto momento futuro, estamos interesados en conocer, sólo a partir de nuevas mediciones de niveles sonoros, sin tener que hacer ninguna nueva encuesta, si las personas que viven en un lugar, para el que disponemos de datos previos, están molestas por razones de contaminación acústica.

El punto de partida es similar al de los dos ejemplos ilustrativos anteriores: la suposición de *la imposibilidad de asignar un número exacto a los valores observados.* Es decir, que los valores observados de nivel sonoro son

imprecisos. Aunque los **sonómetros** o medidores de nivel sonoro son cada vez más y más precisos, no pueden asignar aún (y quizás, nunca puedan) un valor numérico *exacto* a un valor observado[7].

Suponemos que las mediciones de nivel sonoro —la evidencia numérica nítida— pertenecen a la misma escala ordinal nítida, con el mismo número de grados, cada uno determinado por un valor numérico. No obstante, esta suposición no hace que pierda sentido la hipótesis de continuidad para la evidencia. Debe notarse que las medidas digitales de la realidad están siempre valoradas en los racionales, con un número prescrito de dígitos decimales significativos, y por tanto, siempre se llevan a cabo con una escala nítida ordinal. La discretización forzada determinada por la precisión del metrónomo puede ser una elección razonable. En este ejemplo, asumimos una precisión de ±0.5 dB.

El conjunto $\mathcal{L}(E)$ de términos lingüísticos que sirven para valorar borrosamente la evidencia es el mismo que en los ejemplos anteriores: muy bajo, bajo, medio, alto y muy alto.

Distinguimos cinco situaciones exhaustivas y mutuamente excluyentes, según que el grado de molestia sea: ninguno, suave, moderado, intenso, or severo. Dadas unas medidas de nivel sonoro en un lugar, pretendemos clasificar los grados de molestia de los habitantes del lugar, causados por exposición al ruido, en una de las cinco clases anteriores, de acuerdo con el conocimiento previo, que como mínimo, debería incluir a las medidas de niveles sonoros y a las encuestas que posiblemente se hayan realizado.

Al menos tenemos dos formas de estimar esta clase o hipótesis correspondiente al valor dado de la evidencia. Podemos usar sólamente la información proveniente de la muestra de mediciones de ruido, y estimar la clase como aquélla dada por el *estimador de máxima verosimilitud* (EMV) para la muestra. O podemos usar un mecanismo de inferencia bayesiana borrosa, siempre que conozcamos las probabilidades de verosimilitud de la evidencia borrosa y las probabilidades a priori de las hipótesis. En este caso, estimamos la clase a la que pertenece la medición de nivel sonoro mediante el *estimador máximo a posteriori* (MAP). Si suponemos que los datos son imprecisos y los representamos como intervalos en vez de como números, entonces el proceso de inferencia bayesiana borrosa hace que las conclusiones estadísticas se expresen en términos de probabilidades inferiores y superiores.

Lo más atractivo, quizás, es que el modelo permite la utilización de sonómetros borrosos y que los encuestados respondan con palabras (pertenecientes a un conjunto predeterminado).

17.9.2 Suplemento: La medida del ruido

En términos generales, lo que llamamos **ruido** viene determinado por la percepción y apreciación subjetiva de las personas, variando de un individuo a otro e incluso variando para un mismo individuo, dependiendo de su estado o circunstancias actuales. Es por esto, por su **naturaleza subjetiva**, que no es realista su medición con unidades objetivas —*cfr.* EC Green Paper [1383]—. Claro que para poder clasificar y comparar diferentes ruidos, es necesario proporcionar al menos una descripción aproximada, que usualmente se valora cuantitativamente.

Por **presión sonora** se conoce a la variación dinámica de la presión estática del aire, midiéndose en términos de fuerza por unidad de área —*cfr.* National Instruments Co. [1387]—. Las medidas de la presión sonora se representan habitualmente en una escala logarítmica. Valores típicos de esta escala son un nivel sonoro de 0 decibelios (dB), que es el umbral medio de audición humana, de 60 a 70 dB para una conversación normal, 110 dB para un concierto extremadamente ruidoso, y 150 dB para el ruido del despegue de un cohete o un avión a reacción. El **nivel de presión sonora** —*sound pressure level*, SPL ó L_p—, se define por:

$$L_p = 10 \log_{10} \left(\frac{p}{p_{ref}} \right)^2 \text{ dB} \tag{17.53}$$

donde p es la presión sonora actual y $p_{ref} = 20\mu\text{Pa}$ corresponde, aproximadamente al umbral de audición humana. Para ondas no estacionarias, la razón de flujo de energía por unidad de área, el **nivel de intensidad sonora** —*sound intensity level*, SIL ó L_{SI}— se define mediante:

$$L_{SI} = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \text{ dB} \tag{17.54}$$

[7] ¿Existe en la naturaleza el nivel sonoro equivalente a $70+\sqrt{2}$ dB? Si la respuesta es negativa, *este* problema no se presenta. Si la respuesta es afirmativa, ¿qué máquina es capaz de asignar, *precisamente*, el valor numérico *exacto* $70+\sqrt{2}$ dB a una medición del nivel sonoro real de $70+\sqrt{2}$ dB? E incluso si imaginamos esa posibilidad, ¿cómo verificamos nosotros, como seres humanos, que tal asignación se ha efectuado?

donde $I_0 = 10^{-12}$ watts/meter^2. Para ondas no estacionarias, los valores numéricos de SIL y de SPL son idénticos, en otras palabras, que SPL y SIL son lo mismo. Para ondas estacionarias, al no haber flujo de energía, no puede definirse la intensidad I, por lo que, aunque SPL conserva su significado, SIL lo pierde. Debido a esto, se usa más SPL que SIL. Como propósito general, se pondera SPL con la llamada ponderación-A, obteniéndose el **SPL A-ponderado** (*A-weighted SPL* ó L_{pA}). Las unidades se denotan por dB(A). Mediante esta ponderación dependiente de la frecuencia se trata de aproximar las características de la audición humana. El oído humano posee sensibilidades distintas para tonos de diferentes frecuencias: es más sensible para tonos entre 1kHz y 5kHz, menos sensible para frecuencias más altas e aún menos sensible para frecuencias más bajas.

Sea $\{L_1, \dots, L_n\}$ una muestra de medidas proporcionadas por un sonómetro. Llamamos **nivel (medio) equivalente sonoro**, en su forma discreta, a:

$$L_{eq} = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 10^{L_i/10} \right) \tag{17.55}$$

Si suponemos la existencia de imprecisión en las medidas de nivel sonoro, entonces podríamos representar los niveles muestrales con intervalos $\{[L_1], \dots, [L_n]\}$, y, por tanto:

$$[(L_{eq})_0, (L_{eq})_1] = 10 \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 10^{[L_i]/10} \right) \tag{17.56}$$

Si el nivel equivalente sonoro se expresa en dB(A), entonces se denota por L_{Aeq}. Es éste el nivel de un sonido uniforme, tal que si es oído continuamente durante el mismo período de tiempo, contendría, en total, la misma energía sonora que el sonido variable en estudio. Por lo general, los niveles L_{Aeq} y L_{eq} se usan indistintamente. El **nivel de exposición sonora** —*sound exposure level*, SEL—, en su forma discreta, es:

$$SEL = 10 \log_{10} \left(\sum_{i=1}^{n} 10^{L_i/10} \right) \tag{17.57}$$

El **nivel sonoro día-noche**, en su forma discreta, usando SEL, es:

$$L_{dn} = 10 \log_{10} \left(\sum_{i=1}^{n} 10^{SEL_i/10} + \sum_{i=n+1}^{m} 10^{(SEL_i+10)/10} \right) \tag{17.58}$$

También podríamos analizar el **nivel sonoro día-tarde-noche**. Para obtener datos de carácter global, podríamos usar cualquier indicador bien conocido, por ejemplo, la Unión Europea recomienda utilizar:

$$L_{EU} = 10 \log \frac{1}{24} \left(12 \times 10^{\frac{L_D}{10}} + 4 \times 10^{\frac{L_T+5}{10}} + 8 \times 10^{\frac{L_N+10}{10}} \right) \tag{17.59}$$

donde L_D, L_T y L_N son los niveles equivalentes extendidos a períodos de tiempo de 12 (Día), 4 (Tarde) y 8 horas (Noche).

17.10 Ejemplo ilustrativo: Alteración del rendimiento humano en el desempeño de una tarea, debida a la exposición al ruido

«Somos todos unos farsantes: sobrevivimos a nuestros problemas.»
—Emil Mihai CIORAN Rasinari (1911-1995) <Silogismos de la amargura>

La **alteración del rendimiento humano en el desempeño** de una tarea, debida a la exposición a ruido, depende del tipo de ruido y de las exigencias de la tarea. En general, parece que el rendimiento es mejor en silencio que en presencia de ruido. Los accidentes suelen ocurrir en áreas ruidosas y entre trabajadores jóvenes, individuos poco entrenados para quienes las demandas de atención son altas —*cfr.* JONES y BROADBENT [1388] (p. 24.22).

Estos autores citan un caso en el que se comparó el efecto del ruido en dos tareas distintas: ensamblar carburadores y ensamblar acondicionadores de aire: curiosamente, el ruido aumentó la velocidad de ensamblaje de estos últimos, pero redujo la de los primeros —*cfr.* LEVY-LEBOYER y MOSER [1389], *via* JONES y BROADBENT

[1388] (p. 24.23)—. A veces, pues, los efectos del ruido pueden ser positivos, a la par que imprevisibles. No es el único ejemplo, HOCKEY [1390] halló que el ruido mejoraba la ejecución de tareas de seguimiento. Usualmente, estas consecuencias positivas se atribuyen a que los ruidos excitan a los individuos, aunque la verdad es que es harto difícil defender esto categóricamente, sobre todo, por las diferencias entre personas, de modo que los grados de excitación pueden deberse a múltiples factores —*cfr. v. gr.* BLAKE [1391].

Pero, como apuntan David POPE, Robert J. HOUGHTON, Dylan M. JONES, Fabrice PARMENTIER y Eric FARMER [1392], es posible que pueda deberse a la utilización de una estrategia alternativa y específica para la ejecución de una tarea determinada. Varios experimentos demuestran que los sujetos bajo estudio utilizaban diferentes estrategias, dependiendo de que estuviesen en un ambiente ruidoso o no, por ejemplo, para tareas de repetición —*cfr.* DAEE y WILDING [1393]— o de recuerdo —*cfr.* MILES y SMITH [1394]—. De hecho, para esto último, para recordar, SMITH [1395] muestra cómo los sujetos, en presencia de ruido, eran más dados a recordar características particulares, mientras que su ausencia, favorecía el recuerdo de características globales.

Dylan M. JONES y Donald E. BROADBENT [1388] (pp. 24.24-24.25), proporcionan una lista de 14 directrices que recomiendan emplear para determinar el nivel del ruido al cual se verá afectado el rendimiento humano:

1. Ruidos inesperados y desconocidos tienen efectos perjudiciales de corta duración, habitualmente 2 o 3 segundos, aunque a veces pueden llegar a los 30 segundos.

2. Activar y desactivar el ruido tiene un efecto que es proporcional al cambio en el nivel del sonido del ruido, siendo el cambio en el nivel de estimulación el factor importante.

3. Los golpes de ruido deterioran la ejecución, sobre todo si coinciden con la adquisición de la información por parte de la persona, pero puede existir un pequeño efecto incluso cuando la información ya ha sido registrada y mantenida en la memoria.

4. A medida que los golpes de ruido se hacen frecuentes, pueden tener un efecto distractor inicialmente, pero cuando la persona lleva un rato trabajando, pueden tener un efecto alertador.

5. El grado en que la persona siente que controla el ruido marca la amplitud con que el rendimiento empeora y este empeoramiento aumenta una vez desactivado el ruido. Por ello, la actitud de la persona hacia el ruido así como el trabajo determinan su efecto sobre la ejecución.

6. Muchas tareas sencillas, que requieran discriminaciones relativamente fáciles, o decisiones sin presión de tiempo, o respuestas de tipo predecible o en momentos predecibles, son inmunes a los efectos del ruido continuo, incluso cuando los niveles de ruido exceden los 100 dB(C).

7. Cuando se detectan señales visuales inesperadas que son difíciles de discriminar, la persona se resiste a informar de acontecimientos a menos que esté plenamente segura [los efectos del ruido sobre el rendimiento pueden encontrarse a niveles de sonido tan bajos como 85 dB(C) si la tarea contiene algún elemento de comparación y recuerdo de señales].

8. Cuando la persona tiene que responder continuamente, el rendimiento puede estar sometido a breves lapsos para niveles sonoros de 90 dB(C) o superiores. Esto resulta particularmente evidente si uno mismo marca la velocidad de trabajo, o sea, si el progreso de la tarea depende del ritmo de trabajo de la persona y no del ritmo impuesto por una máquina. El resultado habitual de la exposición al ruido son algunas respuestas muy lentas o errores.

9. Si hay que realizar más de una tarea simultáneamente, el ruido sesgará la atención del trabajador hacia la tarea más dominante. La eficacia de un elemento de la ejecución puede mejorar con el ruido, pero a costa del de menor prioridad, al que o no se responderá o se hará lentamente.

10. Si puede analizarse el mismo material en más de una forma, con ruido se adoptará la manera más dominante y evidente. Existen algunos métodos de respuesta que parecen adoptarse habitualmente durante el ruido: si la persona tiene que aprender una lista de elementos, se produce mayor tendencia a repetir las palabras una y otra vez.

11. El habla irrelevante afecta al rendimiento, incluso con niveles sonoros tan bajos como 55 dB(C), reduciendo la capacidad de procesamiento disponible para la lectura. El significado del habla es importante, de forma que si no es comprensible, no habrá distracción.

12. El recuerdo de los elementos de una lista también se ve alterado con bajas intensidades de habla irrelevante, pero en este caso no resulta importante el significado del habla. El deterioro de la ejecución es intrínseco y es improbable que disminuya por la actitud o el estado de ánimo de la persona.

13. El estado general de activación del individuo configura el grado de alteración producido por el ruido continuo; la cantidad de pérdida de sueño contrarresta el efecto habitual, y el estado de ánimo de la persona puede tener efectos positivos o negativos, pero la vibración y el calor no modifican la acción del ruido. En general, hay que proceder con cautela al extrapolar el caso de los estresantes únicos a los múltiples.

14. En la industria, si los trabajadores están expuestos al ruido, podría reducirse la productividad y aumentar los accidentes, pero sólo con niveles sonoros por encima de 95 dB(C). Sin embargo, puede resultar difícil discriminar este efecto en cualquier estudio sobre rendimiento en el lugar de trabajo; otros factores asociados con el estado de ánimo y la motivación de los trabajadores podrían enmascarar cualquier efecto de disminución.

La influencia en el rendimiento podría categorizarse en ausente, suave, moderada, intensa y severa. El problema que se nos plantea es similar al anterior: inferir el grado de influencia en el rendimiento, por lo que es posible abordar su solución de la misma manera.

No obstante, son numerosos los **factores que pueden alterar o influir en los efectos del ruido** sobre el desempeño de tareas; por ejemplo, el estado de ánimo del trabajador, el grado en el que la tarea dependa del uso de palabras, el tiempo durante el que se ha estado ejecutando la tarea, la fatiga del trabajador, el grado de experiencia del trabajador en la tarea bajo desempeño, o la propia variabilidad inherente al ser humano en la ejecución de una tarea específica. En nuestro caso, sería necesario estudiar de qué manera quedaría reflejada su acción sobre las definiciones de las a priori y las verosimilitudes.

17.11 Ejemplo ilustrativo: Elección de componentes software reutilizables

«Si cortas el núcleo del átomo,
dentro de él encontrarás el sol.»
—Sayyed Ahmad Hâtef Isfahânî <Oda sobre la unidad divina> (autor persa S. XVIII)

En la actualidad, mucho es el esfuerzo que se emplea en la investigación y desarrollo de tecnología que soporte el software basado en componentes —*cfr.* Van der Hoek y Wolf [23]; Sametinger [1396]—, a la par que, las componentes son objeto de continua actualización (mejora) y reutilización —*cfr.* Heineman y Councill [1397].

Como ejemplos de tales tecnologías, podemos citar:

- **plataformas de componentes** como, por ejemplo, NET —*cfr.* Platt [1398]—, EJB (*Enterprise Java Beans*) —*cfr.* Matena y Hapner [1399]—, KOALA —*cfr.* Van Ommering, Van der Linden, Kramer y Magee [1400]—, o AONIX (*The Aonix Select Component Manager*)[8];
- **técnicas para predecir el ensamblaje de componentes** —*cfr. v. gr.* Lau [1401]; Lau y Ornaghi [1402];
- **mejoras de lenguajes de programación** existentes, de manera que incorporen el modelado de componentes específicas, por ejemplo, ARCHJAVA —*cfr.* Aldrich, Chambers y Notkin [1403]— o ACOEL —*cfr.* Sreedhar [1404];
- **repositorios Web para la distribución de software**, por ejemplo, FRESHMEAT[9] y SOURCEFORGE[10] tienen en cuenta la dependencia entre componentes;

Pero no debemos olvidar que el fin último del desarrollo de software basado en componentes (CBD – *Component-based Software Development*) es su reutilización, esto es, su uso, de cara a su ensamblaje, por terceras partes. Esto hace imprescindible «mirar» a través del prisma de la necesidad formal de la:

- **especificación y verificación (corrección) de componentes**, de manera que podamos razonar, a priori, acerca de su construcción y composición —*cfr. v. gr.* Lau y Ornaghi [1402]; Leavens [1405]; Sitaraman y Weide [1406].

[8] http://www.aonix.com/content/products/select/select_compman.html
[9] http://www.freshmeat.com/
[10] http://www.sourceforge.net/

17.11.1 Ingeniería del software basada en componentes

Como ya hemos comentado, la esencia de la *ingeniería del software basada en componentes* (ISBC) es la **reutilización** de las mismas —*cfr.* PRESSMAN [908] (pp. 473ss.)—. La preocupación fundamental de un equipo de ingeniería de software basada en componentes, consiste en el examen y la determinación de los requisitos necesarios para la composición y no para la construcción —como sería el caso de un equipo de ingeniería de software orientada a objetos:

> *[La ISBC] cambia su objetivo y pasa de programar el software a componer sistemas de software.»*
> —P. C. CLEMENS [1407].

La ISBC integra dos subprocesos concurrentes: la **ingeniería del dominio** y el **desarrollo basado en componentes**. El primero tiene como metas identificar, construir, catalogar y diseminar un conjunto de componentes del software en un determinado dominio de aplicación —*cfr.* PRESSMAN [908] (p. 486); PRIETO-DÍAZ [1408]; BASILI, BRIAND y THOMAS [1409]—. El segundo cualificará, adaptará e integrará los componentes para su reutilización en un sistema nuevo (además de poder diseñar componentes nuevos para necesidades nuevas) —*cfr.* PRESSMAN [908] (p. 486).

Las componentes creadas en proyectos anteriores y las componentes comerciales al uso se almacenan en **repositorios** (*bibliotecas de componentes*, *diccionarios de datos*) —*cfr.* PRESSMAN [908] (p. 28 y § 12.7)—. Lo realmente importante es la organización estructural de tales repositorios, en pos de una navegación (búsqueda y recuperación de componentes) más eficiente. Según PRESSMAN [908] (p. 482)—, la descripción ideal de una componente del software abarca lo que TRACZ [1410] ha llamado el *Modelo 3C* —*concepto* (¿qué hace la componente?), *contenido* (¿cómo está construida la componente?) y *contexto* (¿cuál es el dominio de aplicación de la componente?)—. Pueden encontrarse descripciones detalladas de las bibliotecas de componentes y de las herramientas que las gestionan en el libro de HOOPER y CHESTER [1411] y en el artículo de LINTHICUM [1412].

Existen varios **protocolos estándares** para el software basado en componentes, entre ellos: SUN JavaBean[11], OMG/CORBA[12] o Microsoft COM[13]. En boga está el *proceso unificado de desarrollo de software* —*cfr.* JACOBSON, Booch y RUMBAUGH [1413]—, que representa varios modelos de desarrollo basados en componentes, propuestos en la industria. Proceso que usa el lenguaje UML (*lenguaje de modelado unificado*), para definir los componentes y sus interfaces de interconexión —*cfr.* BOOCH, RUMBAUGH y JACOBSON [1414]; PRESSMAN [908] (Caps. 21 y 22).

17.11.2 Cualificación y adaptación de componentes

Pero no todo consiste simplemente en consultar una biblioteca de componentes reutilizables y usar las que uno elija. La mera existencia de ellas no asegura su integración eficaz en la arquitectura diseñada para una nueva aplicación. Dos son las actividades de desarrollo que permiten certificar la habilitación de una componente: la cualificación de componentes y la adaptación de componentes, ambas previas, necesariamente a la última fase de composición o ensamblaje de componentes.

Muchos factores (o criterios) han de ser tenidos en cuenta durante la **cualificación de componentes**, por ejemplo —*cfr.* BROWN y WALLNAU [1415], *via* PRESSMAN [908] (p. 479):

- la interfaz de programación de aplicaciones (API);
- las herramientas de desarrollo e integración necesarias para la componente;
- requisitos de ejecución: utilización de recursos (*v. gr.* memoria o almacenamiento), tiempo o velocidad, protocolo de red, etc.;
- requisitos de servicio (interfaces del sistema operativo y soporte aportado por otras componentes);
- funciones de seguridad (controles de acceso y protocolo de autenticación);
- supuestos de diseño embebidos;
- manipulación de excepciones.

[11] `http://java.sun.com/beans`
[12] `http://www.omg.org`
[13] `http://www.microsoft.com/COM`

Una vez cualificados los componentes para su integración en una arquitectura de aplicación, pueden surgir conflictos de adaptación (*v. gr.* que existan actividades comunes). Se habla entonces de la necesidad de estudio de la **adaptación de componentes**. Una técnica popular de adaptación es conocida como «encubrimiento de componentes» —*cfr.* Brown y Wallnau [1415]—, siendo posible distinguir tres tipos de encubrimiento: de *caja blanca* (acceso total al diseño interno y al código de las componentes), *de caja gris* (la biblioteca de componentes proporciona un lenguaje de extensión de componentes o una API conveniente), y *de caja negra* (se requiere adaptación local forzada en la interfaz de componentes: preprocesamiento y postprocesamiento adecuados).

Las componentes del software no son los únicos elementos reutilizables. Pensemos en representaciones técnicas del software (especificaciones, arquitecturas, diseños, códigos), documentos, datos de prueba, tareas (por ejemplo, técnicas de inspección o validación), etc. —*cfr.* Pressman [908] (p. 486)—. Reflexiones similares a las anteriores deben hacerse respecto a estos otros elementos reutilizables.

17.11.3 Elección de componentes para su reutilización

La **elección de componentes para su reutilización**, puede abordarse como un problema de decisión multicriterio. Por ejemplo, Adolfo Lozano Tello y Asunción Gómez Pérez [1416] identifican cuatro criterios de decisión para elegir una componente del software, que ellos denominan *dimensiones*, junto a varios subcriterios, a los cuales denominan *factores*:

- *Tiempo de producción* (TP): tiempo de desarrollo del proyecto con la componente;
  - Tiempo de aprendizaje (TAp);
  - Tiempo de adaptación (TAd);
  - Tiempo de desarrollo (TD);
- *Tasación de costes* (TC): valoración del monto que debe invertir la organización debido a la utilización de la componente;
  - Precio de las licencias (PL);
  - Costes de adaptación (CA);
  - Costes de desarrollo (CD);
- *Calidad del producto final* (CP) si se usa la componente;
  - Eficacia (E);
  - Fiabilidad (Fi);
- *Riesgo asumido en el desarrollo* de no terminar con éxito el proyecto (RE), usando la componente;
  - Factibilidad (Fa);
  - Capacidad de reutilización (CR).

A su vez, consideran varios subsubcriterios (*características*, según sus palabras), tal y como muestra la Tabla 17.5.

Lozano Tello y Gómez Pérez [1417] (p. 464) consideran la **especialización** de estas *características genéricas* **en características específicas**. Cuatro ejemplos de características generales especializadas son las siguientes:

- Documentación asociada (DA)
  - Calidad de la documentación externa (TAd_{C1}).
  - Calidad de la documentación del código (TAd_{C2}).
- Metodología (ME)
  - Estandarización de variables (TAd_{C3}).
  - Claridad de los contratos de reutilización

	TP			**TC**			**CP**		**RE**	
	TAp	Tad	TD	PL	CA	CD	E	Fi	Fa	CR
DA	✓	✓								
Me	✓	✓						✓		✓
AAp	✓									
AAd		✓			✓					✓
AD			✓			✓				✓
Mo	✓	✓								
Cpl	✓	✓								
Vo	✓	✓								
SR		✓								
Int		✓								
Her		✓								
FAc			✓							
LAd				✓						
CMa				✓				✓		
CAc				✓						
Rec					✓	✓	✓			
RPr							✓			
ERe							✓			
Exp								✓	✓	
Mad								✓		
Conf								✓		
Cpt									✓	

Tabla 17.5: *Dimensiones, factores y características influyentes en la elección de componentes. El significado de los acrónimos de las características es el siguiente: DA⇌Documentación asociada, Me⇌Metodología, AAp⇌Ayuda al aprendizaje, AAd⇌Ayuda a la adaptación, AD⇌Ayuda al desarrollo, Mo⇌Modularidad, Cpl⇌Complejidad, Vo⇌Volumen, SR⇌Satisfacción de requerimientos, Int⇌Interoperatividad, Her⇌Herramientas asociadas, FAc⇌Facilidad de acceso, LAd⇌Licencias de adquisición, CMa⇌Cláusulas de mantenimiento, CAc⇌Costes de actualización, Rec⇌Recursos: humanos, de hardware y de software, RPr⇌Rapidez de proceso, ERe⇌Exactitud de respuesta, Exp⇌Explotación del componente, Mad⇌Madurez, Conf⇌Confianza, Cpt⇌Compatibilidad.*
—*Fuente:* Adaptado de Adolfo Lozano Tello y Asunción Gómez Pérez [1416].

- Ayuda a la adaptación (AAd)
  - Accesibilidad a los programadores desarrolladores de la componente
  - Disponibilidad de los programadores desarrolladores para solucionar dudas
- ...
- Interoperatividad
  - Conocimiento del lenguaje de programación del componente por el actual equipo de programación (TAd_{C14}).
  - Similitud con la versión del nuevo lenguaje de programación (TAd_{C15}).

A fin de cuentas, tenemos, por ejemplo, que:

$$DA = \mathsf{regular}/TAd_{C1} + \mathsf{mala}/TAd_{C2}$$

También hemos de considerar los siguientes conjuntos de índices ponderales:

- los asociados a cada factor, por ejemplo al tiempo de adaptación (TAd):

$$w^{TAd} = \{w^{TAd}_{C_1}, w^{TAd}_{C_2}, w^{TAd}_{C_3}, \ldots, w^{TAd}_{C_{15}}\}$$

  ponderando relativamente todas las características específicas asociadas a dicho factor;

- los asociados a cada dimensión, por ejemplo, al tiempo de producción (TP):

$$w^{TP} = \{w^{TP}_{TAp}, w^{TP}_{TAd}, w^{TP}_{TD}\}$$

ponderando relativamente el tiempo de aprendizaje (TAp), el de adaptación (TAd) y el de desarrollo (TD);

- y el asociado a la elección final:

$$w^{S} = \{w^{S}_{TP}, w^{S}_{TC}, w^{S}_{CP}, w^{S}_{RE}\}$$

ponderando relativamente el tiempo de producción (TP), la tasación de costes (TC), la calidad del producto final (CP) y el riesgo asumido en el desarrollo de no terminar con éxito el proyecto (RE).

De este modo, tenemos la matriz de elección que muestra la Tabla 17.6, donde como criterios aparecen las características específicas buscadas, y los índices ponderales asociados a ellas, se calcularán a partir de los conjuntos anteriores de índices ponderales.

Elección de componentes para su reutilización				
Componentes	**Criterios**			
Candidatas	...	Calidad de la documentación externa	Calidad de la documentación del código	...
Comp01	...	regular	mala	...
Comp02	...	regular	regular	...
...	...	...	...	...
Índices ponderales	...	...	...	...

Tabla 17.6: *Elección de componentes para su reutilización. Las características específicas son los criterios. Los índices ponderales se calculan a partir de los conjuntos relatados en el texto.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

17.11.4 La componente como agente en el desempeño de su tarea

Y es que eso es lo que realmente es. Un agente, una «persona o cosa que produce un efecto» (DRAE), porque, si no produjese ningún efecto (directa o indirectamente), ¿para qué se necesita la componente? Puede que la componente sea «conocida». Si ha sido sometida a depuraciones tras haberse presentado errores en su funcionamiento, debería disponerse de todo este historial. Esto es conocimiento a priori, que permitirá construir la distribución de probabilidad a priori sobre las hipótesis consideradas.

Por puro paralelismo con el ejemplo ilustrativo referente al grado de destreza de un trabajador en el desempeño de una tarea 15.3, dada una componente y una tarea, habría que definir lo que se entendiese por grado de destreza de la componente en cuanto a su contribución en el desempeño de la tarea. Algo menos complicado es suponer únicamente dos hipótesis o situaciones exhaustivas y mutuamente excluyentes, según la componente contribuya de manera adecuada o de manera inadecuada al desempeño de la tarea.

La evidencia nítida $e \in E$ está representada por alguna puntuación numérica que ha debido asignarse a la componente en referencia a su adecuación para el desempeño de una tarea determinada. Para ello pueden diseñarse una prueba basada en algunas o todas las características que citábamos en §17.11.3, de tal manera que, como resultado se asigne una puntuación a la componente en estudio. Los valores borrosos de la evidencia pueden ser los mismos que en los ejemplos ilustrativos anteriores: muy bajo, bajo, medio, alto y muy alto.

El problema es similar, sólo **cambian los actores**: dada una componente, a la que se le ha asignado una puntuación numérica nítida (por una prueba), en referencia a la evaluación de ciertas características que se demandan, relacionadas con el desempeño de una tarea, entonces, ha de decidirse si la contribución de la componente será o no adecuada al desempeño (durante una actividad normal y no en una prueba prediseñada).

17.12 Modelos de alumnos (*quater*)

«Prefiero ser un hombre de paradojas antes que un hombre de prejuicios.»
—Jean-Jacques Rousseau <Emilio>

En la sección §9.5 comentábamos el efecto negativo ligado a las investigaciones basadas en encuestas, conocido como «deseabilidad social» y propusimos como remedio advertir a los encuestados de su existencia.

Además de ello, podemos usar un diseño de panel. Transcurrido un *período de extinción* de un mes (como contrarresto a un posible *efecto de persistencia*[14] de la realización del primer cuestionario), los alumnos rellenan otra encuesta, esta vez la que aparece en el Anexo 2 (pág. 267), con la leyenda cambiada: «Os recuerdo: se trata de que valoréis según la medida en que penséis que creéis poseerlos»—. Tengamos en cuenta que en este formato las variables latentes ya no lo son, y se ha elevado el grado de abstracción.

Para cada especialidad, comparamos el perfil auto-perceptual obtenido a partir de las sumas parciales de la primera encuesta (ITIS_a o II_a), con el perfil auto-perceptual directamente proporcionado por esta segunda encuesta (ITIS_a^* o II_a^*).

No consideramos sobre-valoración para los perfiles ITIS_a^* e II_a^*. La comparación la realizamos en un sentido conjuntivo, de manera que si para una motivación profesional X, sus valores lingüísticos asociados son $e_L[X]$ y $e_L^*[X]$, entonces, optamos por que X tenga asociado el intervalo lingüístico:

$$[\underline{e_L[X]}, \overline{e_L[X]}] \tag{17.60}$$

donde:

$$\underline{e_L[X]} = \min\{e_L[X], e_L^*[X]\} \tag{17.61}$$

$$\overline{e_L[X]} = \max\{e_L[X], e_L^*[X]\} \tag{17.62}$$

De este modo, terminamos representado los perfiles auto-perceptuales mediante conjuntos Φ-borrosos de tipo 2, donde los extremos de los intervalos son subconjuntos borrosos ordinarios.

Si permitimos que el alumno dude (esto es, la imprecisión en la evidencia), es decir, que su respuesta a la segunda encuesta pueda ser un intervalo lingüístico $[\underline{e_L^*[X]}, \overline{e_L^*[X]}]$ (por ejemplo: «para mí, el prestigio es importante–muy importante»), entonces, los perfiles auto-perceptuales están representados por conjuntos Φ-borrosos de tipo 2, donde los extremos de los intervalos son subconjuntos borrosos ordinarios intervalares:

$$\left[\underline{e_L[X]}, \overline{e_L[X]}\right] \tag{17.63}$$

donde:

$$\underline{e_L[X]} = \min\{e_L[X], \underline{e_L^*[X]}\} \tag{17.64}$$

$$\overline{e_L[X]} = \max\{e_L[X], \overline{e_L^*[X]}\} \tag{17.65}$$

En todo caso, podemos aplicar el mecanismo expuesto en este capítulo.

Esta experiencia, junto a la continuación de lo dicho en §15.4 aún no se ha realizado. Al igual que lo planteado en §15.4, la finalidad de su inclusión en esta Tesis es meramente ilustrativa, para apreciar la actuación del mecanismo de inferencia que proponemos.

17.13 Una suposición casi indeclinable

«El lenguaje se inventó para que las personas pudieran ocultarse sus pensamientos unas a otras.»
—Charles-Maurice de Talleyrand, *via* Daniel Clement Dennett [151] (p. 143)

Cuando pienso que en las diferentes lenguas se empleaban frases indicadoras de incertidumbre, antes de que se formalizase la teoría de la probabilidad, ... Sin embargo, cuando esto último ocurrió, se hizo para números, que en realidad no se empleaban en el lenguaje de lo incierto. Pero, ¿por qué?, si además, casi todos pensaban que la única incertidumbre era la probabilista.

[14]Sobre el **efecto de persistencia** y el **período de extinción**, puede consultar el lector el libro de Orfelio G. León e Ignacio Montero [1065] (pp. 167-168).

Este posible efecto negativo producido por la realización de una encuesta sobre la realización de otra, en definitiva, debido a su orden de presentación, se conoce como *desequilibrio*. La técnica del **reequilibrado** (*counterbalancing*) propone hacer dos veces cada encuesta, primero en un orden y después en el otro. León y Montero [1065] (pp. 174ss.) citan el trabajo de Timothy V. Rasinski[1418], quien propone realizar **diseños intra-sujeto incompletos**, en particular, aplicar a la mitad de los individuos de la muestra un orden y a la otra mitad, el otro.

La historia de la Matemática se inicia con el recuento, que no con el «cuento» —*cfr.* «la conciencia del número» Boyer [1419] (cap. 1 *et passim*); Ifrah [1420] *passim*—. Lo urgente era representar matemáticamente los números y las operaciones que se intuían; lo concreto. Las palabras también se representaron, pero mediante una codificación no matemática. Con las palabras no se calculaba (o al menos eso se pensaba). Pero también existen operaciones entre palabras: cualquier relato, por ejemplo, es resultado de operar con palabras.

Lotfi Asker Zadeh y sus acólitos insisten en que usemos las palabras, en que calculemos con palabras.

Pero, utilizar frases en vez de números parece aumentar la confusión, aunque parezca lo contrario, aunque los interlocutores piensen que están entendiéndose —*cfr.* Brun y Teigen [1421]—. En algunos casos, sin embargo, las personas prefieren usar palabras: por ejemplo, David V. Budescu, Shalva Weinberg y Thomas S. Wallsten [1422] muestran cómo las personas, por lo general, prefieren utilizar palabras cuando razonan sobre ganancias, mientras que prefieren usar números cuando razonan sobre pérdidas.

La vaguedad no afecta por igual a todas las palabras. Podríamos medir esta afectación comparando cómo son interpretadas por diferentes personas. Hay palabras como «siempre» o «nunca», cuya interpretación es muy similar —David V. Budescu, Shalva Weinberg y Thomas S. Wallsten [1422] las denominan palabras «ancla» (*anchor*).

Por lo general, la variabilidad en la interpretación de una palabra o expresión por una persona es menor que la variabilidad que se genera al ser interpretada por varias personas —*cfr.* Druzdzel [1423]—. Aún más, Thomas S. Wallsten [1424] —citado por Druzdzel [1423]— muestra como para determinados contextos la variabilidad para una misma persona es prácticamente nula. Witold Pedrycz [449] (p. 68) comenta cómo las personas miembros de una misma comunidad tienden a estandarizar los calificativos que usan bajo la misma situación.

En cualquier caso, parece que **una suposición casi indeclinable** ha de ser el común acuerdo en la interpretación del lenguaje, en el significado de las palabras que usamos, y en el significado de los contextos donde las usamos.

Y, de todos modos, la estimación de las funciones de pertenencia puede hacerse «*off-line*» (es decir, en tiempo de preproceso).

Para que el lector se haga una pequeña idea de la variabilidad de expresiones que, de alguna u otra manera, se refieren a incertidumbre, reproducimos a continuación, dos listas de expresiones. Algunas describen directamente probabilidades, otras tienen un significado frecuentista —p. ej., *usually* (usualmente), *rare* (raro, poco común) *seldom* (rara vez)—, otras consideran alguna forma de utilidad —p. ej., *best bet* (la mejor apuesta)—, etc.

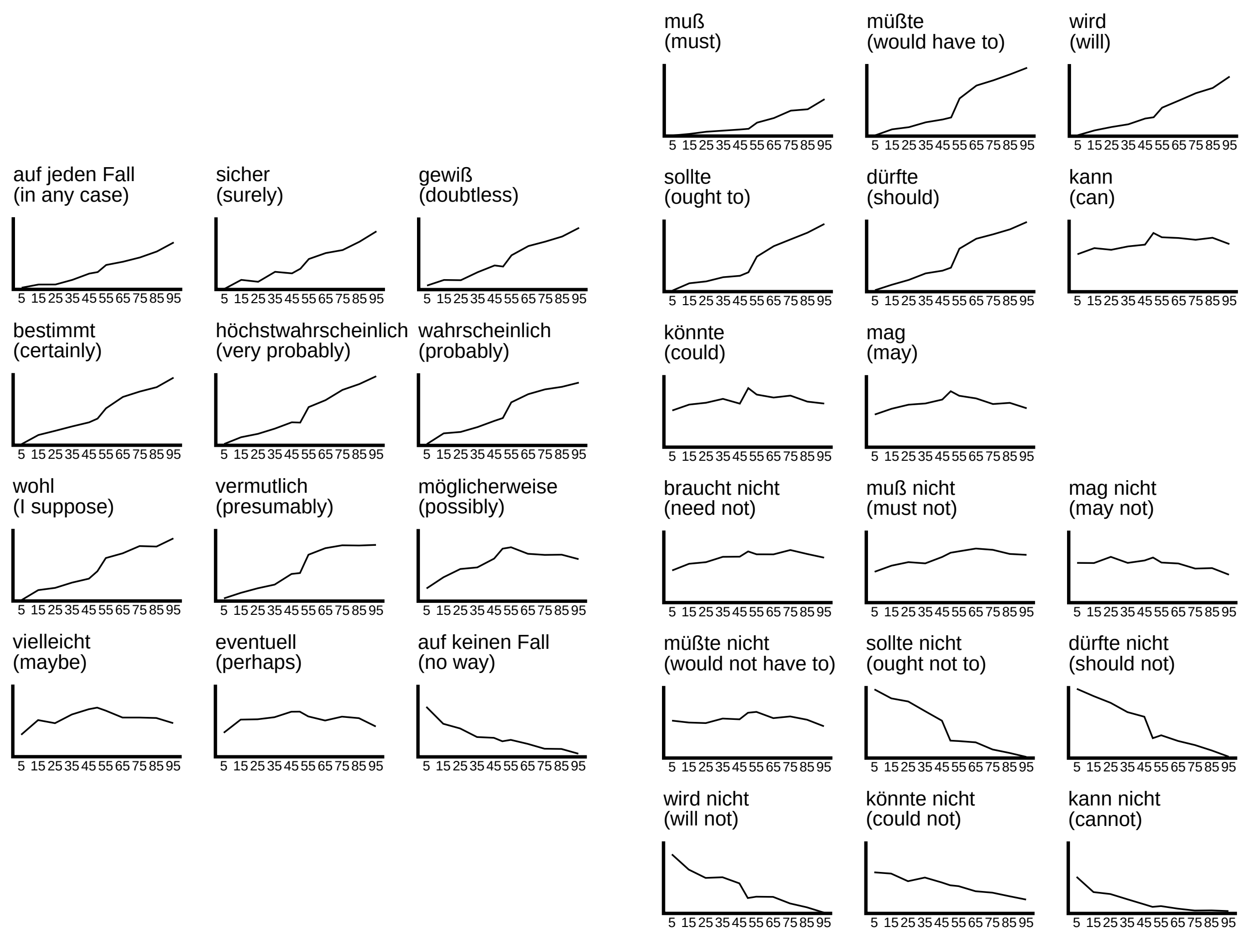
La primera lista ha sido confeccionada por Bernhard Kipper y Anthony Jameson [1425], y está compuesta por dos sublistas, una de 12 frases adverbiales y la otra de 17 formas verbales modales —*cfr.* Tabla 17.7.

No dudamos de que debemos preguntar a nuestros congéneres, para intentar alcanzar un consenso. Ya se han realizado estudios a este respecto, fundamentalmente, en el campo de las ciencias cognitivas. Por ejemplo, Bernhard Kipper y Anthony Jameson han construido, a partir de encuestas, funciones de pertenencia para expresiones adverbiales y formas verbales modales —*cfr.* Tabla 17.7—. Para ello, comentaban a los encuestados que se pusieran en la situación de estar ante un juego de ruleta y que supusiesen que ganarían el juego, que este hecho era la verdad. Lo que tenían que hacer era, para cada expresión adverbial y cada forma verbal modal, asignar el grado de creencia que pensaban ellos que era con el que una frase construida con la expresión o la forma verbal, representaba la verdad del hecho anterior. El experimento se hizo en alemán. En la traducción al inglés que proponen los autores, la frase donde tenían que sustituir cada expresión adverbial era «*I .... won*» y la frase en la que debían sustituir cada forma verbal modal era «*It .... be the case that I won*». Como podemos apreciar, las gráficas se corresponden con nuestra intuición.

La segunda lista, compuesta por 178 expresiones, recogidas por Marek J. Druzdzel [1423] —*cfr.* pág. 453.

Expresiones adverbiales		**Formas verbales modales**		
in any case	*I suppose*	*must*	*could*	*ought not to*
en cualquier caso	supongo	debe, tiene que	podía, pudo	no se debería (debiera)
surely	*presumably*	*would have to*	*may*	*should not*
seguramente	presumiblemente	tendría que	puede	no debería (debiera o debiese)
doubtless	*possibly*	*will*	*need not*	*will not*
sin duda	posiblemente	sí (en el futuro)	no es necesario	no (en el futuro)
certainly	*maybe*	*ought to*	*must not*	*could not*
ciertamente	quizás	debería, debiera o debiese	no debe, no tiene que	no podía, no pudo
very probably	*perhaps*	*should*	*may not*	*cannot*
muy probablemente	quizás	debería, debiera o debiese	no puede	no puede
probably	*no way*	*can*	*would not have to*	
probablemente	de ningún modo	puede	no tendría que	

Tabla 17.7: *Listas de frases adverbiales y formas verbales modales empleadas con frecuencia en expresiones que indican incertidumbre.*
—*Fuente:* Bernhard KIPPER y Anthony JAMESON [1425].



Gráficas de pertenencia correspondientes a las frases adverbiales y formas verbales modales anteriores.
—*Fuente:* Bernhard KIPPER y Anthony JAMESON [1425].

Apéndice: Frases indicadoras de incertidumbre

Marek J. DRUZDZEL [1423] lista las siguientes 178 frases indicadoras de incertidumbre. Agradecemos a nuestro compañero y amigo, el Dr. Arthur Richard PEWSEY su inestimable y más que generosa ayuda para su traducción.

a reasonable hope (una esperanza razonable)
a very real possibility (una posibilidad muy real)
according to chance (dejado al azar)
almost always (casi siempre)
almost certain (casi cierto)
almost impossible (casi imposible)
almost never (casi nunca)
always (siempre)
as likely as not (igual de probable)
barely possible (apenas posible)
best bet (la mejor apuesta)
better than even (más probable que no)
can't rule out entirely (no completamente imposible)
cannot be excluded (no puede ser excluido)
certain (cierto)
chance association (asociación aleatoria)
chances are (es posible que)
chances are not great (las posibilidades no son grandes)
characteristically (característicamente)
classic (clásico)
close to certain (casi cierto)
common (común)
commonly (comúnmente)
compatible with (compatible con)
conceivable (concebible)
consistent with (consistente con)
consistently (consistentemente)
definite (determinado)
definitely (sin lugar a dudas)
definitely not (decididamente no)
doubtful (dudoso)
effectively excludes (excluye efectivamente)
equally likely (igual de verosímil)
even odds (igual de probable)
exceptionally (excepcionalmente)
expected (esperado)
extremely likely (sumamente probable (o verosímil))
extremely unlikely (sumamente improbable)
faintly possible (ligeramente posible)
fair chance (bastante probable)
fairly likely (bastante verosímil))
fairly unlikely (bastante inverosímil)
feasible (factible)
few (poco)
fighting chance (buena posibilidad)
frequent (frecuente)
frequently (frecuentemente, con frecuencia, a menudo)
good chance (buena posibilidad)
good hope (buena esperanza)
great chances (grandes posibilidades)
half the time (la mitad de las veces)
high chance (probabilidad alta)
high probability (probabilidad alta)
highly improbable (altamente improbable)
highly probable (altamente probable)
highly unlikely (altamente inverosímil)
hopefully (con suerte, con optimismo, con esperanza)
impossible (imposible)
improbable (improbable)
inconceivable (inconcebible)
inconclusive (inconcluso)
indeed (efectivamente)
indefinite (indefinido)
infrequently (infrecuentemente)
it could be (podría ser)
it may (puede)
it seems (parece)
it seems to me (me parece)
less than even (ligeramente en contra)
less than half the time (menos de la mitad del tiempo)
likely (verosímil o probable)
low chance (probabilidad baja)
low probability (probabilidad baja)
many (muchos)
may (puede)
meaningful chance (probabilidad considerable)
moderate probability (probabilidad moderada)
moderate risk (riesgo moderado)
more often than not (la mayoría de las veces)
most likely (lo más verosímil (o probable))
nearly certain (casi cierto)
necessary (necesario)
never (nunca)
non-negligible chance (posibilidad nada despreciable)
normally (normalmente)
not certain (incierto)
not conceivable (no concebible)
not definite (no determinado)
not feasible (no factible)
not improbable (no improbable)
not inevitable (no inevitable)
not infrequently (no infrecuentemente)
not likely (no verosímil)
not much chance (no mucha probabilidad)
not necessary (no necesario)
not possible (no posible)
not probable (no probable)
not quite even (no del todo iguales)
not unreasonable (no irrazonable)
not very likely (no muy verosímil)

not very probable (no muy probable)
ocassionally (ocasionalmente)
odds on (lo más probable)
often (a menudo)
on occasion (con ocasión de)
on the contrary (por el contrario)
one can expect (puede esperarse)
one must consider (debe considerarse)
one should assume (debería suponerse)
pathognomonic (patognomómico)
perhaps (quizás)
periodically (periódicamente)
poor chance (probabilidad pobre, escasa)
positive (positivo)
possible (posible)
possibly (posiblemente)
practically all (prácticamente todos)
practically none (prácticamente ninguno)
predictable (predecible)
pretty good chance (probabilidad bastante buena)
probable (probable)
quite likely (bastante verosímil o probable)
quite possible (bastante posible)
quite probable (bastante probable)
quite unlikely (bastante inverosímil)
rare (raro)
rarely (raramente)
rather improbable (un poco improbable)
rather likely (un poco verosímil o probable)
rather probable (algo probable)
rather unlikely (un poco inverosímil o improbable)
reasonable chance (probabilidad razonable)
reasonable to assume (razonable suponer)
reasonably likely (razonablemente verosímil o probable)
remote possibility (posibilidad remota)
seldom (rara vez, pocas veces, casi nunca)
several (varios, varias)
significant chance (probabilidad significativa)
slight chance (pequeña probabilidad)
slight odds against (una ligera probabilidad en contra)
slight odds in favor (una ligera probabilidad a favor)
slightly less than half the time (poco menos de la mitad del tiempo)
slightly more than half the time (poco más de la mitad del tiempo)
small chances (pocas probabilidades)
small doubt (pequeña duda)
some chance (alguna posibilidad u oportunidad))
sometimes (a veces)
somewhat likely (algo verosímil o probable)
somewhat unlikely (algo inverosímil o improbable)
suggests (sugiere)
supports (soporta, sostiene)
suppose (supone)
sure (seguro)
there is a chance (hay una posibilidad)
think (pensar)
toss-up (echar cara o cruz, sortear)
typically associated (típicamente asociado)
uncertain (incierto)
uncommon (infrecuente, insólito)
unfeasible (inviable, no factible)
unlikely (inverosímilmente o improbablemente)
unnecessary (innecesario)
unpredictable (impredecible)
usually (generalmente)
usually not (generalmente no)
very good chances (muy buenas probabilidades)
very high chance (probabilidad muy alta)
very improbable (muy improbable)
very likely (muy verosímil o probable)
very low chance (probabilidad muy baja)
very often (muy a menudo, muchísimas veces)
very poor chance (probabilidad muy pobre)
very possible (muy posible)
very probable (muy probable)
very probably (muy probablemente)
very unlikely (muy inverosímil o improbable)
virtually always (prácticamente siempre)

17.14 Síntesis reflexiva

«Nos veríamos tentados a decir:
"Sólo fueron palabras",
pero en los momentos importantes de la historia,
las palabras son actos.»
—Clement Attlee <Discurso> (a propósito de los discursos de guerra de Winston Churchill)

Pensemos en la **expresión de una calificación**. Habitualmente, usamos una escala numérica o una escala de palabras, dependiendo fundamentalmente de la medida en que consideremos cuantitativa o cualitativa la propiedad calificada. El uso de estas escalas puede ser simple, usando **números** o **palabras**, o compuesto, usando **intervalos de números** o **intervalos de palabras**. Asimismo, podríamos pensar en utilizar intervalos de tipo n.

Cuando expresamos una calificación con un número, pecamos de esa exactitud rigurosa, de esa precisión en los datos, que sólo Dios posee. Lo mismo sucede con respecto a los intervalos de tipo $n > 2$. Cualquiera de las otras soluciones parece *más* humana. La naturaleza de estos datos es responsable de su imprecisión. Podemos suponer la existencia de un valor numérico exacto ideal, para ser asignado al valor observado que, debido a ciertas limitaciones, no podemos medir con exactitud.

En §17.2 hemos propuesto los conceptos de **asignación lingüística de probabilidad** y de **cuasi-probabilidad lingüística**, ésta última subaditiva por definición. Suponiendo que las palabras que usemos para representar la probabilidad sean números borrosos, en §17.3 hemos definido la noción de **probabilidad lingüística**, ya aditiva, y hemos estudiado en §17.4, el número de distribuciones de probabilidad lingüística para n palabras dadas.

Es de recibo, la dificultad que entraña la dependencia de la **riqueza expresiva** del lenguaje y en particular del conjunto de términos lingüísticos utilizados. Pero esto no es nuevo; es el problema presente en el programa inductivista de Rudolf Carnap [1426], donde usaba lenguajes que sólo incluían predicados monarios. Como relatan José A. Díez y C. Ulises Moulines [656] (p. 414), fueron dos propuestas de solución las que Carnap aportó: primero, un requisito de completud expresiva según la cual el lenguaje debe contener todos los predicados necesarios para poder expresar todos los atributos de los individuos del universo de discurso [1426] (p. 75); y segundo, un requisito de no variabilidad, ante la inclusión de nuevos predicados, de la medida, relación o grado en que una evidencia confirma inductivamente (o apoya evidencialmente, o justifica inductivamente) una hipótesis —*cfr.* Carnap [1427] (p. 975). No obstante, este último requisito no lo satisface ni el sistema original de 1950, ni el de 1952 [1428], ni los posteriores. En común acuerdo con José A. Díez y C. Ulises Moulines [656] (p. 414), parece que el requisito a exigir sería el primero, el de disponer de un lenguaje expresivamente completo. Si bien ellos argumentan una dificultad «de principio»: «quien determina qué propiedades hay en el universo de discurso susceptibles de ejemplificarse en los individuos son las propias teorías científicas. Por lo tanto, la determinación de cuál es el *lenguaje expresivamente completo* es relativa a una teoría o familia de ellas.».

Prosiguiendo nuestras andanzas emprendidas en los dos capítulos inmediatamente anteriores, estudiamos, en §17.5, la propagación bayesiana borrosa de **imprecisión borrosa en la evidencia**, extendiendo al caso de palabras el método que en el capítulo anterior habíamos elaborado para intervalos —*cfr.* §16.5—. A renglón seguido, y en §17.6 añadimos el supuesto de trabajar con una **a priori borrosa** y con **verosimilitudes borrosas**. En §17.7, proponemos, para cada individuo, convertir su perfil descriptor dado por intervalos de extremos distribuciones de probabilidad, en un perfil descriptor donde no intervengan probabilidades, en realidad, en un perfil descriptor Φ-borroso de tipo 2, donde los extremos de los intervalos son subconjuntos borrosos ordinarios. Para llevar a cabo ésto, necesitamos saber medir la distancia o divergencia entre distribuciones de probabilidad. Podemos hacerlo, directamente, esto es, a partir de las disimilitudes locales entre valores de las funciones de distribución, o indirectamente, a partir de medidas locales entre valores de sus funciones de densidad asociadas. En cualquier caso, destacamos la necesidad de utilizar **divergencias ponderadas entre distribuciones de probabilidad**.

La estructura de preferencia que se obtiene al comparar con el ideal no tiene por qué ser la misma que la que se obtiene al comparar con el anti-ideal. En §17.8 extendemos la solución que sugiere el método TOPSIS, la *razón de similitud a la solución ideal* —*cfr.* Ec. 10.6—. Proponemos el uso de la que definimos y denominamos **razón de convergencia a la distribución ideal de probabilidades**.

A modo de ejemplos ilustrativos, hemos hablado de la **inferencia del grado de molestia en la población causado por exposición al ruido**, de la **alteración del rendimiento humano** por la misma causa, de la **elección de componentes software reutilizables**, y de nuevo, de los **modelos de alumnos**.

Lo que parece claro es que, para trabajar con palabras, debe haber entre los interlocutores un **consenso**, un común acuerdo en la interpretación del lenguaje, en el significado de las palabras que usamos, y en el significado de los contextos donde las usamos.

18

Desenlace

«En cierta ocasión, sostuvo Shuzan (926-992 d.C.) su bastón de bambú en alto ante sus discípulos, que se hallaban reunidos, y se dirigió a ellos de la siguiente manera: "Decid de esto que es un bastón; afirmaréis. Decid que no es un bastón; negaréis. Ahora bien, sin afirmar ni negar, ¿qué diríais? ¡Hablad! ¡Hablad!". Se levantó uno de los discípulos, le quitó al maestro el bastón y, rompiéndolo en dos, exclamó: "¿Qué es esto?"»
—Daisetz Teitaro SUZUKI <An introduction to Zehn Buddhism>, *via* Bart KOSKO [58] (p. 31)

Como decía Charles F. KETTERING: «cuando se la encuentra, la respuesta es sencilla». No esperes lector conclusiones definitivas ni afirmaciones categóricas del tipo «el presente estudio ha alcanzado los objetivos metodológicos y teóricos que planteaba». Nosotros no estamos seguros de que hayamos encontrado respuestas, sólo lo creemos, aunque con lo que sin duda nos hemos topado es con una multitud de preguntas. Aún más, ignoramos si mucho de lo que hemos encontrado son respuestas, porque desconocemos las preguntas.

18.1 La pérdida de la incertidumbre

«Las proposiciones prescriptivas pueden ser o verdaderas o falsas, ya que son o verdaderas o falsas (ab esse ad posse valet consequentia); son o verdaderas, o falsas, ya que son verdaderas (una disyunción es verdadera si es verdadero uno de sus términos); son verdaderas, ya que son necesariamente verdaderas (a necesse ad esse valet consequentia). [...] Las proposiciones prescriptivas pueden ser o verdaderas o falsas; es más, son o verdaderas, o falsas; es más, son verdaderas; es más, son necesariamente verdaderas.»
—Amedeo G. CONTE, *via* Carlos ALARCÓN CABRERA [273] (p. 65)

Sean $\mathcal{U}$ un universo de discurso no vacío y C un subconjunto borroso ordinario de $\mathcal{U}$. La definición de C se basa en la veracidad (valor de verdad 1) del predicado:

$$(\forall u \in \mathcal{U})(\exists \gamma \in [0,1])(q(C,u,\gamma)) \tag{18.1}$$

siendo:

$$q(C,u,\gamma) \equiv C(u) = \gamma \tag{18.2}$$

proposición que leemos: «el grado de pertenencia de u al conjunto C es *exactamente* γ» y cuya veracidad, dados C, u y γ, también suponemos. Dicho de otro modo:

«*estamos seguros* (creemos firmemente) que γ es el valor *exacto* del grado de pertenencia de u al conjunto C».

Es más, «*estamos seguros* de que $\forall u \in \mathcal{U}$, $\exists \gamma \in [0,1]$, de tal manera que *estamos seguros* (creemos firmemente) que γ es el valor *exacto* del grado de pertenencia de u al conjunto C».

Y aquí, ¿dónde está la incertidumbre?

En el valor de γ, dado u. Sabemos que, dado u, existe γ, pero, ni siquiera sabemos si podemos encontrar el valor de γ.

18.2 Nuestra creencia en la verdad: una verdad y la verdad

«De las cosas que no sabemos, algunas las creemos por el testimonio de otros; es lo que denominamos "fe". Hay otras sobre las que no emitimos un juicio, ni antes ni después de estudiarlas; es lo que denominamos "duda"; y cuando en la duda nos inclinamos más hacia un lado que hacia otro, aunque sin determinar nada de modo absoluto, eso se denomina "opinión".»
—Jacobo B. BOSSUET, <Del conocimiento de Dios y de sí mismo>, *via* Gilbert SINOUÉ [152] (p. 249)

El origen de la incertidumbre es la ignorancia. En lógica bivalente, el valor de verdad de una fórmula bien formada (fbf), $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, está determinado dada una asignación de verdad (una valoración de verdad para todas las variables x_i). Caso contrario, proponemos hablar de **creencia**.

En ausencia total de información, nuestra creencia en un literal[1] es $1/2$, puesto que existen dos asignaciones posibles de verdad: 0 y 1. Sean p y q dos literales, tales que $p \neq q$ y $p \neq \neg q$. Si pensamos en $p \wedge q$, es $1/4$, puesto que existen cuatro asignaciones posibles de verdad y sólo una es 1. En el caso de $p \vee q$, es $3/4$, pues de las cuatro asignaciones posibles de verdad, tres hacen verdadera $p \vee q$. Nuestra creencia en $p \rightarrow p \vee q$ es la total seguridad, pues de las cuatro posibles asignaciones de verdad, las cuatro la hacen verdadera.

Un teorema clásico de Lógica de Enunciados asegura que toda fbf puede transformarse en una fbf equivalente en forma normal conjuntiva (FNC), esto es, una conjunción de cláusulas, donde cada cláusula es una disjunción de literales, y cada literal es una variable atómica o su negación:

$$\begin{aligned}\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n \\ &= (l_{1,1} \vee l_{1,2} \vee \ldots \vee l_{1,k_1}) \wedge \ldots \wedge (l_{n,1} \vee l_{n,2} \vee \ldots \vee l_{n,k_n})\end{aligned}$$

Abreviadamente:

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{k_i} l_{i,j}$$

ocurriendo que $(\forall i)(\forall j)(\exists k)(l_{i,j} = x_k \vee l_{i,j} = \neg x_k)$.

Por ello, careciendo de cualquier información, la creencia en $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es:

$$1 - \frac{2^{a_1} + 2^{a_1+a_2+1} + 2^{a_1+a_2+a_3+2} + \ldots + 2^{a_1+a_2+\ldots+a_n+n-1} - 1}{2^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}$$

siendo:

$$\begin{cases} a_1 = k_1 \\ a_{i+1} = k_{i+1} - k_i - 1 \quad (1 \leq i < n) \end{cases}$$

¿Recuerda el lector el ejemplo del barbero que afeita únicamente a aquéllos que no se afeitan a sí mismos, en la pág. 80? Todo cobra sentido si V es una valoración de creencia, en vez de una valoración de verdad. Sea $S \equiv$«El barbero se afeita a sí mismo». El valor de verdad de esta proposición es 0 ó 1. Carecemos por completo de información, pues la circularidad: $S \Rightarrow \neg S \Rightarrow S$, y el hecho de ver al barbero afeitado, no aportan información alguna; por ello, nuestra creencia en su ocurrencia se reparte por igual entre S y $\neg S$:

$$\begin{aligned}V(S) &= V(\neg S) \\ &= 1/2\end{aligned}$$

18.3 Grado de pertenencia y creencia en la pertenencia: ¿una «nueva» teoría de conjuntos borrosos?

«Existe entre los seres humanos una tendencia real a que el grado de creencia se aproxime a la certidumbre. La duda y el escepticismo son algo inusual para la mayoría de la gente y, en mi opinión, constituyen estados inestables de la mente.»
—Robert H. THOULES [1429], *via* Bart KOSKO [59] (p. 43)

[1] Una fórmula bien formada (fbf) λ es un *literal*, precisamente si λ es una proposición atómica, o $\lambda \equiv \neg p$, siendo p una proposición atómica. Una fbf es una $\wedge$-*cláusula* (*cubo*), precisamente si es un literal o una conjunción de literales. Una fbf es una $\vee$-*cláusula*, precisamente si es un literal o una disyunción de literales. Una fbf está en **forma normal conjuntiva** (FNC), precisamente si es tautología, contradicción, una $\vee$-cláusula o una conjunción de $\vee$-cláusulas. Una fbf está en **forma normal disyuntiva** (FND), precisamente si es tautología, contradicción, una $\wedge$-cláusula o una disyunción de $\wedge$-cláusulas.

Nuestra creencia es que la verdad no es auto-graduable, sino que la creencia es un medio del que dispone un observador para apreciar la verdad como graduada. Somos protagonistas, queramos o no.

Recordemos que leemos (18.2):

«(creemos firmemente que) el grado de pertenencia de u al conjunto C es *exactamente* γ»

Tal y como lo leemos, se trataría de un grado objetivo de pertenencia. Pero en realidad, en la práctica, no lo es. En tantos y tantos problemas que elegimos o construimos una función de pertenencia, lo hacemos subjetivamente.

En ese momento, ¿qué es «grado de pertenencia» sino «creencia en la pertenencia»?

En estos casos, la lectura anterior, realmente, es:

«nuestra *creencia* en la veracidad de la proposición "u pertenece al conjunto C", es *exactamente* γ»

O sea, debemos hablar de nuestra creencia en que 1, y no 0, sea el valor de $\chi_C(u)$.

Cuando decimos que el grado de pertenencia de 6.9 a siete es 0.85, queremos decir que podemos *tasar* en un 85 por ciento nuestra creencia en la veracidad de la afirmación «6.9 es siete», que si tenemos una balanza de dos platos, en uno ponemos 85 unidades de sí, y en otro 15 unidades de no.

Otros temas, como discutiremos en los apartados siguientes son: que el cardinal de estos montones nos venga dado por nuestra experiencia (frecuencia de uso y contextos de utilización) o por nuestra intuición, y que representen proporciones (esto es, que su suma sea algo que represente para nosotros una unidad). Ambas cuestiones pertenecen a la Psicología Cognitiva, y las cosas son así, porque hablamos de seres humanos; pero en ningún caso son extrañas a la teoría, puesto que, repetimos, el usuario de la teoría es el ser humano, aunque exista la intermediación de máquinas.

El que está seguro, es que cree; el que cree, puede no estar seguro. La creencia subsume la seguridad. La TCB clásica, segura, es un caso particular de esta «nueva» TCB.

18.4 El porqué de las comillas en «nueva»

«Nan-in, maestro japonés que vivió en la era Meijí (1868-1912), recibió a un profesor universitario que había acudido a informarse sobre el Zen. Nan-in sirvió el té. Llenó la taza de su visitante, y siguió vertiendo. El profesor se quedó mirando el líquido derramarse, hasta que no pudo contenerse:
–Está colmada. ¡Ya no cabe más!
–Como esta taza –dijo Nan-in– está usted lleno de sus propias opiniones y especulaciones. ¿Cómo puedo mostrarle el Zen a menos que vacíe su taza antes?»
—Nyogen SENZAKI y Paul REPS [1430] (p. 19)

El probabilista avezado acaba de reconocer en la anterior, la probabilidad lógica, tan arduamente defendida, entre tantos otros, por Edwin Thompson JAYNES [40]. Básicamente, una probabilidad se interpreta de dos modos —*cfr. v. gr.* JAYNES [40]; GIGERENZER [1431]—. Los clásicos[2] entienden la probabilidad de un suceso como su frecuencia relativa de aparición en la repetición sin fin del mismo experimento. Si se busca la precisión

[2]Faltaba un mínimo de historia de la probabilidad en la presente Tesis. No obstante, lo que sigue se refiere a los orígenes de su interpretación clásica. El *Liber de Ludo Aleae* de Girolamo CARDANO (1501-1576), publicado en 1663 —aunque, seguramente, completado por 1563—, es el primer libro sobre juegos de azar, en el que ya trata sobre los conceptos de juego justo y de regularidad estadística. GALILEO Galilei (1564-1642), en su *Sopra le Scoperte dei Dadi*, publicada en 1718, también trató los juegos de azar, parece ser que sin conocer las aportaciones de CARDANO. Ambos definen la probabilidad de un evento E como la proporción de resultados (equiprobables) favorables a E con respecto al número total de resultados posibles. Además, relacionaron los juegos de azar con problemas combinatorios. Por su parte, GALILEO, también utilizó argumentos probabilísticos para estudiar los errores en las observaciones astronómicas.

A los mercaderes de los siglos XV y XVI, como tema fundamental en sus relaciones comerciales, les preocupaban los problemas sobre repartos equitativos. Uno de ellos, el conocido como problema de los puntos, aparece en la *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*, de Fra LUCA DAL BORGO (Pacioli) (1445-1517), publicada en 1494: «A y B participan en un juego de «balla» (quizás algún juego de pelota). El juego termina cuando alguien gane 6 rondas. Pero el juego ha sido suspendido. A lleva ganadas 5 rondas y B, tres. ¿Cómo ha de distribuirse la apuesta?»

Los primeros en proporcionar una solución probabilística fueron Pierre de FERMAT (1601-1665), en 1654, cuyo método se supone que figuraba en una carta, extraviada, dirigida a Blaise PASCAL (1623-1662), quien aportó una solución basada en el conocido como triángulo de Pascal —aunque era muy anterior a él—, estudiado en su *Treatise on the Arithmetical Triangle* (1653). Las soluciones anteriores proporcionadas por Fra Luca dal Borgo, en su *Summa Arithmetica, Geometria, Proportioni*, y por Niccolo FONTANA (Tartaglia) (1499-1557), en su *Trattato Generale di Numeri e Misuri*, publicado en 1556, tuvieron más que ver con aritmética combinatoria que con probabilidad.

absoluta, esto presenta un primer inconveniente: el cambio (aunque sea infinitesimal) de las condiciones experimentales. Un segundo inconveniente reside en la imposibilidad de repetir infinitas veces el mismo experimento. Ambos son salvables con una teoría del error.

La interpretación como probabilidad de caso único, como probabilidad lógica, según la denomina JAYNES [40], se refiere a la creencia del observador en la ocurrencia futura de un determinado suceso, o a la veracidad de una hipótesis en un momento dado. JAYNES [40] expresa con la ecuación:

$$p(\mathsf{nubes}|\mathsf{sonido}) \simeq 1 \tag{18.3}$$

nuestra «inferencia de la probable (*likely*) existencia de nubes sobre nuestras cabezas», a partir de que escuchamos caer gotas.

La probabilidad lógica subsume así el concepto clásico de borroso. Pensar que $q(C, u, \gamma)$ significa: «*creemos* en un 100γ por ciento que u pertenece al conjunto C», es asignar el valor γ de probabilidad lógica a la hipótesis $u \in C$. Una función de pertenencia es una probabilidad lógica no necesariamente aditiva.

En el caso aditivo, el análisis bayesiano, ejemplo de análisis probabilístico lógico, es un proceso explícito de actualización de nuestras creencias en unas hipótesis determinadas. Considera la probabilidad lógica, esto es, define la probabilidad de una hipótesis como la creencia (grado de creencia, confianza) de un observador en la veracidad de una hipótesis, plantea y responde la cuestión: «Este observador, dadas sus creencias previas en estas hipótesis, ¿cómo revisa su asignación de probabilidades, una vez que dispone de nueva información sobre ellas?»

Ahora bien, el hecho de que una función de pertenencia, y en definitiva, un conjunto borroso, no sea más que una probabilidad lógica no necesariamente aditiva, no resta importancia a la TCB, porque, hablando llanamente ¿quiénes se han preocupado de estudiar las probabilidades (lógicas o no), no necesariamente aditivas o, en general, las medidas (no necesariamente de incertidumbre) no necesariamente aditivas?

Como asegura Damjan ŠKULJ [1432], el interés por el estudio de las medidas no aditivas es reciente en matemáticas. Sin embargo, ahí está todo lo que se ha desarrollado, y desarrolla continuamente, en la **Teoría de Conjuntos Borrosos**, que con otro nombre, no es más que la **Teoría de Probabilidades Lógicas No Necesariamente Aditivas**.

¡Ay!, casi me olvido, querido lector, de los **ensembles flous** propuestos por Karl MENGER en 1951 —traducidos al inglés por ***hazy sets***[3] y sus elementos por ***cloud-like points*** (puntos con forma de nube)— [1433]. MENGER sustituye la relación de pertenencia de un elemento a un conjunto por la probabilidad de que un elemento pertenezca a un conjunto.

18.5 Acerca de las «imposturas»

¿Y las «**imposturas**» de las que hablábamos en la postdata de mi carta a tí; esos deslices a posta? Allí recogíamos algunas. En esta sección hemos «sacado a la luz» todo su espíritu, aunque no toda su letra. Y no vamos a enseñar la letra de todas. Basten una tríada de ejemplos más.

Así, con respecto al ejemplo de James BEZDEK —*cfr.* pág. 79)—, tasamos en un 91 por ciento nuestra creencia en la afirmación «el líquido contenido en B_1 es potable», es decir, utilizamos una probabilidad lógica, no necesariamente aditiva. Lo que ocurre con ese ejemplo es que BEZDEK compara esta última con la probabilidad clásica.

En la pág. 24, aparece la idea de «cuanto con existencia graduada», en concreto, decimos: «Creo más en la idea anterior que en la probabilística; creo más en un cuanto con existencia graduada, o mejor dicho, por graduar (por parte del observador).» Esto que digo no ser probabilidad, lo es: el grado de mi creencia en su existencia es el grado de su existencia. Según yo; otro observador, *sentirá* otro grado. El cuanto existe o no, independientemente de nosotros, porque a lo único que nos limitamos nosotros es a opinar sobre su existencia, a creer en mayor o menor grado, en ella.

En la pág. 26, hay un párrafo en el que hablo sobre si mis hijas Marina y Sara serán o no personas altas, y si mi amiga Cristina, que ya no va a crecer más, lo es o no, y argumento que en la primera cuestión *puede*

A Christiaan HUYGENS (1629-1695) se debe el concepto de esperanza matemática. En *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, publicado en 1657, resuelve, de manera independiente, el problema de los puntos. Pierre Simon de LAPLACE (1749-1827), a quien muchos atribuyen la noción clásica de probabilidad, se limitó a divulgarla en su *Théorie Analitique des Probabilités*, publicada en 1812, —que fue rechazada inicialmente, por no ser muy comprensible— y en su *Essai Philosophique des Probabilités.*

[3] **hazy** (Fuente: The Collins Concise Spanish Dictionary © 2002 HarperCollins Publishers)
1 [*sunshine, morning*] (*due to mist*) brumoso; neblinoso; (*due to heat*) calinoso.
2 [*notion, details*] confuso; [*memory*] vago; confuso; [*idea*] poco claro; confuso.
3 [*outline, vision*] borroso; [*photograph*] nublado.

intervenir el azar, mientras que en la segunda, *ya* no, por lo que podremos hablar de la probabilidad de que mis hijas sean personas altas, mientras que carece de sentido hablar de la probabilidad de que Cristina sea una persona alta, sino que mejor habría que preguntarse si Cristina es una persona alta, o sea si pertenece al conjunto de las personas altas, y en qué grado. Aquí se han deslizado dos confusiones: la una, la de que la probabilidad supone azar, y la otra, la de no admitir la probabilidad de caso único, mi grado de creencia en la afirmación «Cristina es alta».

18.6 La teoría de la posibilidad

«Lo que no está totalmente acabado no existe aún. Lo que no está acabado ha avanzado menos que lo que no ha comenzado.»
—Paul VALÉRY <Misceláneas>

No creemos válida la apoyatura que muchos encuentran en la distinción entre imprecisión e incertidumbre, en la distinción entre el valor de un atributo de un objeto y la confianza en ese valor, como la diferencia esencial entre lo borroso y lo probable, como el fundamento último de la génesis de la teoría de la posibilidad —según ellos, una teoría de la imprecisión, representada por conjuntos borrosos, y una teoría de la incertidumbre, descrita por un par de grados: el grado de posibilidad de un suceso y el de su contrario—. Resulta que cuando estos grados de posibilidad son bivalentes, el cálculo de posibilidades es idéntico al análisis de intervalos, continuos o discretos, es decir, a representar la imprecisión como conjuntos de valores, mientras que si los grados de posibilidad son continuos, estos conjuntos de valores son conjuntos borrosos. Sólo cambian los nombres. Esto es el fundamento de la génesis de la teoría de la probabilidad.

Otra cuestión es, bajo el marco de lo no necesariamente aditivo, cómo se construye la creencia en un suceso compuesto a partir de las creencias en los sucesos elementales, o sea, para empezar, si suponemos que $p : \mathcal{U} \to [0, 1]$, es tal que:

$$P(A) \neq \sum_{x \in A} p(x) \tag{18.4}$$

entonces, ¿a qué es igual?

No sólo hemos de pensar en subaditividad o superaditividad, sino también en sustituir la operación base de la aditividad, la suma, por otra. O sea, la pregunta es: ¿por qué las creencias particulares han de sumarse para obtener exactamente o aproximadamente la creencia global?

Por ejemplo, la **teoría de la posibilidad**, introducida por Lotfi Asker ZADEH [401], es una teoría subaditiva en la que la exigencia de la aditividad (con respecto a la operación suma) se sustituye por la «aditividad» con respecto a la operación máximo[4]; o sea, $\forall A \in \mathfrak{P}(\mathcal{U})$:

$$P(A) = \max_{x \in A} p(x) \tag{18.5}$$

si bien podría formularse con otra t-conorma que no sea el máximo —*cfr.* PEDRYCZ [449] (p. 49).

He aquí lo original de la contribución de ZADEH. He ahí el cambio de paradigma.

La medida de posibilidad, función de $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$ en $[0, 1]$, es usual notarla Π o Pos; la función de distribución de posibilidad, de $\mathcal{U}$ en $[0, 1]$, es frecuente notarla r.

Cuando coexisten la probabilidad y la posibilidad, de cara a la consistencia de tal coexistencia, se exige como mínimo, que $\forall A \in \mathfrak{P}(\mathcal{U})$ —*cfr.* DELGADO y MORAL [1434]:

$$\operatorname{Pro} A \leq \operatorname{Pos} A \tag{18.6}$$

$$\operatorname{Pro} A > 0 \Rightarrow \operatorname{Pos} A = 1 \tag{18.7}$$

En nuestro peregrinar, hemos encontrado algún que otro resultado que es calificado como el equivalente o correspondiente del teorema de BAYES en la teoría de la posibilidad —*cfr.* DE BAETS y MESIAR [1435]. El problema es la multiplicidad de las soluciones. Dados dos sucesos A y B, Didier DUBOIS y Henri PRADE [1436] definen la medida de posibilidad condicional de A dado B como cualquier solución de la ecuación:

$$\mathcal{T}(x, \operatorname{Pos} B) = \operatorname{Pos}(A \cap B) \tag{18.8}$$

[4] *Cfr.* Obs. 284 (pág. 404).

Aunque a primera vista pueda parecer que la multiplicidad de las soluciones se debe a la multiplicidad de t-normas, es decir, al hecho de ser $\mathcal{T}$ una variable en la ecuación anterior, no es así. Si, por ejemplo, $\mathcal{T}$ es la t-norma mínimo, el conjunto de soluciones es —*cfr.* Hisdal [1437]; Klir y Yuan [46] (pp. 197-198):

$$r_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} r_X(x) & \text{si } r_X(x) < r_Y(y) \\ [r_Y(y), 1] & \text{si } r_X(x) \geq r_Y(y) \end{cases} \tag{18.9}$$

A lo largo de los años han sido varias las propuestas para elegir una solución —*cfr. v. gr.* Dubois y Prade [1436, 1438]—. Bernard De Baets y Radko Mesiar [1435] se basan en el *principio de mínima especificidad*, esto es, elegir la solución mayor, para obtener en la teoría de la posibilidad, un equivalente al teorema de Bayes —principio implícito en la propia definición de posibilidad (Ec. 18.5).

No obstante, no debemos olvidar uno de los problemas de fondo, de las diferencias esenciales: **la posibilidad no se actualiza de manera única**, a diferencia de la probabilidad, para la cual sí ocurre.

Por ejemplo para la t-norma mínimo, si igualamos las expresiones de la posibilidad conjunta:

$$\begin{aligned} r(x,y) &= \\ \min\{r_Y(y), r_{X|Y}(x|y)\} &= \min\{r_X(x), r_{Y|X}(y|x)\} \end{aligned} \tag{18.10}$$

Solucionando (18.10), por ejemplo, para $r_{Y|X}(y|x)$, obtenemos:

$$r_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \min\{r_Y(y), r_{X|Y}(x|y)\} & \text{si } r_X(x) > \min\{r_Y(y), r_{X|Y}(x|y)\} \\ \left[\min\{r_Y(y), r_{X|Y}(x|y)\}, 1\right] & \text{si } r_X(x) \leq \min\{r_Y(y), r_{X|Y}(x|y)\} \end{cases} \tag{18.11}$$

18.7 Aditividad y realidad humana: la paradoja de Ellsberg

«Los descubrimientos de la intuición siempre deben ser puestos en práctica por la lógica. Tanto en la vida ordinaria como en la ciencia, la intuición es un medio de conocimiento poderoso, pero también peligroso. En ocasiones resulta difícil diferenciarla de la ilusión.»
—Alexis Carrel, <L'Homme, cet inconnu> *IV, II, via* Gilbert Sinoué [152] (p. 137)

En referencia a la aditividad, veamos la paradoja de Ellsberg [1439], en la versión de Damjan Škulj [1432] —*cfr. item* Gilboa [1440]; Schmeidler [1441]—. Nos presentan dos urnas A y B, y nos dicen que cada una contiene 100 bolas de colores rojo o negro. Sobre la urna A sabemos que contiene 50 bolas de color rojo y 50 de color negro. Sobre la urna B no sabemos nada. Se toma al azar una bola de cada urna y se nos solicita hacer una apuesta. Tenemos cuatro posibilidades, según apostemos a favor de $A_R \equiv$«la bola extraída de A es roja», de $A_N \equiv$«la bola extraída de A es negra», de $B_R \equiv$«la bola extraída de B es roja» o de $B_N \equiv$«la bola extraída de B es negra». En cualquier caso, si ganamos, recibimos 100 euros, y si perdemos no recibimos nada.

Diversas experiencias han mostrado que preferimos apostar a favor de A_R o A_N, antes que a favor de B_R o B_N:

$$A_R \sim A_N \succ B_R \sim B_N \tag{18.12}$$

Veamos qué dice la teoría.

Las loterías son: $A_R = \langle 100, p_1; 0, q_1 \rangle$, $A_N = \langle 100, p_2; 0, q_2 \rangle$, $B_R = \langle 100, p_3; 0, q_3 \rangle$ y $B_N = \langle 100, p_4; 0, q_4 \rangle$. Tomemos como función de utilidad: $u(100) = 100$ y $u(0) = 0$. Las utilidades esperadas son $100p_i$. Por la composición de A, tenemos que $A_R \sim A_N$, y por tanto, $100p_1 = 100p_2$, de donde:

$$p_1 = p_2 \tag{18.13}$$

y como $p_1 = q_2$ y $p_2 = q_1$, entonces:

$$p_1 = p_2 = q_1 = q_2 \tag{18.14}$$

Suponer que trabajamos con probabilidades aditivas significa que:

$$p_1 + q_1 = 1 \tag{18.15}$$

$$p_2 + q_2 = 1 \tag{18.16}$$

A partir de (18.13), (18.14), (18.15) y (18.16):

$$p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = 1/2 \tag{18.17}$$

Por no saber nada sobre la composicón de B, tenemos que $B_R \sim B_N$, y por un razonamiento similar al anterior, obtenemos que $p_i = q_i = 1/2$, para $i \in \{3, 4\}$. Por todo ello, la utilidad esperada para cualquiera de las cuatro apuestas es 50, por lo que:

$$A_R \sim A_N \sim B_R \sim B_N \tag{18.18}$$

en contradicción con nuestra experiencia (18.12).

Y es que nuestras asignaciones de probabilidad no siempre son aditivas. Podemos modelar teóricamente nuestra experiencia utilizando una probabilidad no aditiva, en el caso de no información, o sea, para la urna B. Según el razonamiento anterior, p_3, q_3, p_4, y q_4 deben ser iguales. Sean, por ejemplo:

$$p_3 = q_3 = p_4 = q_4 = 3/7$$

Esto hace que la utilidad esperada para las apuestas B_R y B_N sea 43, es decir, se satisface (18.12).

18.8 Una de las voces de nuestra experiencia: la frecuencia

> *«Estas reglas representan una parte importante de las matemáticas de los juegos y las apuestas. Aunque son sencillas de establecer y fáciles de manejar, en casos no muy complicados, su aplicación correcta, en general, es difícil y requiere entender claramente la naturaleza de los sucesos que se estudian, y qué suposiciones podemos hacer sobre ellos. De hecho, la correcta aplicación de estas reglas es fuente de frustración, aunque también de deleite, para muchos estudiantes de la Teoría elemental de la Probabilidad. Aunque no dependeremos de la elusiva capacidad de razonar con las probabilidades, emplearemos éstas cuando sea necesario, por lo que animamos al lector a dominar su uso, al menos de forma elemental.»*
> —Edward Packel [1442] (p. 20)

Su consistencia teórica y los resultados obtenidos a lo largo de los años, hace que resulte más que patente la importancia de los métodos bayesianos para procesar explícitamente la incertidumbre presente en los análisis de datos y en las tomas de decisiones. Sin embargo, los humanos no trabajamos correctamente con la probabilidad de caso único, esencia de lo bayesiano, y esto hace que se produzcan múltiples errores en nuestros razonamientos probabilísticos bayesianos basados en probabilidades numéricas —*cfr.* Anderson [1443]—. Este no saber trabajar, también es, por otro lado, el fundamento, a menudo subconsciente, de las arremetidas de muchos «expertos» en IA, contra la probabilidad.

Cuando Jaynes habla de la probabilidad de caso único, parece olvidarse de nuestra experiencia. Nosotros no aventuramos infusamente la probabilidad (18.3). Nos atrevemos a ello, porque nuestra experiencia así nos lo dicta. Y aunque desconozcamos su valor numérico exacto, seguro que estamos de acuerdo en sugerir afirmaciones parecidas a:

> «La frecuencia con la que ocurre que al escuchar el caer de gotas
> nos asomamos y comprobamos que está nublado
> es altísima. Prácticamente, ocurre siempre.»

Nuestra mente razona a partir de frecuencias, no de probabilidades de caso único. Un ejemplo clásico es el siguiente (que ya mencionábamos en la pág. 7): Linda es una chica interesada en cuestiones políticas, a la que le preocupan temas como los derechos humanos, que participa activamente en la comunidad donde reside. ¿Qué es más probable? ¿Que Linda trabaje como cajera en un banco? ¿O que Linda trabaje como cajera en un banco y sea una activista del movimiento feminista? —*cfr.* Gigerenzer y Hoffrage [1444]—. La mayoría de las personas asignan una probabilidad mayor a la segunda afirmación, sin embargo, la teoría de la probabilidad obliga a que sea menor. Este es un ejemplo de la conocida como **falacia de la conjunción** —*cfr.* Anderson [1443]—. A estos errores que cometen las personas al pensar probabilísticamente, se les conoce en la literatura como **ilusiones cognitivas** —*cfr.* Tversky y Kahneman [93]; Ayton y Wright [1445]; Gigerenzer y Hoffrage [1444]; Cosmides and Tooby [1446].

Judith L. Anderson [1443] revisa tres ilusiones cognitivas bien conocidas: sobreestimación, la falacia de la conjunción y la ilusión de poseer control, defendiendo cómo transformar la cuestión de la asignación de una probabilidad en un formato frecuentista contribuye a su no aparición. Por ejemplo, Judith sugiere que la cuestión: ¿Cuál es la probabilidad de que la razón de crecimiento r de una población concreta sea menor que -0.05?, se reformule en términos frecuentistas: Si hubiese 100 poblaciones similares allí donde estés haciendo tu estudio, ¿cuántas esperarías que presentasen una razón de crecimiento r menor que -0.05?

Una opinión que cobra fuerza es que esto se debe a que la matemática que se emplea para asignar una probabilidad es mucho más sencilla, y ha sido más natural e intuitiva a lo largo de la evolución de nuestra especie. En formato frecuentista, todo consiste en operaciones elementales de la teoría de conjuntos, en ejercicios de recuento y clasificación que puede hacer cualquier niño, y que de hecho, también parece que hacen muchos animales no humanos —*cfr.* COSMIDES and TOOBY [1446]; DEHAENE [1447]; BRASE, COSMIDES and TOOBY [1448].

En general, deberíamos tener presente las diferentes variantes en la interpretación humana de la probabilidad, como seguras promotoras de las ilusiones cognitivas. TEIGEN [1449] propone la siguiente clasificación de las probabilidades.

- *Clásica* (*chance*): La probabilidad es la frecuencia de aparición de un evento concreto entre todas las apariciones de eventos de un proceso aleatorio verdadero. Por ejemplo, «salir cara» en el lanzamiento de una moneda. Es el concepto «clásico» de probabilidad.
- *Tendencia*: La probabilidad es la tendencia que muestra un evento concreto para aparecer. Por ejemplo, es improbable encontrar niños en una discoteca. Subjetivamente, estas probabilidades pueden interpretarse en el sentido de facilidad de ocurrir el evento.
- *Conocimiento*: La probabilidad se refiere al rango de hipótesis que se consideran y a cómo distribuir la creencia entre ellas. Por ejemplo, cualquier hipótesis no considerada (desconocida) recibe una probabilidad de conocimiento de cero.
- *Creencia* (o *confianza*): La probabilidad se refiere a la confianza o creencia que alguien tiene en una hipótesis determinada. Es la probabilidad lógica de la que tanto hemos hablado.
- *Control*: La probabilidad de un suceso no depende sólo de sus características estocásticas, sino de consideraciones subjetivas del observador, independientemente de que influyan o no en el valor de la probabilidad. Por ejemplo, algunas personas se sienten más seguras (disminuye su probabilidad subjetiva de sufrir un accidente) si conducen, en vez de ser pasajeros. Podemos interpretar esta probabilidad como el grado de control sobre resultados particulares.
- *Plausabilidad*: Esta probabilidad se interpreta como la credibilidad, cantidad y cualidad de detalle en una narración o modelo. Uno de los mejores ejemplos que conocemos es *Transgressing the Boundaries: Towards a Transformative Hermeneutics of Quantum Gravity*, de Alan D. SOKAL [1450] —*cfr. v. gr.* SOKAL y BRICMONT [1451].

18.9 La agitación de la certeza

> *«Yo también era jugador. Lo sentí en ese mismo instante. Me temblaban los brazos y las piernas, me martilleaba la cabeza. Se trataba, ni que decir tiene, de un caso infrecuente: en unas diez jugadas había salido el zéro (sic) tres veces; pero en ello tampoco había nada asombroso. Yo mismo había sido testigo dos días antes de que habían salido tres zéros seguidos, y uno de los jugadores, que asiduamente apuntaba las jugadas en un papel, observó en voz alta que el día antes el zéro había salido sólo una vez en veinticuatro horas.»*
> —Fedor DOSTOIEVSKI <El Jugador> [1452]

En §18.3 hemos propuesto leer (18.2):

«nuestra *creencia* en la veracidad de la proposición "u pertenece al conjunto C", es *exactamente* γ»

de manera que deshacíamos la primera exactitud de la primera lectura:

«(CREEMOS FIRMEMENTE que) el grado de pertenencia de u al conjunto C es *exactamente* γ»

Pero queda la segunda: decimos que la creencia es *exactamente* γ. Ahora bien, podemos resolver esto, mediante una nueva atribución de creencia; sea:

H_1 =«nuestra *creencia* en la veracidad de la proposición $q(C, u, \gamma)$ es *exactamente* γ_1»

De igual forma, podemos atribuir creencia a H_1:

$$H_2 = \text{«nuestra } \textit{creencia} \text{ en la veracidad de la proposición } H_1 \text{ es } \textit{exactamente } \gamma_2\text{»}$$

y podríamos continuar de este modo cuanto quisiésemos.

De este modo, si $H_0 = q(C, u, \gamma)$ es una proposición de una lógica bivalente de orden k, hemos expresado su incertidumbre en la correspondiente lógica bivalente de orden $k+1$. Por ejemplo, en lógica de enunciados, sin ninguna información previa, no sabemos el valor de verdad de una proposición atómica p. Sin embargo, la proposición de una lógica de enunciados de segundo orden que extienda a la anterior:

$$P = \text{«nuestra } \textit{creencia} \text{ en la veracidad de la proposición atómica } p \text{ es } 1/2\text{»}$$

es, a falta de información previa, verdadera.

Queremos con todo esto destacar que si bien decimos que nuestra creencia en que $u \in C$ es $\gamma \in [0, 1]$, la exactitud de γ significa la verdad de la afirmación H_0.

La única forma de romper esta segunda exactitud es liberar a γ de su exactitud numérica, suponiendo, por ejemplo, que sólo sabemos de γ, que pertenece a un intervalo, pero desconocemos su valor exacto, de hecho no nos satisface ningún valor concreto del intervalo como valor actual de γ, sino que lo que realmente nos satisface es la incertidumbre contenida en la afirmación de la pertenencia de γ a un intervalo.

Aun así, no dudar de nuestra creencia en lo que decimos, certifica su veracidad.

Pero no necesariamente ha de ser un intervalo. Puede ser una palabra. ¿Cómo representar las palabras que son los escalones de las escalas con las que medimos? Ya lo dijimos, y reflexionamos sobre ello, sobre la suposición indeclinable del común acuerdo en su significado y utilización, sobre nuestro convencimiento en el deber de informarnos, de preguntar a nuestros congéneres, para intentar así alcanzar un consenso —*cfr.* 17.13.

18.10 Síntesis reflexiva

> *«El hombre es, en buena medida,* causa sui*, causa de sí mismo. Somos lo que quisimos ser ayer. Seremos lo que estemos siendo ahora. Nos vamos haciendo poco a poco, en el tiempo, a golpe de acciones virtuosas o viciosas. Sembramos actos y recogemos hábitos.»*
> —Javier FERNÁNDEZ AGUADO [36] (p. 155)

Un error básico pero frecuente es pensar que detrás de todo uso de la palabra probabilidad se esconde el azar, lo aleatorio, lo estocástico. Según el DRAE, lo probable es lo «verosímil, o que se funda en razón prudente», y lo verosímil es lo «que tiene apariencia de verdadero», lo «creíble por no ofrecer carácter alguno de falsedad». Pero el DRAE también comete el mismo error básico al definir probabilidad, al encuadrar en una tercera acepción lo que él entiende por probabilidad desde el «punto de vista matemático», desligando así de las matemáticas, las otras acepciones. Sin embargo, es posible identificar **diferentes concepciones de probabilidad** en el comportamiento del ser humano —clásica, tendencia, conocimiento, creencia, control, plausabilidad, etc.—, y no en todas ellas está presente el azar.

Quizás sea la **creencia** la más importante para nosotros en este momento. Podríamos empezar por decir que la verdad de la probabilidad clásica, en su más pura esencia, es tan inalcanzable para el ser humano, como lo es el infinito. Tal verdad, se reduce a creencia. Lo objetivo muda en subjetivo.

Nuestra creencia es que la verdad no es auto-graduable, sino que la creencia es un medio del que dispone un observador para apreciar la verdad como graduada. En realidad, ¿qué aprehendemos de la naturaleza? Las distribuciones de probabilidad no son reales, son meras descripciones humanas, y por tanto incompletas, de la naturaleza.

El que está seguro, es que cree; el que cree, puede no estar seguro. La creencia subsume la seguridad. La probabilidad lógica subsume así el concepto clásico de borroso. Una función de pertenencia es una probabilidad lógica no necesariamente aditiva. Ahora bien, este hecho no resta importancia a la Teoría de Conjuntos Borrosos, porque, claramente, sus desarrolladores han sido los primeros interesados en estudiar las probabilidades (lógicas o no) y las medidas, no necesariamente aditivas. Es una cuestión de nombre: la **Teoría de Conjuntos Borrosos**, con otro nombre, no es más que la **Teoría de Probabilidades Lógicas No Necesariamente Aditivas**.

En el caso aditivo, el análisis bayesiano define la probabilidad de una hipótesis como la creencia (o grado de creencia, o confianza) de un observador en la veracidad de una hipótesis, y plantea y responde a la cuestión de su actualización. Su consistencia teórica y los resultados obtenidos a lo largo de los años, lo convierten en el paradigma de actualización de nuestras creencias en unas hipótesis determinadas. La **importancia de los**

métodos bayesianos para procesar explícitamente la incertidumbre presente en los análisis de datos y en las tomas de decisiones, es más que patente.

Aunque la probabilidad lógica —a veces también referida como subjetiva, personal o epistémica— parezca muy natural, la realidad es que los humanos no trabajamos correctamente con la probabilidad de caso único, esencia de lo bayesiano, y esto hace que se produzcan múltiples errores en nuestros razonamientos probabilísticos bayesianos basados en probabilidades numéricas. Estos errores suelen denominarse **ilusiones cognitivas**. Es mucha la experiencia que apunta a que transformar la cuestión de la asignación de una probabilidad en un formato frecuentista contribuye a su no aparición. Una opinión que cobra fuerza es que esto se debe a que la matemática que se emplea para asignar una probabilidad es mucho más sencilla, y ha sido más natural e intuitiva a lo largo de la evolución de nuestra especie. En formato frecuentista, todo consiste en operaciones elementales de la teoría de conjuntos, en ejercicios de recuento y clasificación que puede hacer cualquier niño, y que de hecho, también parece que hacen muchos animales no humanos.

Por otro lado, diversas experiencias, como las realizadas por Gigerenzer, Hoffrage y Kleinboelting [1453] revelan que la aplicación de la teoría bayesiana de la probabilidad, a veces, genera una **predicción pobre de la creencia actualizada**. Como posible motivo, estos autores apuntan el hecho de que se utilizan las mismas herramientas de cálculo para procesar las probabilidades subjetivas y las clásicas basadas en frecuencias.

No sólo eso, sino que **la inferencia es inducible**. Henri Zukier y Albert Pepitone [1454] muestran cómo inducir una u otra inferencia según el porcentaje de contexto evocativo que se proporcione a los sujetos. En concreto, en su experimento, que consistía en clasificar como correspondiente a vendedor o a bibliotecario, unas descripciones de personas, distinguían entre una orientación «científica», relacionando la actuación de la persona con normas de población y una orientación «clínica», persiguiendo centrarse en el caso individual, en la que se proporcionaba una narrativa o «historia clínica» de la persona.

> *«Sabemos que el hombre tiene una capacidad infinita de creer. Sorprende que no se lo haya definido como* Homo credens.*»*
> —Jerome S. Bruner [3] (p. 60)

En cualquier caso, no podemos olvidar que entre los fundamentos de la rememoración de aquellos pensamientos o sucesos pasados que participan en la definición o construcción de las probabilidades lógicas actuales y en la actualización posterior de las mismas, se encuentra la similitud con los hechos presentes.

> *«Lo que no se parece a nada no existe.»*
> —Paul Valéry <Malos pensamientos y otros>

Son **juicios por comparación**, por tanto, algunos de los responsables de la elección de los acaecimientos pretéritos que consideraremos como partes esenciales implicadas en tales definiciones o construcciones[5].

De lo que creemos estar más seguros es de que, puesto que es posible identificar diferentes concepciones de probabilidad en el comportamiento del ser humano, nuestra posición ha de ser la del **eclecticismo**, la de postulantes y practicantes de la complementariedad teórica y metódica, por ser, precisamente, la posición que, de manera natural, adopta el ser humano.

18.11 Extracto de algunos pensamientos en el punto, y seguido

> *«Un ser humano llega a ser tal, cuando él o ella piensan sobre el futuro.»*
> —John McHale [1455]

[5] No es la similitud el único factor esencial del recuerdo, de la asociación entre cosas, ideas o sucesos de nuestro pasado con cosas, ideas o sucesos del presente. Aunque las ideas originales son de Platón, fue Aristóteles quien trabajó de una manera más elaborada sobre ellas. Según este último, el proceso de recuerdo se asienta sobre cuatro leyes: **contigüidad** —las cosas o eventos cercanos en el espacio o el tiempo tienden a situarse cercanos en nuestra memoria—, **frecuencia** —cuantas más veces se presenten juntos o se relaciones dos cosas o sucesos, más fuerte se hace la asociación entre ellos—, **similaridad** —sucede que el pensar en algo procova el pensar en un símil suyo— y **contraste** —sucede que el pensar en algo procova el pensar en justamente lo opuesto—. A lo largo del tiempo, muchos han sido los que han retomado estas leyes, han añadido nuevas o no han considerado algunas: Thomas Hobbes (1588-1679), John Locke (1632-1704), David Hume (1711-1776), David Hartley (1705-1757), James Mill (1773-1836), John Stuart Mill (1806-1873), Thomas Brown (1778-1820) y Alexander Bain (1818-1903), son ejemplos de ellos.

Lo que debería observar el lector es que la aplicación de cualquiera de las leyes anteriores se supedita a uno o varios **juicios por comparación**: cercano frente a lejano, frecuente frente a raro o símil frente a disímil.

«Tal como nos lo recuerdan otras dos autoras, la utopía no refiere a una meta hacia la que se viaja, sino al horizonte del viaje mismo que el sujeto humano va mirando mientras camina.»
—Emma León [1456] (p. 66)

Que poner un punto no nos deluda. Todo continúa.

* * *

La **teoría de las relaciones objetuales** (*object relations theory*) tiene su origen en el pensamiento de varios psicoanalistas británicos, entre ellos: Melanie Klein [1457], W. Ronald D. Fairbairn [1458], Donald Winnicott [1459], Michael Balint [1460] y Harry Guntrip [1461].

El modelo de desarrollo y comportamiento sugerido por Sigmund Freud traslada a un segundo plano las relaciones, y propone que las personas son guiadas por instintos animales como el hambre, la sed o el placer, y que las relaciones se desarrollan en la medida en que sirven para satisfacer los instintos. Por el contrario, la teoría de las relaciones objetuales prioriza las relaciones interpersonales, defendiendo que el niño las usa desde edad temprana, y que la motivación básica del desarrollo es la necesidad de encontrar relaciones humanas satisfactorias, y conducentes a conseguir algo, un objeto —*cfr.* Fairbairn [1458].

Por cierto, que lo que esta teoría denomina objeto, es, en realidad, una representación interna (para un niño, seguramente su primer objeto, sea la interiorización de su madre). Así, Melanie Klein [1457] defiende como el proceso básico de desarrollo mental, la interiorización de un acopio de aspectos provenientes de una colección de personas significativas para el sujeto por algún u otro motivo.

Como resultado de nuestra consideración hacia la teoría de las relaciones objetuales, nos sobreviene el añadir a nuestros pensamientos de comparación entre objetos, la comparación entre **relaciones entre objetos**, dejándonos guiar hacia la «**sociedad de las relaciones entre objetos**» —*cfr.* Varela, Thompson y Rosch (Heider) [1104] (pp. 108ss.)—. Si representamos estas relaciones mediante grafos, entonces, un primer paso hacia la consecución de su comparación, es el estudio de la comparación entre grafos híbridos, construidos con conceptos probabilísticos y borrosos (probabilidades lógicas no necesariamente aditivas).

Pero no sólo relaciones entre objetos, sino también **relaciones entre objetos y conceptos**. Para juzgar que un objeto es una silla, debemos reconocer una determinada organización entre sus partes: patas, respaldo y asiento, de tal forma que sea posible sentarse en ella; el material del que esté fabricada, por ejemplo, es irrelevante para nuestro propósito —*cfr.* Maturana y Varela [1] (p. 42 de la versión inglesa revisada de 1998). A éste proceder podríamos llamarlo **reconocimiento de la funcionalidad**. Pero, como también observan ellos, hay clases de mucha más difícil definición, por ejemplo, la clase de las «buenas acciones» (p. 43).

* * *

Como decíamos en el preludio, tres son los modelos habituales mediante los que se agrega la información obtenida para todas y cada una de las características, resultado de su evaluación: conjuntivo, disyuntivo y compensatorio. Pero también podríamos haber aplicado tales modelos, no a los resultados, sino a las características; esto es, considerando **supra-características**, esto es, una reunión de características conectadas por disyunciones o por conjunciones —*cfr.* Landa [1462] (p. 385)—. De cara a su posterior procesamiento, puede ser práctico expresar la relación entre los atributos en *forma normal conjuntiva* o *disyuntiva*, de manera que trabajásemos con cualquier combinación lógica (y no sólo con conjunciones o disyunciones, aunque en realidad así lo hiciésemos) —al modo de lo dicho en §18.2.

* * *

¡Qué sorpresa cuando hablas informalmente con médicos! Se confiesan, viendo algo normal que, en atención primaria, muchos diagnósticos resulten equivocados. En ello pueden influir muchos factores, pero el principal es el propio protocolo de actuación estándar de atención primaria, que atendiendo al criterio médico de evaluación del paciente, limita el monto del coste gastable en conjuntos de pruebas más pormenorizadas.

Claro que a ello se añde la variabilidad de los síntomas. De hecho, la mayoría de los protocolos se basan y se dictan con palabras, con gradaciones lingüísticas de probabilidad.

Muchísimos estudios citan la experiencia profesional como el factor más influyente en la toma de decisiones clínicas y en segundo lugar, a cierta distancia, la mejor evidencia científica posible. A pesar de la importancia del conocimiento científico proveniente de la investigación, no puede olvidarse el conocimiento que se genera en la relación con los pacientes, o sea, la experiencia —*cfr.* Osteba [1463].

Esto es importantísimo de cara a lo que no cesamos de repetir: sistemas que ayudan a decidir y no sistemas que deciden. El decisor debe ser humano.

* * *

Hemos supuesto que el empresario (resp., el candidato) se pregunta: ¿será la persona adecuada para mi empresa? (resp., ¿será un puesto de trabajo adecuado para mí?) Sin embargo, quizás sean preguntas más realistas: ¿qué resultados esperamos obtener contratando a esta persona?, ¿qué resultados espero obtener con ese trabajo? Es decir, un *análisis orientado a los resultados*.

Claro que podríamos aducir que hemos definido las especificaciones para el puesto según los resultados que deseamos, por lo que la valoración de una cualidad del trabajador o candidato lleva implícito uno o varios de los resultados anhelados. Sin embargo, ¿no es cierto que lo explícito es más perceptible que lo implícito? Pues esa, precisamente, es la cuestión.

Otro ejemplo de pregunta, que también podría considerarse como evaluada o no, dependiendo de las especificaciones consideradas, es, a pesar de su aparente ingenuidad: ¿querrá el candidato hacer la tarea?

* * *

El número de aspectos a considerar con respecto a cualquier persona, puede rayar en el infinito. Cuando, por ejemplo, sobre un trabajador, se solicita la opinión de sus compañeros, tenemos la obligación de diferenciar los hechos de los rumores y de las opiniones vagas. Del mismo modo, debemos limpiar nuestra mente de prejuicios sobre esa persona. Se hace necesario, por tanto, trabajar en el diseño de cuestionarios y sondeos de opinión que no den lugar a la vaguedad en las respuestas, que soliciten hechos específicos: ¿dónde?, ¿qué?, ¿quién? No obstante ha de haber lugar para lo borroso, pues un cuestionario, no busca la verdad, sino reforzar nuestra creencia en una verdad, en la que nos ceden.

Creemos que el cuestionario ideal tiene mucho del que proponen Dailey y Dyer [138] (cap. 9): cada respuesta debería ser doble, por un lado, la respuesta natural, vaga, por otro, respuestas a preguntas que ayuden al decisor a precisar, en mayor o menor medida, esa vaguedad. Por ejemplo:

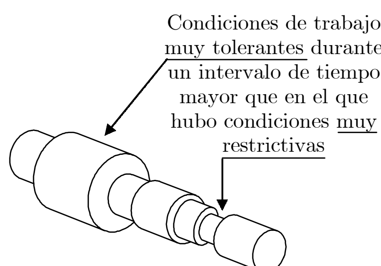
Respuesta vaga	**Inquisiciones clarificadoras**
Es difícil hablar con fulano	¿Cuándo habló con él? ¿De qué hablaron? ¿Quién más estaba presente?

* * *

Otro capítulo que restaría ha de dedicarse a la **verificación de las decisiones**, o sea, a conocer cómo se ha llegado por parte de cada uno de los actores implicados a la decisión «final» (si todos o una amplia mayoría manifiestasen dudas acerca de la decisión, habría que pensar en tareas dirigidas a la búsqueda y generación de otras alternativas o decisiones). «Muchos de los fracasos en los procesos de selección provienen del hecho de que quizás al seleccionador le gusta, la educación, formación o expresión oral del candidato, pero no tiene una visión global del cuadro, por lo que puede tomar decisiones sobre contratación a partir de criterios equivocados», escribe Montserrat Sugrañes (Licenciataria en España del `Predictive Index`©). Parece razonable pensar que un sistema informático puede contribuir a eliminar o, al menos, a paliar, este (d)efecto, inherentemente humano, subjetivo, por mor de lo objetivo.

* * *

No cabe duda que hay muchísimo más que estudiar. A continuación, un ejemplo. Seguro que somos capaces de imaginar un gran número de maneras en las que podemos **representar la evolución temporal del desempeño de una tarea**. Una forma atractiva de hacerlo puede ser como un **modelo tubular**, inspirándonos en el modelo acústico del tracto vocal —*cfr.* Rabiner y Juang [623] (pp. 190ss.)



Las condiciones de trabajo no son las mismas a través del tiempo, y cada sección cilíndrica corresponde a un intervalo de tiempo donde aproximadamente se dan las mismas condiciones. El modelo de secciones cilíndricas, que proponemos considerar, intenta expresar estos cambios. A mayor radio, condiciones más tolerantes. A mayor altura (del cilindro), más tiempo dura la situación.

Y, que estos cilindros no nos lleve a visualizar, de inmediato, un «ratoncito» corriendo oculto en cada uno, y éstos dando vueltas; aunque, por otro lado, esa nueva imagen gráfica representaría bien la marcha de la empresa: cuanto mayor es el radio del cilindro (condiciones de trabajo más tolerantes), mayor puede ser el «ratón» en su interior, y mayor por tanto, el espacio que recorre en el mismo tiempo. Puede que más que un modelo tubular, debiera ser un modelo de secciones cilíndricas dispersas, cada una discurriendo por caminos paralelos, hacia un mismo fin, el beneficio de la organización. Pero, en todo caso, estén juntos o dispersos, las diferentes velocidades de cada cilindro indicarían los diferentes ritmos de la empresa. Hallar correlación entre el radio del cilindro y el mejor desarrollo de la empresa sería una revelación muy significativa.

A la hora de medir, deberíamos tener en cuenta la relación entre volúmenes de cilindros consecutivos en el tiempo:

$$g_i = \frac{V_{i+1}}{V_i} \tag{18.19}$$

y una posible distancia entre desempeños de tareas podría ser —*cfr.* Rabiner y Juang [623] (p. 191):

$$d(DT_1, DT_2) = \sum_i (\log g_i - \log g_i')^2 \tag{18.20}$$

* * *

Muchos estudios han sugerido la rapidez con la que los ejecutivos se toman su labor de reclutamiento, algunos parecen añorar ser plusmarquistas, consiguiendo realizar entrevistas y tomar decisiones en muy pocos minutos —*cfr.* Webster [1464]—. Peor aún, muchas veces no saben ni cómo ni por qué han tomado la decisión que han tomado. Contra esto es difícil luchar. Quizás el desarrollo de técnicas que ayuden a la toma de decisiones pueda lentificar este proceso[6]. Aunque ha de tenerse cuidado, porque los estudios también sugieren que las personas muestran como comportamiento típico el ofrecer resistencia contra aquella evidencia que trate de refutar sus creencias —*cfr.* Armstrong y Collopy [1465]—. A veces, incluso, una mayor evidencia disconforme genera una mayor resistencia al cambio —*cfr.* Batson [1466].

Lo dicho en nuestra Tesis en cuanto a los diferentes campos de la administración con y para las personas (elección de candidatos o puestos, trabajadores o grupos de trabajo especializados o polivalentes, evaluación del desempeño y de las destrezas de ejecución, etc.), se ha manifestado bajo la hipótesis de que cualquier trabajador aplicará su esfuerzo en estricta consonancia con lo que el puesto de trabajo le demanda. Parece que deja de ser **trabajador humano** para mudar prácticamente en **empleado autómata** sujeto a las reglas del puesto. Indudablemente, esto disuena de la realidad. En estudios posteriores deberemos incluir, irremediablemente, el factor humano.

Es evidente que cada ser humano es único, pero el análisis aquí presentado ayuda a tomar una decisión inicial, que en ningún caso debería ser definitiva, sino que en todo caso, debiera ser confirmada necesariamente por un decisor humano. Sólo se trata de un sistema que ayuda a decidir.

Y no sólo eso, sino que ese ser humano debería poseer una amplia capacidad de agregación, semejante a la capacidad de un líder de agregar todos los esfuerzos individuales y de los grupos de desarrollo, de cara a la consecución de una óptima cualificación colectiva de su empresa.

Esa capacidad de agregación puede ser proporcionada por la posesión de lo que Jan Carlzon denomina «sentido de helicóptero», «un talento para elevarse por encima de los detalles, para ver la tierra desde arriba» —*cfr.* Carlzon [319]—, y que tantos defienden denodadamente, en diferentes campos, como por ejemplo Tammy Sachs y Gary McClain [1467], con su «visión desde los 10.000 metros» de todos los temas que tratan, o lo que Roger Dawson [43] (pp. 134-135, de la edición española) refiere como contemplar el problema desde «otro planeta».

[6] Al hilo de la lentitud, nos vienen al recuerdo los comentarios de Luis Puchol [129] (pp. 416-417), acerca del proceso de toma de decisiones en la empresa japonesa, un proceso lento pero eficaz. Cuando un directivo de nivel n quiere tomar una decisión, solicita a los directivos de un nivel inmediatamente inferior, $n-1$, que se reúnan con los de nivel $n-2$ y estudien el caso; los de nivel $n-1$ hacen lo mismo, solicitan a los directivos de nivel $n-2$ que se reúnan con los de nivel $n-3$ y consideren el problema; y así, se recorre todo el escalafón, de modo, que, el directivo de nivel n puede tomar la decisión con todas las sugerencias de sus subordinados en la mano. La eficacia del proceso reside en que todos han opinado, y, al menos, en teoría, todas las opiniones han sido consideradas.

Ahora bien, todo ello, sin caer en lo que Luis PUCHOL denomina el «**mito de la montaña**» —una versión empresarial del refrán «los árboles no te dejan ver el bosque»—, como trazado del sistema nervioso de una empresa. Pensemos en una montaña situada en un valle. Las diferentes laderas de la montaña representan los distintos departamentos de la empresa. Podemos imaginar un comercial situado en algún lugar —según su grado de responsabilidad— de la mitad más baja de una ladera. Ve con nitidez los objetos del valle. Sin embargo, sólo atisba, en mayor o menor medida, lo que hay y sucede en las laderas lindantes con la suya, y no sabe prácticamente nada de la ladera opuesta a la suya, pues se la oculta la montaña. A medida que alguien es «más jefe», más cerca de la cima de la montaña se encuentra. Su campo de visión es mayor, pero, debido a la altitud, las mismas cosas ya no se ven tan claras como cuando estaba más abajo. Cuanto mayor es la altura a la que está situado, más sabe el ejecutivo de las laderas adyacentes a la suya, y, por así decirlo, menos ignora de la ladera opuesta a la suya.

El Director General, situado en la cima, es el único al que ningún obstáculo le impide ver nada, conociendo, a diferencia de los ejecutivos de menor grado, «todas las vertientes de la montaña, incluso algunas subvertientes (y hasta algunos barrancos) de las que otros casi no conocen su existencia: Investigación y Desarrollo, Asesoría Jurídica, Auditoría Interna, Planificación Estratégica, Métodos y Tiempos, ...» Sin embargo, su visión, por mor del privilegio de su amplitud, es harto general, pasando por alto una larga lista de detalles. Además, como asevera Luis PUCHOL, si la montaña es muy alta, seguro que de vez en cuando aparecen bancos de nubes bajas, que entorpecerán la visión del Director General, y de algún que otro alto ejecutivo, siendo posible que, a veces, confundan «la parte superior de las nubes con el pie de la montaña» —*cfr.* PUCHOL [129] (p. 353).

> *«Cada imagen se relaciona con el todo, lo anticipa y aparece como su exponente de un todo contradictorio en el proceso de generación. Sin una relación con este todo contradictorio, la imagen deja de serlo, se convierte simplemente en un fenómeno singular y particular incapaz de traspasar sus propios límites.»*
> —Mijail M. BAJTIN [1468] (p. 173)

Lucha, querido lector, pelea por escapar de la «alternativa entre el **pensamiento reductor** —que no ve más que los elementos— y el **pensamiento globalista** —que no ve más que el todo—» —*cfr.* MORIN, *via* TAPIA URIBE [1049] (p. 165).

En cuanto a la realización de tareas, no hemos considerado ciertos factores que pueden enriquecer el modelo, por ejemplo, la **disponibilidad de los trabajadores**. Ésta, en sí, o su probabilidad, pueden ser valoradas borrosamente. Se trata del problema de asignación o de reparto de tareas, donde intervienen valoraciones borrosas.

Tanto y más resta, ... Por ejemplo, habría que estudiar de qué manera influye en los temas anteriores:

- el hecho de que la empresa ya esté consolidada o sea de nueva creación (es decir, si hay sólo uno o muy pocos puestos libres o están prácticamente todos los puestos libres);
- el tipo de empresa, por ejemplo, sea entre PYMES y GRANDES, sea entre *ratones*, *elefantes* y *gacelas*[7].

* * *

Lo cierto es que, de cara al futuro, miramos la realidad desde una perspectiva similar a la **visión «hologramática»** de Edgard MORIN: «uno puede decir que no sólamente la parte está en el todo, sino que el todo está en la parte» [1473] (p. 168) y [12] (pp. 105, 108, de la edición española). Y cita MORIN a Blaise PASCAL en este último [12] (p. 144, de la edición española): «tengo por imposible conocer las partes en tanto partes sin conocer al todo pero tengo por no menos imposible la posibilidad de conocer al todo sin conocer singularmente a las partes».

«No sólo cada parte del mundo es parte del mundo como un todo (lo que todos nosotros podemos reconocer en la vida diaria), sino que el mundo como un todo está cada vez más y más presente en cada una de sus partes», lo que es cierto para países e indivíduos: «cada punto del holograma contiene la información del todo del que es parte, de manera que cada individuo recibe y usa la información y los materiales de todo el universo» —*cfr.* MORIN y KERN [1474] (pp. 22-23), *via* Eleonora BARBIERI MASINI [1475].

El principio hologramático de MORIN se sitúa en un continuo intermedio entre el **reduccionismo ingenuo** (ha de fragmentarse la realidad para estudiar las partes sin entender el todo) y el **holismo estricto** (ha de componerse la realidad para estudiar el todo sin entender las partes).

[7] CHURCHILL [1469] llama **ratones** a las empresas marginales. Son la mayoría y se caracterizan por la actitud de sacrificio por parte del empresario, la mediocridad, los resultados pobres, triste oferta de futuro, pero tienen una gran capacidad de resistencia. **Elefantes**, las grandes empresas: longevidad, solidez, inercia, son sus características, pero también la lentitud y el aburrimiento. **Gacelas**, las empresas más dinámicas más activas, caracterizadas por la buena gestión. Crecen excepcionalmente rápido. Sobre ellas puede leerse a CHURCHILL [1469]; CABANELAS y VAAMONDE [1470, 1471]; HERNÁNDEZ [1472].

Y en esto hemos andado, en el entender, en los significados.

> *[Un significado es] el producto conjunto de todas las pruebas a disposición de aquellos que se comunican.»*
> —Dagfinn FØLLESDAL, *via* John WHEELER [178] (p. 14), a su vez *via* Michael TALBOT [179] (p. 189)

* * *

Los supuestos no han ocurrido realmente. Sin embargo, esperamos que hayan sido no sólo ilustrativos sino verosímiles. Como dice Jesús ROMERO MORANTE [782] (p. 227), «lo que el análisis de un caso pierde en extensión y capacidad de generalizar debe ganarlo en intensión, si es que quiere aportar algo significativo».

* * *

A partir del trabajo de Karl Raimund POPPER, en concreto de su **criterio de falsabilidad** —*cfr.* POPPER [1476]; ECHEVARRÍA [1477] (pp. 22-50, *et passim*)—, muchos están seguros de que ninguna teoría científica puede ser demostrada experimentalmente, sólo puede ser refutada[8].

Lo que sí parece indiscutible es que podremos **validar**, es decir, si presumimos la casi certeza de nuestras lucubraciones, entonces, éstas deberán predecir los resultados de las experiencias que se realicen (la simulación debe coincidir con la realidad).

Algunas de las pruebas presentadas como soporte de nuestras conclusiones, podrán ser tachadas de no constituir una demostración, en la acepción nítida de este término, aunque, sin lugar a dudas, otorgan plausabilidad —TAYLOR y BOGDAN [1479] dirían que son **pruebas elusivas**—, conferidoras de apoyo empírico, acrecentadoras del **grado de creencia en las conclusiones**, de su *grado de confirmación*, en el sentido de Carl G. HEMPEL [41] (p. 58 *et passim*).

* * *

¡Ay de nuestra lucha con las palabras! Lo rábido que resulta ser no saber elegir las adecuadas. ¿Estarán nuestros razonamientos limitados por ellas?

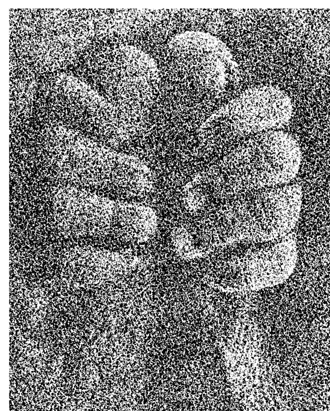
> *«La cuestión "Does mathematics need new axioms?" (¿Necesita la matemática nuevos axiomas?), es ambigua en prácticamente todas sus componentes.*
> *— ¿Qué entendemos por "mathematics" (matemática)?*
> *— ¿Qué entendemos por "need" (necesitar)?*
> *— ¿Qué entendemos por "axioms" (axiomas)?*
> *Incluso podrías preguntar: ¿Qué entendemos por "does"?»*
> —Solomon FEFERMAN [1480]

> *«Las palabras no conservarán un resplandor y un crédito eternos. Muchas, que hoy han desaparecido, renacerán; muchas, que hoy están en pleno vigor, se perderán, si lo quiere el uso, ese maestro absoluto, legítimo, regular, de la lengua.»*
> —HORACIO (65-8 a. C.) <Arte poética>

[8] Hans ZIMMERMANN [1478] (pp. 123-127) diferencia entre **teorías** y **modelos tecnológicos**, dividiendo las primeras en **formales** y **factuales** y los segundos en formales, factuales y **prescriptivos**. Hans ZIMMERMANN razona que el *criterio de falsabilidad* de POPPER es aplicable a lo factual pero no a lo formal —*cfr.* HISDAL [311] (p. 353)—. La cuestión que nos plantea Ellen HISDAL es: ¿cómo clasificamos la teoría de los conjuntos borrosos? ¿como formal o factual?



Lenguas de señas



«La Lengua de Signos utilizada por las personas sordas en Francia ha obtenido su reconocimiento oficial en el sistema educativo francés y figurará como asignatura optativa, incluso en el Bachillerato. El ministro socialista de Educación, Jack Lang, presentó el pasado miércoles (13-02-2002) el primer documento pedagógico que define los niveles de competencia para la enseñanza de esta lengua, inspirado en el que adoptó la Comisión Europea para los 43 idiomas hablados en Europa. "Reparamos así, simbólica y concretamente, la antigua injusticia asestada a la lengua de signos. Reconocemos su legitimidad educativa y cultural y damos los medios para enseñarla con el alto nivel que se merece", dijo el ministro.»

—Teletexto de Televisión Española, 19 de febrero de 2002 (p. 803)

Fecha: 26-08-2001

De: Ruben Jofre

A: Ernesto Davis

«*Hola nuevo un pocito conocer a sordos y yo tambien.- Porque y estoy muy curioso por internet aparecio sitiodesordos. Hay informacion tu carta mail@DAVIS.- Entonces me obligar ayuda gran de sordos.- Una pregunta vos de que trabajar intrepete a sordomudos.- YO tengo trabajar oficio a fabrica conocer. yo estoy trabaja metarlugico; torneriar,fresa,aqujeriar,soldaduria, heladeras.motor,bombinar,lavaropa,molinos cesped,maq.cruas, ect... tambien tecla automatico la maquina tornno y fresa.- Por eso no hay o hay cursos taller de escuela donde.- Para futuro primero aprender yo con cursos bien en escuela.- Dame diploma estudiar largo dos años.- Luego nuevo escuela de taller para enseñar a los sordos jovenes.Porque siempre no hay trabajar problema siempre dificil donde pasar a fabrica o oficio que tiene papel diploma cursos bien asi.- Nunca la vida año a año a año no ven del mundo donde escuela taller de sordomudos solamente argentina dale aprender bienes.Sonreir mas orgulloso de sordomudos ganar con diplomas importante asi me gusta.-*

NO VA MAS SORDOS POBRES AL REVES RICOS.

Ahora me llamo;

CESAR RUBEN JOFRE.-Mi carta nombre

rubenjofre@aol.com

Muchas gracias pronto»

Este primer apéndice, dedicado a las Lenguas de Signos Gestuales, tiene su razón de ser en el Ejemplo ilustrativo 7.3, que propone el problema del reconocimiento en tiempo retardado de queiremas aislados. Comienza el apéndice con una brevísima exposición histórica —cfr. §A.1—, estableciendo las definiciones de pose, postura, gesto y signo en §A.3. Sigue la presentación de la estructura lingüística y articulatoria de un signo gestual —cfr. §A.5— y del caso concreto de la Lengua de Signos Española (LSE), con los parámetros manuales que intervienen en la articulación de un signo genérico —cfr. §A.6—. Finalmente, en §A.7 comentamos la importancia de la expresión de la cara, en el proceso de reconocimiento e identificación de los signos pertenecientes a las lenguas naturales de signos gestuales.

A.1 Breves apuntes históricos

«Ingens enim, immensa, incredibilis est vis mentis humanae et cui nihil propemodum difficile sit, nisi quod non vult. Qua in re, ut miracula transeam, quae vidi, surdum a primis vitae annis et (quod consequens est) mutum didicisse tamen, ut quaecumque scriberet aliquis, intelligeret et ipse quoque, tamquam loqui sciret, omnia mentis suae cogitata perscribere posset.»
(«Realmente la fuerza de la mente humana es grande, poderosa, extraordinaria y casi nada es difícil para ella, a no ser lo que no quiere. Relataré los hechos extraordinarios que vi: un sordo desde los primeros años de su vida y, en consecuencia, mudo había aprendido cuando alguien escribía algo y él mismo también, como si supiera hablar, podía escribir detalladamente todos los pensamientos de su mente.»)
—Rodolfo BAUER [1481], llamado Agricola III, *via* María Ángeles RODRÍGUEZ [802] (p. 49)

La historia de las lenguas de señas puede consultarse en muchas obras, por ejemplo en las de María Ángeles RODRÍGUEZ [802], Álvaro MARCHESI [837] y Santiago TORRES, José Miguel RODRÍGUEZ, Rafael SANTANA y Antonia M. GONZÁLEZ [1482]. Baste aquí un breve bosquejo.

Difícil es hablar sobre la historia de las lenguas de señas, para épocas anteriores al siglo XVI. En los tiempos más antiguos, se pensaba que el sordo(-mudo) era estúpido, de hecho, según PLATÓN y ARISTÓTELES, un sordo(-mudo) no puede ser educado, según HIPÓCRATES, «la mudez es una enfermedad incurable que impide discurrir al que la padece». Aunque SAN AGUSTÍN [1483] (pp. 458-461, 539-569), en el siglo IV, llamase la atención sobre los gestos de los sordomudos como señas iguales a las palabras, quizás no sea hasta el Renacimiento, cuando a finales del siglo XV, Leonardo DA VINCI, llama la atención escribiendo «los movimientos de los mudos que hablan con las manos y los ojos, con las cejas y con toda su persona [...] en materia de movimiento los mudos son maestros, entienden desde lejos lo que otros están hablando, sólo por el movimiento de las manos» RODRÍGUEZ [802]. Años más tarde, en la primera mitad del siglo XVI, Girolamo CARDANO, recogiendo la noticia de Rodolfo BAUER (Agricola III) —*cfr.* Cita al comienzo de la sección—, planteó la posibilidad de enseñar a los sordo(-mudos) mediante el lenguaje escrito (él daba por supuesto que para aprender a hablar, hay que escuchar), pero no creó ningún método —*cfr.* CARDANO [1484].

Parece ser que la educación del sordo tiene su origen en España, cuando allá, sobre el 1545, el padre Prior del monasterio benedictino de San Salvador de Oña, confió a uno de los monjes, fray Pedro PONCE DE LEÓN, el cuidado y educación de dos hijos sordos de los marqueses de Berlanga. A finales del siglo XVI aparece publicado un alfabeto manual por fray Melchor de YEBRA [1485]. Juan Pablo BONET, en el prólogo de la obra [1486], aboga por la necesidad de que sean los pedagogos, y no los médicos, los encargados de preparar a los sordos para la convivencia en sociedad. El alfabeto manual que él publica, que parece ser aprendió de RAMÍREZ DE CARRIÓN, coincide con el de éste, publicado nueve años más tarde —*cfr.* RAMÍREZ DE CARRIÓN [1487]. En esta primera época, la orientación es totalmente oralista, y elitista, pues los sujetos tratados, generalmente son hijos de la nobleza.

En el siglo XVIII se produce un cambio en la orientación de la educación de los sordos; del oralismo se pasa al «gestualismo», a la valoración de la seña, y de los casos particulares de la nobleza, a la educación generalizada. Quizás el gran impulso de este cambio se deba a los signos metódicos del abad francés De L'Epée, los primeros signos manuales, no sólo dactilológicos —*cfr.* DE L'EPÉE [1488, 1489, 1490]—. Este abad ha pasado a la historia como el primer maestro de sordos que reconoce la lengua de señas como la lengua natural de los sordos —*cfr.* TORRES, RODRÍGUEZ, SANTANA y GONZÁLEZ [1482]—, aunque quizás no se diese cuenta de la gran importancia de considerar la lengua de señas como un código propio de comunicación, y lo utilizase en el sentido que hoy se utiliza el bimodal o se signa un idioma oral (con la gramática de éste) —*cfr.* RODRÍGUEZ [802]; TORRES, RODRÍGUEZ, SANTANA y GONZÁLEZ [1482].

La historia más reciente tiene un nombre de Universidad y dos nombres de Congresos. Fue en 1817 cuando Thomas Hopkins GALLAUDET se lleva a Estados Unidos a Laurent CLERC, maestro francés en lengua de señas, y fundan ese mismo año en Hartford la *American School for the Deaf*, abierta aún en la actualidad. Su hijo, Edward Miner GALLAUDET fundó el *Gallaudet College* de Washington, actualmente conocida como la Universidad de Gallaudet, la «universidad del sordo». El Congreso de Milán (1880), que impone el oralismo como único sistema de comunicación en la educación del sordo, asumiendo que la sordera es una deficiencia y no una diferencia, confiando su educación a instituciones religiosas y especializadas. El Congreso de Hamburgo (1980) que «deroga» las imposiciones del de Milán y aboga por una mayor libertad en la comunicación, hablándose de la lengua de señas como tal, aunque su reconocimiento como una lengua oficial todavía no se haya conseguido del todo. Quizás una de las deficiencias que muchos arguyen sea que no existe una lengua de señas «escrita».

A.2 Una amplia variedad de lenguas de señas

Al igual que ocurre con los lenguajes hablados, las lenguas de señas de países distintos son diferentes. Cambian, tanto la realización de la seña, en cuanto a los parámetros subléxicos de la misma, como a la gramática de la lengua —*cfr.* Fig. A.1.

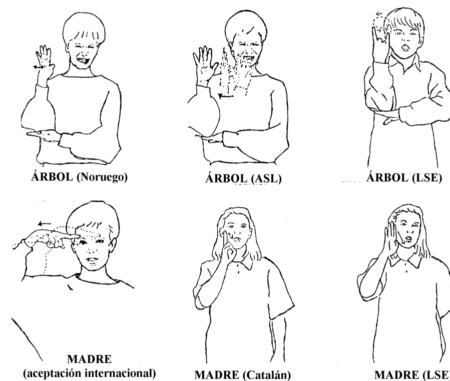


Figura A.1: *[ÁRBOL] y [MADRE], según diferentes lenguas de señas.*
—Fuente: Tetzchner y Martinsen [1491].

Las lenguas de señas se han desarrollado de manera natural, con aportaciones (neologismos), procedentes de otras lenguas de señas, de lenguajes de signos gráficos (Bliss, PIC, SPC, ...), de la lengua hablada del entorno, etc. —*cfr.* Klima y Bellugi [1492]; Tetzchner y Martinsen [1491]—. También se observan neologismos derivados de pantomimas o representaciones miméticas y otros simplemente, puras invenciones, aunque la gran mayoría se genera dentro del propio Lenguaje de Signos mediante sus recursos propios —*cfr.* Bellugi y Newkirk [1493].

Por otro lado, existen otros lenguajes que utilizan señas, que comparten la gramática del lenguaje hablado —*cfr.* Marchesi [837]; Wilbur [1494]—. Se conocen como **lenguajes orales signados**. Son lenguajes pedagógicos, elaborados por instructores para representar con signos de la Lengua de Señas, el lenguaje hablado del entorno. No son usados por los no oyentes, debido a que la gramática es la del lenguaje hablado, totalmente diferente a la de la Lengua de Signos.

A.3 Poses, posturas, gestos y señas

Si hacemos caso a Mulder [1495], los movimientos de las manos pueden dividirse en dos grandes grupos. Los del primero poseen propósitos comunicativos, pero sin manipular físicamente ningún objeto (los movimientos de este grupo se llaman de mano vacía o de mano libre). Los del segundo grupo manipulan y prenden objetos. En cualquier caso, un **movimiento manual** puede definirse, de manera equivalente, por el conjunto de movimientos de los brazos, manos, muñeca, dedos y falanges —descendiendo por una jerarquía natural, al modo del modelo anatómico de Lee y Kunii [808].

Cadoz [1496] ha clasificado los movimientos manuales en tres grupos, de acuerdo a su función:

Semióticos: comunican información con significado y son resultado de la experiencia cultural compartida.

Ergóticos: están asociados con la noción de trabajo, con la capacidad de los humanos de manipular el mundo físico, con la posibilidad de crear artefactos.

Epistémicos: que permiten a los humanos aprender del entorno mediante experiencia táctil o exploración háptica.

Han sido propuestas muchas más clasificaciones: de movimientos manuales —*cfr.* Malek, Harrison y Thieffry [1497]—, de gestos —*cfr.* Kendon [1498]; McNeill [1499]; Nespoulos y Roch Lecours [1500]— y de movimientos manuales ergóticos —*cfr.* Napier [1501]; Pressing [1502].

Definición 304 *Por nuestra parte, llamamos gestos a los movimientos manuales semióticos. Una pose manual es justamente la posición de la mano y los dedos (y acaso codo, falanges, etc.) en un instante de tiempo.*

Definimos una postura como las posiciones de la mano y los dedos (y acaso codo, falanges, etc.) en un intervalo no significativo de tiempo, o sea, en el que no se observan cambios significativos[1]*. Nunca se observan poses de la mano (sí a posteriori, por ejemplo en una fotografía), sino que siempre se observan posturas.*

Definición 305 *Por seña o signo gestual entendemos cualquier gesto o postura como elemento de un lenguaje (natural) de señas, un sistema de comunicación lingüística natural, de hecho y derecho.*

A.4 Comunicándonos con señas



Figura A.2: *<Mime cue>: de este tamaño (entendido por todos).*
—Fuente: Givens [1504].

A lo largo del tiempo, muchos autores han afirmado que quizás los gestos precedieron al diálogo como sistema de comunicación entre homínidos —*cfr. v. gr.* Fig. A.2; Kimura [1505]; Marchesi [837].

Una simple observación nos muestra cómo los movimientos faciales y corporales forman parte del acto comunicativo —*cfr.* Nierenberg y Calero [1506]; Stove [1507]—. De manera similar al análisis lingüístico que se lleva a cabo en el sistema vocal-auditivo, puede estudiarse el *sistema gestual-visual*. Los primeros estudios más conocidos sobre **kinésica**, el análisis descriptivo del código gestual-visual en sí[2], se deben a Weston LaBarre [1509] y a Ray Birdwhistell [1510]. Cualquier postura o movimiento de una determinada parte del organismo (facial o corporal) se denomina **kino** (equivalente a fono). En paralelo con la lingüística, un primer paso sería la consecución de algún sistema que permitiese registrar o transcribir cualquier sucesión de kinos, procedentes de uno o más «emisores». El sistema de notación que desarrolla Birdwhistell es bastante complicado.

Un segundo paso consistiría en determinar y clasificar los kinos significativos en el código, los **kinemas** (en un sentido equivalente a los *fonemas*), como clases de kinos de igual significado. Los kinos agrupados en una misma clase se denominan **alókinos** (cf. *alófonos*), caracterizándose según la variación[3] sea condicionada o no. Birdwhistell propone como equivalente de los *morfemas*, o quizá de las palabras, aquellos patrones de postura facial y corporal, que en conjunto tienen una significación distintiva, pero que pierden su significado cuando se fragmentan.

Puede consultarse más sobre kinésica, por ejemplo, en las obras de Fernando Poyatos [1511, 1512, 1513].

Pero además de los lenguajes de señas de las comunidades sordas, existen muchos otros. Piénsese, por ejemplo, que de igual modo, que en determinados ambientes, donde las manos del usuario están contínuamente ocupadas, se hace necesaria un interfaz vocal, siendo esta precisamente, una de las motivaciones del desarrollo de sistemas de control basados en reconocimiento de voz, existen otros entornos, donde o bien, el ruido ambiente es tal que es imposible una comunicación vocal, como en la construcción, o bien es necesario un silencio absoluto, haciéndose necesaria una comunicación alternativa, que bien pudiera ser por signos.

Este es el caso de la comunicación con señas empleada a veces por personas para comunicarse con los conductores de maquinaria pesada, o de maquinaria agrícola —*cfr.* Fig. A.3.

Ahora, imaginemos que la maquinaria es un robot; podríamos conducirlo a distancia utilizando un lenguaje artificial de gestos. Así son abordables tareas como las siguientes:

[1] Yanghee Nam y KwangYun Wohn los han llamado *gestos primitivos* [1503].

[2] Aunque algunos autores ya habían destacado la importancia del análisis de esta banda de código, pero realmente no habían abordado el problema en profundidad —*cfr.* Osgood y Sebeok [1508].

[3] Si se puede predecir la aparición de un sonido dentro de una sucesión de ellos en función de otros sonidos que estén en su entorno, entonces decimos que esta **variación** de sonidos es **condicionada**. En cambio, si dos sonidos pueden intercambiarse libremente, obteniéndose en ambos casos elocuciones con significativas, decimos que es una **variación libre** o *no condicionada.*

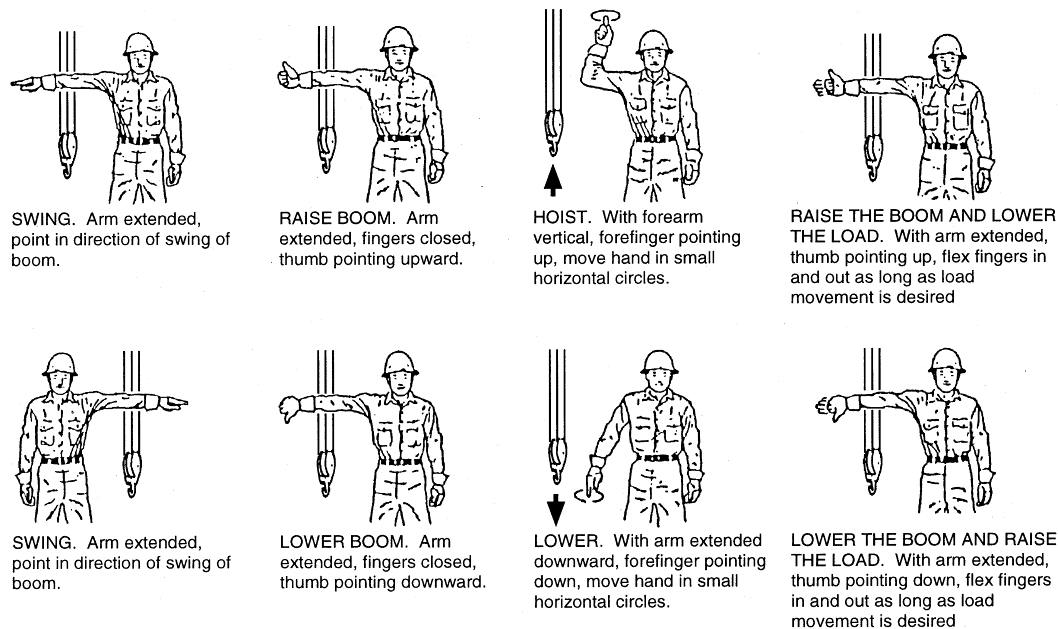


Figura A.3: *Los cuatro gestos manuales convencionales entre los operadores de grúas de la empresa MARR Equipment Corporation (Boston, MA, USA). Cada gesto se presenta con dos variantes direccionales. Los tres primeros gestos (<swing>, <boom> and <hoist>) controlan los tres grados de libertad de la grúa. El cuarto coordina <boom> y <hoist> de forma que el gancho se aleje de la grúa pero manteniéndose a la misma altura.*
—*Fuente:* Sturman [795].

- *Control y manipulación de robots (físicos)*, a partir de la definición de un sublenguaje apropiado. Por ejemplo, Pappert y Gigante [1514] construyen un sistema para control por gestos de un brazo virtual, basado en un conjunto de gestos artificiales. Sturman [795] modela una grúa. Katkere, Hunter, Kuramura, Schlenzig, Moezzi y Jain [1515] proporcionan otro ejemplo.

- *Control y manipulación de actores* (robots lógicos en un sistema de realidad virtual o de realidad aumentada). Por ejemplo, Sanso y Thalmann [1516] proponen un sistema muy completo de «grasping», solucionando variados problemas cinemáticos y de impedimento de colisiones. Brooks [1517] proporciona otro ejemplo de esta funcionalidad.

- *Verificación del emisor.* En general, puede pensarse en varias de las aplicaciones que se han propuesto para el reconocimiento de voz. Por ejemplo, podría utilizarse para verificar el emisor —*cfr.* Rabiner y Juang [623]—. O sea, dado un discurso o una muestra de discurso, decidir si corresponde a uno de los emisores controlados (usuarios registrados) y a cuál de ellos. Esto es como una firma digital tridimensional, una grafología en tres dimensiones.

Ejemplos de otros sistemas de comunicación basados en posturas o gestos, reducibles, en todo caso, a una lengua de signos son los siguientes:

- *Sistemas de lenguajes de interacción con computador basados en comandos gestuales*, que frecuentemente utilizan gestos deícticos y de indicación, aunque algunos admiten una variedad más amplia de gestos.
  - Estos sistemas permiten, por ejemplo, la elección de comandos en un determinado entorno de menús, como podría ser un esquema de navegación virtual. Un ejemplo de estos sistemas puede ser GIVEN (*Gesture-driven Interactions in Virtual Environments*) —*cfr.* Böhm, Hübner y Väänänen [1518].
  - Otro ejemplo de estos sistemas es CHARADE. En él se usan gestos manuales para controlar un computador que nos ayude en una presentación. Este sistema proyecta la pantalla del computador

en lo que sus autores denominan «zona activa» —*cfr.* BAUDEL y BEAUDOUIN-LAFON [1519]—, y mediante un `DataGlove`, el usuario interactúa con el sistema, ejecutando comandos de una forma simple: apuntando a la zona activa y realizando determinados gestos manuales. Esto, realmente, logra que la presentación sea más natural. Los autores presentan un ejemplo de lenguaje, que es perfectamente reducible a una lengua de signos, por ejemplo, a la LSE.

- *Sistemas que interpretan la mano como un ratón 3D.* Una aproximación a este objetivo se consigue por el método de selección radial, usada, por ejemplo, en el mundo virtual *Rubber Rocks* —*cfr.* CODELLA, JALILI, KOVED, LEWIS, LING, LIPSCOMB, RABENHORST, WANG, NORTON, SWEENEY y TURK [1520], basado en el modelado físico de objetos flexibles —*cfr.* NORTON, TURK, BACON, GERTH y SWEENEY [1521]; SWEENEY, NORTON, BACON, HAUMANN y TURK [1522].



Figura A.4: *Mundo virtual <Rubber Rocks>.*
—*Fuente:* CODELLA, JALILI, KOVED, LEWIS, LING, LIPSCOMB, RABENHORST, WANG, NORTON, SWEENEY y TURK [1520]

En la Fig. A.4 vemos dos usuarios interaccionando con el mundo virtual `Rubber Rocks`. Las gorras de beisbol que visten portan un sensor de posición para identificar el movimiento de la cabeza. Mediante los guantes y los sensores de posición adosados a ellos se introducen los gestos. Los usuarios están viendo una habitación desde lados opuestos. Dentro de la habitación hay objetos flexibles sometidos a campos gravitacionales. Todo consiste en atrapar estos objetos, simplemente apuntándoles con el dedo. Las manos también se representan en la escena reflejando sus posiciones y los gestos que están haciendo. El sistema proyecta un rayo desde el dedo extendido y si intersecciona al objeto, éste queda atrapado, pudiendo entonces lanzarse contra la mano del oponente, debilitando así un poco más al contrincante, cada vez que se consiga. En la foto de la Fig. A.4 el simulador está congelado en el momento que que ambos jugadores pugnan por un objeto en forma de ladrillo.

A.5 Estructura lingüística y articulatoria de la seña

William C. STOKOE, en 1960 [1523], quizás fuese el primero, en fundamentar la estructura lingüística de una lengua de señas, la lengua de señas americana(LSA) (*American Sign Language*, ASL), además de propugnar y defender el reconocimiento de su autonomía lingüística.

Las lenguas de señas —*La Seña*, en palabras de Oliver SACKS [1524]— presentan una organización estructural formal similar a la que se encuentra en los lenguajes verbales, esto es, una estructura subléxica análoga al nivel fonémico —*cfr.* STOKOE [1523]; STOKOE, CASTERLINE y CRONEBERG [1525]; BATTISON [1526]; LIDDELL y JOHNSON [1527]—, y unas reglas de producción que especifican de forma precisa cómo combinar tales unidades fonológicas mínimas para formar gestos significativos (señas), cómo combinar signos simples en signos más complejos, para finalmente producir frases (proceso análogo a los niveles morfológico y sintáctico) —*cfr.* SUPPALA [1528]; PADDEN [1529]; PERELLÓ y FRIGOLA [1530]; RODRÍGUEZ [802]; TORRES, RODRÍGUEZ, SANTANA y GONZÁLEZ [1482].

En un primer intento de analogía entre las estructuras subyacentes a los lenguajes verbales y gestuales, STOKOE [1523], propone los nombres de **querología** (*cherology*), **querema** (*chereme*) y **alóquero** (*allocher*),

como equivalentes gestuales de *fonología*, *fonema* y *alófono*, respectivamente.

Estos queremas se asemejan funcionalmente a los fonemas del lenguaje verbal: serían las equivalentes a unidades fonológicas mínimas con capacidad funcional distintiva (oposición en contraste semántico), discriminante, de modo que dos gestos se pudiesen diferenciar únicamente en uno de ellos.

Stokoe [1523] distingue tres aspectos de la «estructura submorfémica» de un signo:

- *tabula* (–*tab*–, «el lugar donde se escribe algo»; la posición);
- *designator* (–*dez*–, que se reconoce por la configuración de la mano y por la postura; la orientación o dirección);
- *signation* (–*sig*–, «la acción de hacer un signo», reconocida por un movimiento significativo en el espacio, o por un cambio en la configuración, o en la orientación).

Cada uno de estos aspectos se constituye en querema o alóquero, según presente o no, una función distintiva. Stokoe [1523] delimita doce *tabs* (posiciones), diecinueve *dezs* (configuraciones) y veinticuatro *sigs* (tipos de movimiento) —*cfr.* Fig. A.5—. En 1980, Stokoe postula que cualquier signo manual puede diferenciarse de otros signos manuales mediante cuatro características:

- postura de la mano,
- orientación de la mano-brazo respecto del cuerpo,
- localización sobre el cuerpo (es una proyección 2D del individuo signante desde el punto de vista de un observador),
- movimiento.

En la década de los 70, Ursula Bellugi, su marido Edward S. Klima, y sus colaboradores del Instituto SALK, trabajaron en el descubrimiento de la gramática subyacente a la Lengua de Señas —*cfr.* Bellugi y Fischer [1531]; Bellugi y Klima [1532]—. Más adelante, Ursula Bellugi y sus colegas, estudian los substratos neuronales de los lenguajes de signos, analizando las consecuencias en la comunicación con dichos lenguajes, de diversas lesiones cerebrales y en el funcionamiento espacial en general —*cfr.* Bellugi, Poizner y Klima [1533, 1534]; Bellugi y Newkirk [1493]; Corina, Poizner, Bellugi, Feinberg, Dowd y O'Grady-Batch [1535]; Poizner, Bellugi e Iraqui [1536]; Poizner, Bellugi y Klima [1537]; Poizner, Klima y Bellugi [1538].

Tanto Stokoe, como Klima y Bellugi, defienden el hecho de que la fonología de las lenguas de señas se basa en la *simultaneidad* más que en la secuencialidad (como ocurre con los lenguajes verbales). Cada gesto está constituido por una combinación única de los diferentes queiremas propuestos, y su reconocimiento se identifica con el proceso simultáneo, de reconocimiento de cada uno de los queiremas constituyentes.

A partir de los estudios de Liddell [1539] y Liddell y Johnson [1527], donde se sugieren y estudian elementos secuenciales (segmentos fonológicos) significativos, varios autores como Corina [1540, 1541, 1542], Perlmutter [1543] y Sandler [1544], elaboran propuestas estructurales que combinan tales aspectos, basándose en teorías lingüísticas de infraespecificación, fonología autosegmental y geometría de características, llegando a modelos fonológicos de la LSA, que permiten la predicción de queiremas —*cfr.* Brentari [1545]; Corina y Sagey [1546].

En resumen, las lenguas de señas comparten varios principios organizativos con las lenguas verbales, como niveles léxicos, sílabas, segmentos, características distintivas y procesos gramaticales recursivos —*cfr.* Bellugi [1547]; Rodríguez [802]; Wilbur [1548].

Finalmente, hemos de notar que la **simultaneidad** a la que nos referimos en el caso de la modalidad visual-gestual implica la posible simultaneidad en la producción y expresión de los elementos de una frase. Es decir, mientras que la estructura del lenguaje oral es lineal, no ocurre esto con la de una lengua de señas. Por ejemplo, la Fig. A.6 muestra un signo capaz de expresar toda una frase. En este ejemplo, la mano derecha nos informa al mismo tiempo de que (1) hay una persona, (2) dicha persona está sentada, y que (3) está sentada precisamente en la parte delantera de un coche.

A.6 Articulación de la seña española. Parámetros manuales

En España, entre los primeros trabajos lingüísticos sobre comunicación no verbal se encuentran los de Torrego sobre lingüística, cinésica [1549] y gestos en el español hablado, continuados por Sebastián Serrano [1550,

Manually produced signs *of American Sign Language are written, first with a* **tab** *symbol to show where the sign action occurs:*

- Ø *in front of signer's body*
- ◯ *face or head region*
- ∩ *forehead or top of head*
- ⊔ *mid-face, nose, eyes*
- ∪ *chin, lower face*
- 3 *cheek, side of face, ear*
- Π *neck, throat*
- [] *trunk (shoulders to hips)*
- \ *upper arm*
- ✓ *forearm, elbow*
- a *back of hand, wrist*
- D *inside of wrist*

Next *with a* **dez** *symbol for the handshape, and attitude*, of* **what acts:**

- A *closed hand*
- Ȧ *thumb extended hand*
- B *flat hand*
- B̈ *bent hand*
- 5 *fully spread hand*
- C *curved hand*
- E *retracted hand*
- F *loop and 3/finger hand*
- G *index finger hand*
- H *double finger hand*
- I *little finger (pinkie) hand*
- K *'k' hand of fingerspelling*
- L *angle hand, thumb & index*
- 3 *thumb & 1st 2 fingers spread*
- M *similar to B̈ or O*
- R *2nd finger crosses index*
- V *'victory' hand, spread*
- W *3 fingers spread, thumb on pinkie*
- X *index finger bent*
- Y *'y' hand of fingerspelling*
- 8 *mid-finger in from spread hand*

Then *with one or more* **sig** *symbols to show the sign* **action:**

Motion

- ^ *up*
- v *down*
- N *up & down*
- > *rightward*
- < *leftward*
- z *side to side*
- ⊤ *toward signer*
- ⊥ *away from signer*
- I *to & fro*
- ⊙ *in a circle*

Internal (hand or finger)

- ɑ *bend*
- ⁂ *wiggle*
- □ *open*
- # *close*

Interaction: hand w/ hand or body

- × *approach*
- × *touch*
- ⌶ *link or grasp*
- + *cross*
- ⊙ *enter*
- ÷ *separate*
- () *interchange*
- ~ *alternate*

* **Subscripts** *show how* **dez** *(D) is held:*

- D_a *supine (palm up or back)*
- D_b *pronated (palm down or out)*
- /D *forearm near vertical*
- $D_<$ *salient finger to left*

Diacritics *show detail of* **action:**

- ^̇ *sharp upward motion*
- ×·· *repeated touching action*

Figura A.5: Notación de Stokoe.



Figura A.6: *Una persona apoyada en la parte delantera de un coche.*
—*Fuente:* Rodríguez, [802].

1551], y los de Fernando Poyatos, desde sus primeros trabajos en kinésica [1552, 1553, 1554], hasta su tratado sobre comunicación no verbal, desarrollado en tres tomos [1511, 1512, 1513].

En el estudio concreto de la lengua de signos destaca la obra de Jorge Perelló y Juan Frigola [1530], quienes consideran los tres mismos aspectos que Stokoe, estableciendo, en su análisis de la lengua de signos catalana (LSC), treinta y nueve posiciones, cuarenta y siete configuraciones y veinticinco movimientos.

No obstante, quizás el primer estudio más completo en España sobre la estructura lingüística de la LSE se deba a María Ángeles Rodríguez, desde sus trabajos iniciales [1555, 1556], hasta su tesis doctoral en 1990, publicada en [802], donde analiza la LSE, desde la semántica, sintaxis y morfología, pasando por el estudio de la articulación de los signos y la estructuración de los mismos en base a una serie de parámetros articulatorios y su posterior clasificación según ellos.

Considera que un signo es el resultado de la combinación simultánea (no lineal) de los siguientes parámetros formativos quinésicos):

- forma o configuración de una mano (**queirema**), distinguiendo veintinueve;
- orientación de la mano (**queirotropema**), distinguiendo nueve;
- lugar de articulación (zona del espacio donde se articula el signo, **toponema**, del término griego *τoπoξ*: «lugar»), diferenciando veinticinco.

Estos tres parámetros son *estáticos*, es decir no suponen, en principio, ningún análisis de movimiento —otra cosa es que pueda deducirse su reconocimiento a partir de alguno—. Además, son unimanuales, pues pueden se atribuyen a una única mano.

Como parámetros, también unimanuales, pero *dinámicos*, distingue:

- el tipo de movimiento de la mano (**kinema**), diferenciando dieciocho;
- la dirección del movimiento de la mano (**kineprosema**), entre los que distingue seis.

Rodríguez [802] considera un sexto parámetro articulatorio:

- la expresión de la cara (**prosoponema**),

y aunque su valor es fundamentalmente expresivo, también posee función distintiva, por ejemplo, para diferenciar entre enunciados interrogativos y enunciativos, o incluso señas simples, por ejemplo, [DULCE] y [DOLOR] —*cfr.* Fig. A.12 (pág. 487).

Podemos encontrar clasificaciones alternativas. Por ejemplo, hay estudiosos que además del queirema, queirotropema, toponema y kinema, consideran oportuno distinguir los siguientes:

- **Esquedemas**: Planos, en número de cuatro, abarca la longitud del brazo y aluden al punto, situado delante del signante, en que se articula el signo. Opinan que sustituirá al kineprosema.
- **Haptonema**: Es el punto de contacto, parte de la mano dominante que entra en contacto con el cuerpo del signante.
- **Componente no manual**: Corresponde a expresiones faciales, movimiento de la cabeza o a movimiento de los hombros y el tronco; en el que se incluirá el *prosoponema*.

Otro refinan la clasificación. Por ejemplo, con respecto a los kinemas, podría diferenciarse entre:

- *kinemas dactílicos* (movimientos internos, de los dedos de una mano), y
- *kinemas no dactílicos* (movimientos genéricos, aplicables a la mano considerada como un todo, y también a los dedos).

Aunque muchos de las señas de la LSE se realizan con una mano, hay señas en cuya ejecución participan ambas manos, rigiéndose su formación por determinadas relaciones de **simetría** y **dominancia** —*cfr.* RODRÍGUEZ [802].

Además de los anteriores, hemos de considerar los siguientes parámetros complementarios:

- *Componentes corporales de tipo expresivo*, como la oral (parte del prosoponema), cuya importancia semiótica comentaremos en §A.7;
- *Dactilología*: los signos dactilológicos, es decir, el alfabeto signado, es necesario cuando falta un signo compartido entre emisor y receptor, por ejemplo, cuando dos personas se conocen y desean comunicarse sus nombres;
- *Lectura Labiofacial* (LLF) esto es, leer una palabra en los labios del emisor, y al igual que la dactilología, tampoco forma parte de la LSE, pero lo complementan;
- *Gesticulación*;
- *Entorno*: hay un uso topográfico de ciertos signos de la LSE, al localizar en el espacio físico un concepto semántico, un lugar al que el individuo signante se referirá con posterioridad, pudiendo representar este lugar, una persona, varias personas, objetos, etc; pero lo único que nosotros vamos a percibir es una indicación deíctica (generalmente con el dedo índice extendido) apuntando hacia tal lugar.
- Restricciones anatómicas, propias disminias físicas, o generadoras de disminias funcionales.

Cada uno de estos parámetros adopta varias configuraciones, siendo esta la diferencia principal, en su estructura lingüística, entre los diferentes lenguajes de signos. No en todos los lenguajes de signos existe el mismo número de ellos; es una situación similar a la del número de fonemas en los lenguajes verbales, y se rige por su función distintiva en contraste semántico. Por ejemplo, en la LSA es usual considerar 36 queiremas, mientras que en la LSE, RODRÍGUEZ [802] sólo considera 29. No obstante la aparición de neologismos también hace que aparezcan nuevos queiremas. Y otros estudios identifican otro número de queiremas, por ejemplo, Inmaculada MUÑOZ [1557] identifica 71 queiremas en la LSE.

La función distintiva de cada uno de los parámetros propuestos se analiza en RODRÍGUEZ [802] (pp. 186ss). De todos modos, hablaremos de ella en las secciones posteriores.

A.6.1 Queiremas

El término inglés *«chereme»*, procedente del griego $\chi\varepsilon\iota\rho$ («mano»), aparece propuesto por William C. STOKOE [1523], y su traducción española queirema, entre otros por RODRÍGUEZ [802]. Indica, genéricamente, la configuración de una mano, independientemente de su posición, orientación o dinámica de la mano como un todo. La Fig. A.7 muestra los 29 queiremas que considera María Ángeles RODRÍGUEZ [802] en la Lengua de Signos Española.

Pero ésta no es la única clasificación. Inmaculada MUÑOZ [1557] propone el concepto de **familia de queiremas**. Diferencia entre 71 queiremas que agrupa en 21 familias. El diccionario (en CD-ROM) DILSE —*cfr.* FRUTOS, GONZÁLEZ, MINCHERO y NIETO [1558]— (conjuntamente con un segundo CD-ROM con neologismos), recoge la idea de las familias propuestas por MUÑOZ —*cfr.* Fig. A.8.

A.6.2 Queirotropemas

La denominación queirotropema tiene sus raíces en dos vocablos griegos: $\chi\varepsilon\iota\rho$ («mano») y $\tau\rho\varepsilon\pi o\mu\alpha\iota$ («volverse», «dirigirse»). María Ángeles RODRÍGUEZ [802] distingue nueve queirotropemas —*cfr.* Fig. A.9.

Una notación posible para la orientación sería añadir simplemente un punto, por ejemplo: $K1 =\Downarrow \cdot$, y $K2 = \dot{\Downarrow}$.

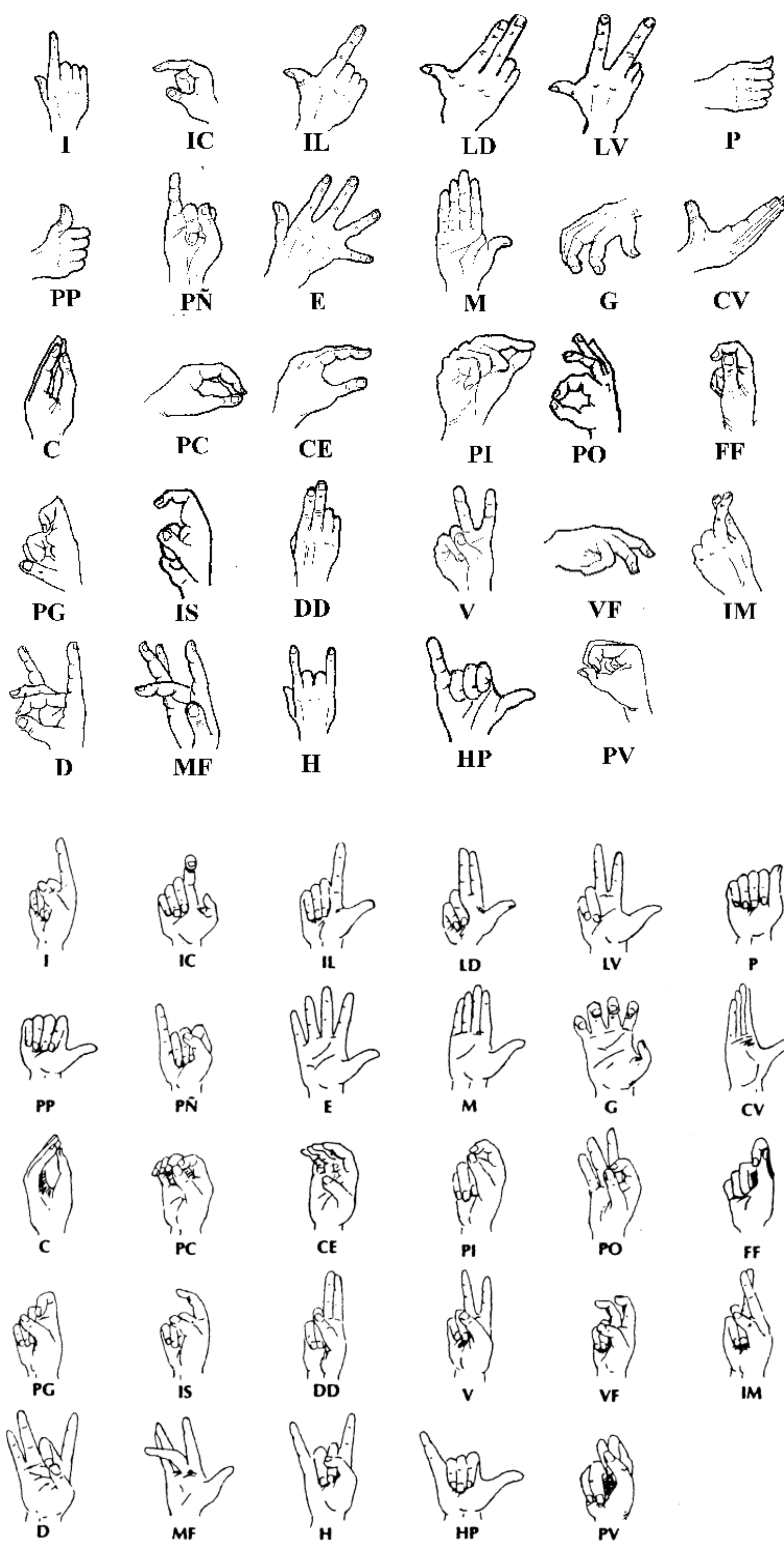


Figura A.7: *Los* 29 *queiremas que identifica María Ángeles* RODRÍGUEZ *para la Lengua de Signos Española.*
—*Fuente:* RODRÍGUEZ [802] (pp. 175-177).

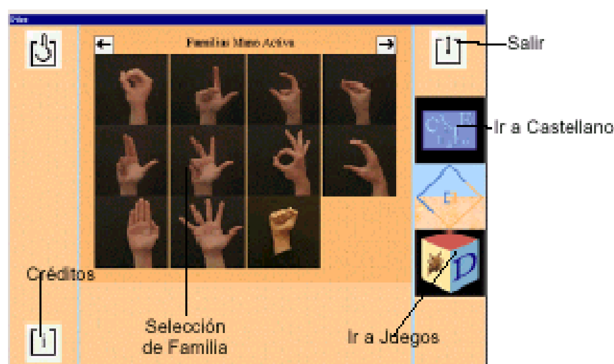


Figura A.8: *DILSE mostrando las distintas familias de configuraciones de la mano activa.*
—Fuente: FRUTOS, GONZÁLEZ, MINCHERO, NIETO [1558].

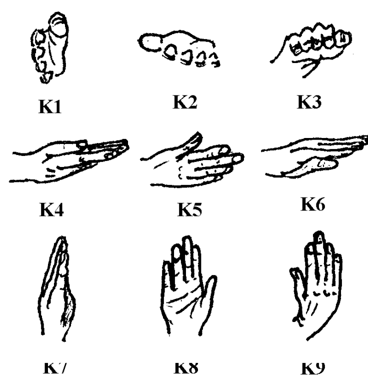


Figura A.9: *Queirotropemas identificados por María Ángeles* RODRÍGUEZ *en la Lengua de Signos Española.*
—Fuente: RODRÍGUEZ [802] (pp. 182-184).

A.6.3 Toponemas

La palabra toponema proviene del término griego $\tau\acute{o}\pi o\xi$ («lugar»). Dada una partición de la superficie del cuerpo en un número determinado de zonas (más que de la superficie, de una proyección bidimensional frontal del mismo), nos interesa identificar sobre qué zona o zonas se produce la articulación de un signo determinado. María Ángeles RODRÍGUEZ distingue veinticinco [802] (pp. 177-179), siendo las «grandes» zonas: espacio neutro (desde los hombros al estómago), cabeza, brazo izquierdo y brazo derecho.

A.6.4 Kinemas

El término kinema proviene del griego $\kappa\acute{\iota}\nu\eta\sigma\iota\zeta$ («movimiento»). Basándonos en los estudios lingüísticos previos que aparecen en la Tesis Doctoral de Rodríguez [802], en la Memoria de Licenciatura de MUÑOZ [1557] y en el estudio —reflejado en DILSE (y en su continuación con neologismos)— de FRUTOS, GONZÁLEZ, MINCHERO y NIETO [1558], distinguimos dos grupos de kinemas, los movimientos internos de una mano, aplicables a los dedos, que llamamos **kinemas dactílicos** (que producen cambios en el queirema), y otros movimientos, aplicables a la mano considerada como un todo (sin producir cambios en el queirema), aunque también a los dedos.

Destacamos seis kinemas dactílicos, tres variaciones angulares (kinemas simples) y tres complejos:

- $\Delta\angle^{d}_{art}$ ≡«variación en el ángulo de *flexión* de las articulaciones MF, IFD e IFP de los dedos trifalángicos (II-V) y en las articulaciones MF e IF del pulgar»;
- $\Delta\vee^{d}_{art}$ ≡«variación en el ángulo de *aducción lateral* de las articulaciones MF de los dedos I, II, IV y V»;
- $\Delta\vee_{\mathrm{CMC}}$ ≡«variación en el ángulo de *abducción palmar* de la articulación carpometacarpiana del pulgar»;
- PI ≡«movimiento de *pinzamiento*, con el objetivo de juntar dos yemas»;
- P ≡«Presionando la yema del pulgar sobre la uña de uno o más dedos, de pronto extender todos los dedos»;
- D ≡«Deslizamiento de los dedos a lo largo del pulgar o de la yema del pulgar».

Distinguimos los siguientes **ocho kinemas**, aplicables también a los dedos, y diversos **atributos**, que podríamos denominar componentes kinestésicos, de estos tipos de movimiento:

Kinemas	**Atributos**
LR ≡«en línea recta»	VV ≡«vaivén»
AR ≡«en arco»	DI ≡«discontinuo, a sacudidas»
BU ≡«bucles o lazos»	RE ≡«repetido»
CI ≡«circular o giratorio»	CO ≡«con contacto»
HE ≡«helicoidal o espiral»	CH ≡«choque o impacto»
ON ≡«ondulado»	VN ≡«velocidad normal»
ZZ ≡«en zig-zag o quebrado»	VR ≡«velocidad rápida»
	VL ≡«velocidad lenta»
	BR ≡«movimiento brusco»

Podríamos considerar más atributos, y lo haremos, pero a nivel particular, por ejemplo, en kinemas de tipo circular o helicoidal, debemos considerar el *eje de rotación*, las *velocidades*, linear y angular, dactílicas o no (correspondientes a kinemas dactílicos o más genéricos, respectivamente).

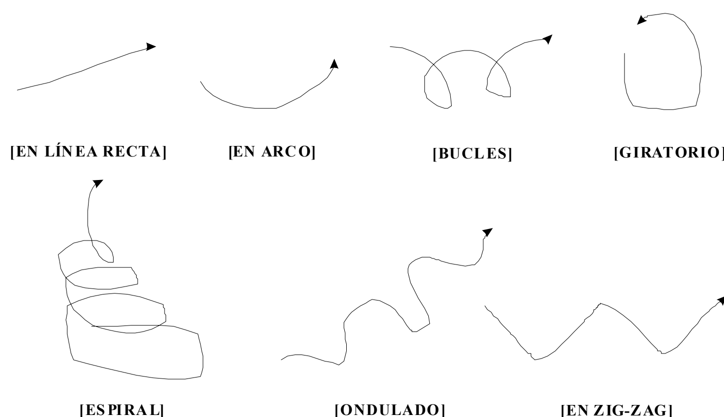


Figura A.10: *Kinemas que identificamos en la Lengua de Signos Española.*
—*Fuente:* Elaboración propia.

En la Lengua de Señas Española, todos los kinemas, salvo [ESPIRAL], se realizan en un plano. Por ello, los denominaremos **kinemas planos**.

El **atributo de contacto** tiene en la LSE, función distintiva entre queiremas (y por ende, entre toponemas), por ejemplo, FF e IS, o D y MF —*cfr.* Fig. A.7.

A.6.5 Kineprosemas

El término **kineprosema**, que Rodríguez [802] aplica a la dirección del movimiento de una mano, como un todo, proviene de los términos griegos $\kappa\acute{\iota}\nu\eta\sigma\iota\zeta$ («movimiento») y $\pi\rho\acute{o}\sigma\epsilon\iota\mu\iota$ («dirigirse a»). Siempre relativo

a un punto perteneciente a la persona signante, distinguimos seis direcciones básicas de movimiento (las seis primitivas básicas de orientación tridimensional) —*cfr.* Fig. A.11:

HF≡Hacia el Frente,

HC≡Hacia el Cuerpo,

HA≡Hacia Arriba,

HB≡Hacia aBajo,

HI≡Hacia la Izquierda,

HD≡Hacia la Derecha.

Para abreviar, podríamos notarlas: $\Downarrow$, $\Uparrow$, $\uparrow$, $\downarrow$, $\longrightarrow$ y $\longleftarrow$, respectivamente. El kineprosema fue definido por Prillwitz, Leven, Zienert, Hanke y Henning [1559] por la **dirección de los nudillos**.

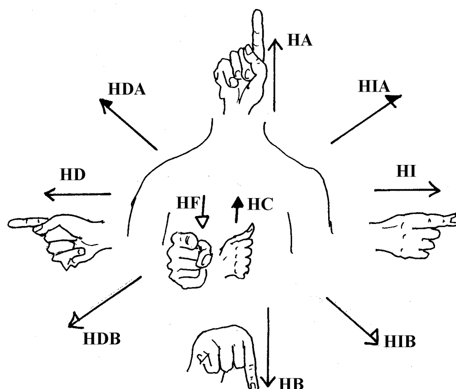


Figura A.11: *Kineprosemas identificados por María Ángeles* Rodríguez *en la Lengua de Signos Española. Además de las seis direcciones básicas de movimiento, están representadas las composiciones oblicuas, dos a dos.*
—*Fuente:* Rodríguez [802] (p. 181).

Podríamos pensar en todas sus composiciones, un total de 27 direcciones posibles de movimiento. Sin embargo, puede verse en los estudios de la LSE de María Ángeles Rodríguez [802] y de la lengua de señas catalana de Jorge Perelló y Juan Frigola [1530], cómo al analizar el movimiento de una mano, considerada como un todo, únicamente las cuatro composiciones destacadas en la Fig. A.11, son las interesantes:

$HIA \equiv HA + HI$,

$HDA \equiv HA + HD$,

$HIB \equiv HB + HI$,

$HDB \equiv HB + HD$.

Para abreviar, podríamos notarlas: $\nearrow$, $\nwarrow$, $\searrow$ y $\swarrow$, respectivamente.

A.7 Pero, ¿qué tiene de especial TU cara?

Según Young y Ellis [1560] —*cfr.* Ruiz Soler [1561] (p. 84)—, la importancia de las caras radica en los siguientes factores:

- Son percibidas muy tempranamente (gran interés de los bebés por las caras).
- Tienen propiedades perceptuales propias (*v. gr.* su representación configuracional: sus componentes, nariz, boca, etc., se reconocen peor aisladamente que en el contexto de la cara).
- Nuestra memoria las retiene prodigiosamente.
- Decisivas en el comportamiento social de los primates (identifican a los miembros del grupo y codifican los estados emocionales).

- Si puedes ver, entonces, normalmente, ¿hacia dónde miras primero a una persona en cualquier interacción social? A su cara.

Y es que diversos estudios —*cfr.* Gross, Rocha-Miranda y Bender [1562]; Perrett, Misstlin y Chitty [1563]— parecen confirmar la existencia de neuronas, las células ínfero-temporales (IT), que responden selectivamente a las caras —responden hasta veinte veces más a caras que a otros estímulos visuales (como enrejados sinusoidales, figuras geométricas simples u objetos tridimensionales) y su respuesta tiene una latencia entre 80 y 160 ms; tienen especificidad sensorial (no responden ante estímulos auditivos o táctiles) y la magnitud de las respuestas es constante, a pesar de rotaciones y alteraciones de tamaño, distancia o contraste —*cfr.* Ruiz Soler [1561] (p. 85)—. Aún más, ciertas células IT responden a alguna orientación particular («centradas en el observador»), mientras que otras responden de manera similar ante cualquier orientación («centradas en el objeto») —*cfr. v. gr.* Desimone, Albright, Gross y Bruce [1564]; Desimone [1565]; (*via* Ruiz Soler [1561], pp. 85-86); y también Hubel y Wiesel [1566], para un precedente en las neuronas del córtex visual del gato.

Por otro lado, como veremos en esta sección, la expresión de la cara (**prosoponema**[4]) posee funcionalidad distintiva en la LSE. Por ello, procede estudiar su reconocimiento. No obstante, esto excede los propósitos iniciales de nuestra tesis.

En las lenguas de señas, existen señas distintas, que, compartiendo todos los parámetros articulatorios considerados anteriormente, la única vía para su distinción es mediante la expresión facial de la persona que la articula. En la LSE, por ejemplo, [DULCE] y [DOLOR] —*cfr.* Fig. A.12.

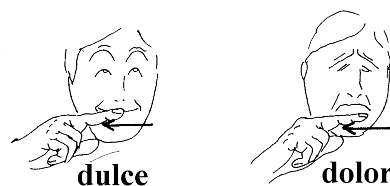


Figura A.12: *[DULCE] y [DOLOR], ejemplo de signos de la Lengua de Signos Española, únicamente distinguibles por el prosoponema.*
— *Fuente:* Rodríguez [802]

Por otro lado, muchas expresiones se intensifican usando la cara, por ejemplo, la duda, posibilidad, enojo, etc —*cfr.* Fig. A.13—. La diferencia entre un enunciado interrogativo y exclamativo también se resalta con ayuda de la expresión facial.

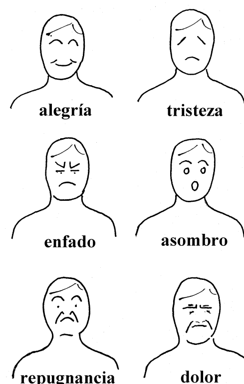


Figura A.13: *Las expresiones faciales más frecuentes en la Lengua de Signos Española.*
— *Fuente:* Perelló y Frigola [1530]

[4]María Ángeles Rodríguez [802] propone el término *prosoponema* —procedente del griego πρόσωπρον («faz», «máscara»)—, para indicar genéricamente la expresión de la cara.

En la LSE, las expresiones faciales más frecuentes son aquellas relacionadas con estados de *felicidad, tristeza, enojo, sorpresa, repugnancia* y *dolor* —*cfr.* PERELLÓ y FRIGOLA [1530]—, y quizás, esta taxonomía permita identificar todo el léxico. Considerando que existen sistemas mediante los cuales puede conocerse la expresión facial, por ejemplo —*cfr.* ESSA, DARRELL y PENTLAND [1567]—, o «Facial Waldo» —*cfr.* JOSLIN [1568]—, posiblemente, podamos caracterizar una expresión facial determinada mediante los cinco pseudo-terminales siguientes:

- **cejas** (*levantadas, relajadas* o *fruncidas*), de acuerdo con la variabilidad de un único grado de libertad;
- **ojos** (*abiertos* o *cerrados*), también según un único grado de libertad;
- **dirección de la mirada** (por ejemplo, mediante el seguidor ocular de los laboratorios Applied Science, —*cfr.* Fig. A.14;

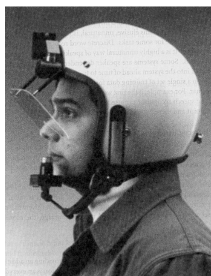


Figura A.14: *Existen varios sistemas de seguimiento ocular, para reconocer la dirección de la mirada, los cuales se están empleando, por ejemplo, como interfaces de comunicación sustitutivos portátiles, con aquellas personas que no pueden mover sus brazos o piernas. Un ejemplo de ellos es el seguidor ocular de los Laboratorios Applied Science, provisto de una cámara en la frente, que registra los ojos a través del espejo translúcido. La cámara que se ve en la barbilla, es opcional, y se encargaría de registrar lo visto por el usuario, para su análisis posterior.*
— *Fuente:* JACOB [1569] (p. 1506).

- **boca** (*sonrisas*, *irritaciones* y un *gradiente de abertura*), con dos grados de libertad;
- **parpadeo**.



Figura A.15: *Un actor humano, equipado con <Facial Waldo>, de* JOSLIN *[1568].*
— *Fuente:* BURDEA y COIFFET [809]

La medición de las actividades *electromiográfica* (EMG) y *electroencefalográfica* (EEG) relativas a la cara, permitirían completar nuestro sistema con el reconocimiento de ciertos prosoponemas. La medición de la actividad *electro-oculográfica* (EOG) permitiría, finalmente completarlo con reconocimiento de la dirección de la mirada. Este sistema evitaría dispositivos de adquisición de tipo exoesqueleto, tan aparatosos como, por ejemplo, «Facial Waldo» —*cfr.* JOSLIN [1568]; *vide* Fig. A.15.

Las expresiones faciales de felicidad, tristeza, enojo, sorpresa, repugnancia y dolor —*cfr.* Fig. A.13— son características o *estados psicológicos*, que como tales, quizás pudieran evaluarse por otros medios. La *presión sanguínea, frecuencia cardíaca, frecuencia respiratoria, diámetro pupilar, respuesta galvánica de la piel* (la resistencia eléctrica de la piel), etc., no son nada difíciles de medir en tiempo real —*cfr.* JACOB [1569]—; otra cuestión es, la caracterización a través de ellos, de los estados anteriormente relatados.

No obstante lo anterior, la importancia semiótica de la *componente oral* merece ser analizada aparte. Esta componente es una kinésica labial, más frecuente en sordos postlocutivos, aprendida en parte en la escuela y en general en la relación con personas oyentes. También posee un fuerte carácter contrastivo; por ejemplo, Marit VOGT-SVENDSEN [1570] analiza la función distintiva de dicha componente en treinta y siete signos de la Lengua de Signos Noruega, distinguiendo cinco rasgos de contraste: abertura de la mandíbula, forma de los labios, configuración de las mejillas, posición de la lengua, diferente forma de espirar —*cfr.* RODRÍGUEZ [802] (pp. 34ss).

* * *

«Una persona es discapacitada (disabled) en la medida en que se le impide su entera participación en la sociedad con las barreras que hemos construido.»
—A. ROULSTONE [1571]

B

Medidas de disimilitud entre distribuciones de probabilidad

En el Capítulo 17, proponíamos, para cada individuo, convertir su perfil descriptor dado por intervalos de extremos distribuciones de probabilidad, en un perfil descriptor donde no intervengan probabilidades, en realidad, en un perfil descriptor Φ-borroso de tipo 2, donde los extremos de los intervalos son subconjuntos borrosos ordinarios. Para llevar a cabo esto, necesitamos saber medir la distancia o divergencia entre distribuciones de probabilidad. Podemos hacerlo, directamente, esto es, a partir de las disimilitudes locales entre valores de las funciones de distribución, o indirectamente, a partir de medidas locales entre valores de sus funciones de densidad asociadas. En este último caso, Krzanowski *[50] distingue entre: medidas relacionadas con la medida de afinidad propuesta por* Bhattacharyya*, y medidas basadas en ideas de teoría de información. En cualquier caso, destacábamos la necesidad de utilizar divergencias ponderadas entre distribuciones de probabilidad. Todas ellas las recogemos en este Apéndice.*

B.1 Medidas directas

Entre funciones de distribución[1] de probabilidad, es frecuente utilizar —*cfr.* Huber [1574]; Rieder [1575]— la distancia *vertical* del supremo (distancia de Kolmogorov):

$$K(P,Q) = \sup_x |P(x) - Q(x)| \tag{B.1}$$

y las distancias de Cramér-von Mises:

$$d_\mu^2(P,Q) = \int |P(x) - Q(x)|^2 \, \mu(dx) \tag{B.2}$$

$$d_{\mu,1}(P,Q) = \int |P(x) - Q(x)| \, \mu(dx) \tag{B.3}$$

donde μ suele considerarse σ-finita.

Una distancia *oblícua*, es la distancia de Lévy[2]. Sean $P, Q \in \Delta$, $h, x \in \mathbb{R}$ y la condición:

$$(P,Q;h,x) \equiv P(x-h) - h \leq Q(x) \leq P(x+h) + h \tag{B.4}$$

[1] Una **función de distribución** (f.d.) es cualquier función $F : [-\infty, +\infty] \to [0,1]$ no decreciente tal que $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$. Observe el lector que no hay nada probabilístico, ni aleatorio en esta definición. Son, precisamente, sus usos en contextos probabilísticos, a saber: «la probabilidad de que X sea menor que x es $F(x-0)$», «la probabilidad de que X no sea mayor que x es $F(x+0)$», «la probabilidad de que X sea igual a x es $F(x+0) - F(x-0)$», los que justifican la normalización de las funciones de distribución exigiendo que sean continuas, bien por la izquierda, bien por la derecha —*cfr.* Schweizer y Sklar [477]—. Si Δ denota el conjunto de todas las funciones de distribución continuas por la izquierda en $\mathbb{R}$, y $\mathfrak{D}$ el subconjunto de Δ de aquellas f.d. tales que $F(-\infty + 0) = F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty - 0) = F(+\infty) = 1$. Por lo general, suele suponerse que las **funciones de distribución de probabilidad** son funciones de distribución de $\mathfrak{D}$ —al asumir, dada una variable aleatoria X definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que $P\{\omega \in \Omega : -\infty < X(\omega) < +\infty\} = 1$—, aunque hay situaciones en las que $P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = +\infty\} > 0$ —*cfr.* Feller [1572] (p. 360); Hammersley [1573] (p. 652); Schweizer y Sklar [477] (p. 44).

[2] La usó, en 1925, P. Lévy, aunque no la definió, como métrica para el conjunto de las funciones de distribución continuas por la izquierda en $\mathbb{R}$. La primera definición explícita apareció en 1936, en una nota de Lévy en un libro de Fréchet [1576].

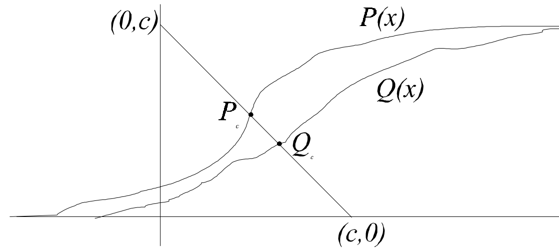
entonces, la distancia de LÉVY $d_L(P,Q)$ se define como:

$$d_L(P,Q) = \inf\{h \in \mathbb{R}^+ : (\forall x \in \mathbb{R})(P,Q;h,x)\} \tag{B.5}$$

Si $\forall c \in \mathbb{R}$, P_c y Q_c son los puntos de intersección de la recta $y = c - x$ con las distribuciones P y Q, respectivamente, entonces, la distancia de LÉVY es —*cfr.* SALES VALLES [1577]:

$$d_L(P,Q) = \sup_{c\in\mathbb{R}} d(P_c,Q_c) \tag{B.6}$$

Obsérvese que si $c \to \pm\infty$, entonces $d(P_c,Q_c) \to 0$, y por tanto se alcanza el supremo.



SCHWEIZER y SKLAR [477] (p. 45) proponen modificar la distancia de LÉVY de la siguiente manera —modificación inspirada, a su vez, en modificación propuesta previamente por SIBLEY [1578]:

$$d_{Lm}(P,Q) = \inf\{h \in (0,1] : (\forall x \in (-1/h,1/h))((P,Q;h,x) \wedge (Q,P;h,x))\} \tag{B.7}$$

También podemos medir la distancia entre distribuciones a partir de sus densidades asociadas. KRZANOWSKI [50] distingue entre: (a) medidas relacionadas con la medida de afinidad de BHATTACHARYYA [1579], y (b) medidas basadas en ideas procedentes de la teoría de la información.

B.2 Medidas relacionadas con la medida de afinidad de Bhattacharyya

En este apartado seguimos fundamentalmente la exposición de MCLACHLAN [1580] (pp. 22-26), siendo en estas páginas donde el lector puede encontrar mayor información y un número mayor de medidas. MCLACHLAN considera, entre las medidas a las que se refiere el título, la propia **medida de afinidad** de BHATTACHARYYA [1579]:

$$\rho(P,Q) = \int \sqrt{p(x)q(x)}d\mu \tag{B.8}$$

y sus descendientes inmediatas, la conocida actualmente como **separación angular** —*cfr.* BHATTACHARYYA [1581]:

$$\delta_B(P,Q) = \cos^{-1}(\rho(P,Q)) \tag{B.9}$$

y una medida que usó KOLMOGOROV en unas notas no publicadas:

$$\delta_{KO}(P,Q) = 1 - \rho(P,Q) \tag{B.10}$$

CHERNOFF [1582] introdujo:

$$\delta_C(P,Q) = -\log \int p^{\alpha}(x)q^{1-\alpha}(x)d\mu \tag{B.11}$$

con $\alpha \in [0,1]$. Observe el lector que, si $\alpha = 0.5$, entonces la medida de CHERNOFF se reduce a:

$$\delta_C^{\alpha=.5}(P,Q) = -\log \rho(P,Q) \tag{B.12}$$

que en muchas ocasiones es citada como la distancia de BHATTACHARYYA —*cfr.* HAND [1117] (p. 134); PARDO [703] (p. 138).

MATUSITA [1583] define:

$$\delta_M(P,Q) = \left(\int \left(\sqrt{p(x)} - \sqrt{q(x)} \right)^2 d\mu \right)^{1/2} \tag{B.13}$$

que muchas veces es citada como distancia de (Ernst David) HELLINGER —*cfr.* BERAN [1584]; LE CAM [1585]; MCLACHLAN [1580]; RIEDER [1575]; PARDO [703] (p. 138).

Se observa que:

$$\delta_M(P,Q) = (2 - 2\rho(P,Q))^{1/2} \tag{B.14}$$
$$= (2\delta_{KO}(P,Q))^{1/2} \tag{B.15}$$

LISSACK y FU [1586] definen:

$$\delta_{LF}(P,Q) = \int \left| \frac{p(x) - q(x)}{p(x) + q(x)} \right|^\alpha (p(x) + q(x))\, d\mu \tag{B.16}$$

con $0 < \alpha < \infty$, que es una generalización de la distancia variacional de KOLMOGOROV[3]:

$$\delta_K(P,Q) = \int |p(x) - q(x)|\, d\mu \tag{B.19}$$

B.3 Medidas basadas en ideas procedentes de la teoría de la información

En los orígenes de la teoría de la información probabilística —según relata Leandro PARDO [703] (p. 15)— destacan cuatro nombres y tres fechas: BOLTZMANN [1587], en 1896, SHANNON [701], en 1948, y KULLBACK y LEIBLER [1588], en 1951. La noción de entropía de SHANNON, asociada a un experimento aleatorio, como una medida de la incertidumbre asociada al mismo —y, por tanto, de la cantidad de información que proporciona—, tiene su precedente en la entropía probabilística de BOLTZMANN en termodinámica y ésta, a su vez, en la entropía no probabilística de CLAUSIUS [1589], en 1864, asociada a un sistema físico. KULLBACK y LEIBLER introducen el concepto de divergencia, como una medida de la distancia entre dos distribuciones de probabilidad. Desde ese momento, sus incursiones en múltiples campos, de la mano de sus aplicaciones, no ha tenido final[4].

Sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto de posibles resultados cuyas probabilidades de ocurrencia son $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Sea X la variable aleatoria discreta que describe el experimento aleatorio asociado a tal situación, $P(X = a_i) = p_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se trata de definir una medida de la incertidumbre asociada al experimento aleatorio X. La **entropía de Shannon** [701], de la variable aleatoria X (o de la distribución P) se expresa por —*cfr.* PARDO [703] (p. 22):

$$H(X) = H(P) \tag{B.20}$$
$$= H(p_1, \ldots, p_n) \tag{B.21}$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \tag{B.22}$$

[3] Bajo la aproximación que proporciona el modelo de mixturas al análisis discriminante, cuando la realización x proviene de una mixtura de dos posibles grupos, en proporciones $\pi_i \geq 0$ (la probabilidad a priori de que x pertenezca al grupo i, de tal manera que $\pi_1 + \pi_2 = 1$), entonces, si los grupos se identifican mediante las funciones de distribución P y Q, la distancia de LISSACK y FU [1586] se define como:

$$\delta_{LF}(P,Q) = \int |\tau_p(x) - \tau_q(x)|^\alpha (\pi_p p(x) + \pi_q q(x))\, d\mu \tag{B.17}$$

donde $0 < \alpha < \infty$, y $\tau_p(x) = \pi_p p(x)/\pi_p p(x) + \pi_q q(x)$, y $\tau_q(x) = \pi_q q(x)/\pi_p p(x) + \pi_q q(x)$ son las probabilidades a posteriori de que x pertenezca al grupo identificado por P y por Q, respectivamente. El caso $\alpha = 1$ es la **distancia variacional** de KOLMOGOROV:

$$\delta_K(P,Q) = \int |\pi_p p(x) - \pi_q q(x)|\, d\mu \tag{B.18}$$

[4] No está de más que reproduzcamos la lista de campos donde se han aplicados las nociones de entropía y divergencia —*cfr.* PARDO [703] (pp. 15-16): *Termodinámica y mecánica estadística; Estimación no paramétrica de funciones de densidad; Diseño de experimentos; Tablas de contingencia; Análisis de series temporales; Análisis de señales y de textos; Tomografía computarizada; Reconstrucción de imágenes; Procesos de búsqueda; Análisis de la fiabilidad de sistemas; Teoría de colas; Teoría de juegos; Teoría de la decisión; Economía, comercio internacional, concentración industrial, problema de la cartera, etc.; Clasificación y reconstrucción de formas; Actividades bancarias y seguros; Publicidad y estudios de mercado; Geografía; Distribución de la población, planificación urbana y regional y transportes; Modelos biológicos, ecológicos y médicos;* etc.

Si X es una v.a. discreta que toma los valores $\{a_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ con las probabilidades $\{p_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$, entonces:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{\infty} p_i \log p_i \tag{B.23}$$

supuesto que converja la serie.

Si X es una v.a. continua, con función de densidad $f(x)$, entonces, la entropía de X viene dada por:

$$h(X) = -\int_{\mathbb{R}} f(x) \log f(x) dx \tag{B.24}$$

supuesto que exista la integral.

La unidad de entropía depende de la base que se tome para definir el logaritmo. Caso de tomar logaritmos en base 2, la **unidad de entropía** se conoce como **BIT** (*binary unit*), siendo la entropía correspondiente a una v.a. con dos resultados equiprobables:

$$H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \log_2 2 \tag{B.25}$$

$$= 1 \text{ BIT} \tag{B.26}$$

Si la base es 10, la unidad de entropía se denomina **DIT** (*decimal unit*), y es la entropía correspondiente a una v.a. con diez resultados equiprobables:

$$H\left(\frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{10}\right) = \log_{10} 10 \tag{B.27}$$

$$= 1 \text{ DIT} \tag{B.28}$$

Si se trata de un logaritmo neperiano, la unidad de entropía se denomina **NAT** (*Naeper unit*), y es la entropía correspondiente a una variable aleatoria continua que se distribuye según una uniforme en $(0, e)$:

$$h(U(0,e)) = -\int_0^e \frac{1}{e} \operatorname{Ln} \frac{1}{e} dx \tag{B.29}$$

$$= 1 \text{ NAT} \tag{B.30}$$

La entropía de SHANNON de un experimento aleatorio fue la primera medida de entropía que consideraba las probabilidades de ocurrencia de los resultados del mismo[5]. Posteriormente, se han propuesto muchísimas medidas de la incertidumbre asociada a un experimento aleatorio. Debe observar el lector que el máximo de la entropía, o sea, el máximo de la incertidumbre, de una variable aleatoria discreta, se alcanza para la distribución de probabilidad uniforme, lo que no es cierto para una v.a. continua, pues, por ejemplo, $h(U(0,1)) = 0$ —que tampoco es un mínimo, pues la entropía correspondiente a v.a. continuas puede ser negativa—. En el caso de las v.a. discretas, podemos decir que la distribución de probabilidad menos cierta, la que tiene menor certeza asociada, es la distribución de probabilidad uniforme[6].

Para medir la «distancia informativa» entre dos distribuciones de probabilidad, se han propuesto las conocidas como **medidas de divergencia**. Se trata de medir la información que una variable Y proporciona acerca de otra variable X, es decir, la cantidad de incertidumbre probabilística que se pierde respecto de X al observar Y. Se supone que una variable proporciona información completa sobre sí, o en otras palabras, se admite que, al observar X se pierde toda la incertidumbre probabilística que pudiérase tener acerca de X. De aquí que la divergencia entre cualquier distribución y ella misma, sea cero: la «distancia informativa» es cero.

[5] SHANNON publica en 1948 su propuesta de medida de entropía [701]. Anteriormente, HARTLEY [1590], publicó, en 1928, una medida de entropía que únicamente tenía en cuenta el número de resultados, pero no las probabilidades de ocurrencia de los mismos:

$$H(X) = c \log_b |X| \tag{B.31}$$

siendo $b, c \in \mathbb{R}^+$, con $b > 1$.

[6] En teoría de la información, se han propuesto las llamadas **medidas de certidumbre**. Un ejemplo es la **energía informacional**, propuesta por ONICESCU [1591] en 1966, que para una v.a. discreta X descriptora del experimento aleatorio con distribución $P(X = a_i) = p_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, se define por:

$$e(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \tag{B.32}$$

que, efectivamente, alcanza un mínimo para la distribución uniforme.

Si bien este hecho puede ser considerado un axioma a la hora de definir las medidas de divergencia, la realidad es que no existe la definición de medida de divergencia, y tampoco de medida de incertidumbre probabilística o entropía, noción subyacente al de medida de divergencia. Lo que sí hay son caracterizaciones particulares —por ejemplo, una para la entropía de Shannon correspondiente a v.a. discretas y finitas, es proporcionada por Leandro Pardo [703] (teorema 1.3).

Dadas dos medidas de probabilidad, P y Q, definidas sobre un universal finito $\mathcal{X} = x_1, \ldots, x_n$, denotando, como es frecuente, $p_i = P(\{x_i\})$ y $q_i = Q(\{x_i\})$, asumiendo que P es absolutamente continua con respecto a Q (en el caso finito, esto significa que $q_i = 0 \Longrightarrow p_i = 0$), y considerando la extensión continua de $f(x, y) = x \log(x/y)$ a $[0, +\infty)^2$, mediante la definición de $f(0, y) = 0$ para $y \geq 0$, se define la medida de información discriminatoria o **medida de divergencia de Kullback-Leibler** —*cfr.* Kullback y Leibler [1588]; Kullback [1592]; Shore [1593]; Cover y Thomas [702]; Pardo [703]—, en el caso finito, como el funcional $D_{\mathrm{KL}} : (\mathcal{P}_{\mathcal{X}})^2 \to [0, +\infty)$

$$D_{\mathrm{KL}}(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i, q_i) \tag{B.33}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \log\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \tag{B.34}$$

y en el caso continuo, si P y Q admiten las densidades p y q, con respecto a alguna medida μ, entonces:

$$D_{\mathrm{KL}}(P, Q) = \int p(x) \log\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) d\mu \tag{B.35}$$

Kullback y Leibler tomaron la idea de esta divergencia, a partir de un trabajo de Jeffreys [1594], publicado cinco años antes, en 1946 —*cfr.* Pardo [703] (p. 71)—. La divergencia $D_{\mathrm{KL}}(P, Q)$ es conocida también como ganancia de información de Q, con respecto a P, y mide la cantidad de información ganada por un observador al darse cuenta de que la distribución de probabilidad cambia de Q a P, o sea, $D_{\mathrm{KL}}(P, Q)$ cuantifica el coste de predecir resultados usando Q, cuando, en realidad, P es la descripción correcta de la incertidumbre —*cfr.* McCulloch [1595]. Ganamos, precisamente si la que realmente es correcta, P, es más probable que Q, la que no lo es.

Desde que Kullback y Leibler definieron D_{KL}, han sido propuestas muchas medidas de divergencia para dos distribuciones de probabilidad P y Q. Por ejemplo, una propuesta de Jeffreys [389]:

$$D_{\mathrm{J}}(P, Q) = D_{\mathrm{KL}}(P, Q) + D_{\mathrm{KL}}(Q, P) \tag{B.36}$$

es una simetrización particular de la divergencia de Kullback y Leibler.

La r-divergencia D_r de Rényi [1596], publicada en 1961, fue la primera generalización[7] de D_{KL}, si $r \notin \{0, 1\}$:

$$D_r^1(P, Q) = (r\,(r-1))^{-1} \log\left(\sum_{i=1}^{M} p_i^r q_i^{1-r}\right) \tag{B.37}$$

Csiszár [1597] y Ali y Silvey [1598] definieron la familia de las conocidas como φ-divergencias:

$$D_{\varphi}(P, Q) = \sum_{i=1}^{M} q_i \varphi\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \tag{B.38}$$

donde $\varphi : [0, +\infty) \to (0, +\infty]$ es convexa, asumiendo que p y q son positivas, o en otro caso, definiendo $0\varphi(0/0) = 0$ y $0\varphi(p/0) = p \lim_{r\to\infty}(\varphi(r)/r)$. La divergencia D_{KL} pertenece a esta familia, siendo el caso particular $\varphi(x) = x \log x$.

Esta familia comprende, como casos particulares, muchas divergencias propuestas por otros autores —*cfr.* Pardo [703] (p. 94): distancia variacional o estadística, para $\varphi(x) = |x - 1|$; divergencia χ^2 o de Kagan [1599], para $\varphi(x) = (1 - x)^2$; de Matusita [1600], para $\varphi(x) = |1 - x^a|^{1/a}$, $a \in (0, 1)$; de Balakrishnan y Sanghvi [1601], para $\varphi(x) = (x-1)^2/(x+1)$; de Rathie y Kannappan [1602, 1603], para $\varphi(x) = (x^s - x)(2^{s-1} - 1)^{-1}$, $s \neq 1$; media armónica, para $\varphi(x) = 1 - 2^{1/r}(1 + x^{-r})^{-1/r}$; de Cressie y Read [1604], para $\varphi(x) = (a(a + 1))^{-1}(x^{a+1} - x)$, $a \notin \{-1, 0\}$; de Rukhin [1605], para $\varphi(x) = (a + (1 - a)x)^{-1} - 1$, $a \in [0, 1)$; de Lin, para $\varphi(x) = ax \log x - (ax + 1 - a) \log(ax + 1 - a)$; etc.

[7] Usando la misma idea, y en el mismo trabajo de 1961, Rényi introdujo la generalización de la entropía de Shannon [701] —*cfr.* Pardo [703] (p. 43).

Observe el lector que la r-divergencia D_r de RÉNYI no es un caso particular de φ-divergencia. MENÉNDEZ, MORALES, PARDO y VAJDA [1606], definen una clase más amplia de divergencias, las (h,ϕ)-divergencias —*cfr.* PARDO [703] (p. 95):

$$D_{\phi}^{h}(P,Q) = \sum_{a=1}^{A} \eta_a h_a D_{\phi_a}(P,Q) \tag{B.39}$$

$$= \sum_{a=1}^{A} \eta_a h_a \left(\sum_{i=1}^{M} q_i \phi_a \left(\frac{p_i}{q_i} \right) \right) \tag{B.40}$$

siendo η_a pesos positivos, $\phi_a : [0,+\infty) \to (0,+\infty]$ es convexa, asumiendo que p y q son positivas, o en otro caso, definiendo $0\phi_a(0/0) = 0$ y $0\phi_a(p/0) = p \lim_{r\to\infty}(\phi_a(r)/r)$, y h_a funciones no decrecientes y continuas en el rango de la función $D_{\phi_a}(P,Q)$, o sea, en $(0, \phi_a(0) + \lim_{r\to\infty}(\phi_a(r)/r))$, con $h_a(0) = 0$. La r-divergencia de RÉNYI [1596] sí es un caso particular de (h,ϕ)-divergencia, para $h_a(x) = (r\,(r-1))^{-1} \log(1 + x\,\mathrm{signum}(r(r-1)))$ y $\phi_a(x) = (x^r - 1)\,\mathrm{signum}(r(r-1))$, con $r \notin \{0,1\}$.

Podemos encontrar más ejemplos de medidas de divergencia, por ejemplo, en el libro de Leandro PARDO [703]; en el artículo de KAPUR [1607]; en el libro publicado electrónicamente de Inder Jeet TANEJA [1608]; y por citar dos sitios «vivos»: `http://rgmia.vu.edu.au/papersinfth.html`.

B.4 Divergencias ponderadas

Los ejemplos 302 (pág. 438) y 303 (pág. 438), advierten de un inconveniente en el uso generalizado de las divergencias.

BELIS y GUIASU [1609], en 1968, fueron los primeros que propusieron una expresión para la entropía de SHANNON con ponderaciones. Posteriormente, Pedro GIL [1610], en 1975, hizo una propuesta más natural. Sea $\{a_1,\dots,a_n\}$ un conjunto de posibles estados cuyas probabilidades de ocurrencia son $\{p_1,\dots,p_n\}$. Sea X la variable aleatoria discreta que describe el experimento aleatorio asociado a tal situación, $P(X = a_i) = p_i$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Consideremos que la información que reporta el hecho de que el sistema esté en un estado a_i posea diferente importancia, significación o utilidad, que si está en otro estado a_j. Para tener en cuenta esta diferenciación, se asocia a cada estado a_i un índice ponderal $u_i \in [0,\infty)$, indicador de la importancia relativa de la información asociada a dicho estado, respecto de la información asociada a los demás estados. Parece natural exigir que si la información asociada a un estado no es relevante, su índice asociado sea cero. La **entropía ponderada de Shannon** se expresa por —*cfr.* PARDO [703] (p. 48):

$$H^w(X) = H^w(P) \tag{B.41}$$

$$= H^w(p_1,\dots,p_n) \tag{B.42}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{\sum_{j=1}^{n} p_i u_i} p_i \log p_i \tag{B.43}$$

Fueron TANEJA y TUTEJA [1611], en 1984, los primeros en proponer una **divergencia ponderada**, en realidad, una modificación ponderada de la divergencia D_{KL} de KULLBACK y LEIBLER:

$$D_{\mathrm{KL}}^{w}(P,Q) = \sum_{i=1}^{M} u_i p_i \log \frac{p_i}{q_i} \tag{B.44}$$

siendo $w = \{u_1,\dots,u_M\}$ un multiconjunto de índices ponderales no negativos. Esta expresión presenta varios inconvenientes —*cfr.* PARDO [703] (pp. 98-99)—, a saber, primero, si para todo $i \in \{1,\dots M\}$, $u_i = u$, entonces, $D_{\mathrm{KL}}^{w}(P,Q) = uD_{\mathrm{KL}}(P,Q)$, cuando lo más natural es que fuese $D_{\mathrm{KL}}^{w}(P,Q) = D_{\mathrm{KL}}(P,Q)$; segundo, para algunas distribuciones, $D_{\mathrm{KL}}^{w}(P,Q) < 0$, por lo que el mínimo de $D_{\mathrm{KL}}^{w}(P,Q)$ no es cero; tercero, el mínimo de $D_{\mathrm{KL}}^{w}(P,Q)$ no se alcanza cuando $P = Q$, sino que depende del valor de los índices ponderales u_i. La consideración de todas estas condiciones ha hecho que la expresión anterior haya evolucionado hasta:

$$D_{\mathrm{KL}}^{w}(P,Q) = \sum_{i=1}^{M} \frac{u_i q_i}{\sum_{j=1}^{M} u_j p_j} \left(\frac{p_i}{q_i} \log \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_i}{q_i} + 1 \right) \tag{B.45}$$

la cual es no negativa, para cualesquiera distribuciones P y Q, y vale cero, sólo cuando $P = Q$, y tiene como caso particular D_{KL}, cuando para todo $i \in \{1,\dots M\}$, $u_i = u$.

Leandro Pardo [1612] define las (h, ϕ)-divergencias —*cfr.* Ec. B.40— ponderadas:

$$D_{\phi}^{h,w}(P,Q) = \sum_{a=1}^{A} \eta_a h_a D_{\phi_a}^{w}(P,Q) \tag{B.46}$$

$$= \sum_{a=1}^{A} \eta_a h_a \left(\sum_{i=1}^{M} \frac{u_i}{\sum_{j=1}^{M} u_j p_j} q_i \phi_a \left(\frac{p_i}{q_i} \right) \right) \tag{B.47}$$

siendo η_a pesos positivos, $\phi_a : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty]$ es convexa, asumiendo que p y q son positivas, o en otro caso, definiendo $0\phi_a(0/0) = 0$ y $0\phi_a(p/0) = p \lim_{r \rightarrow \infty} (\phi_a(r)/r)$, y h_a funciones positivas no decrecientes y continuas en el rango de la función $D_{\phi_a}^{w}(P,Q)$, con $h_a(0) = 0$ y $\phi'_a(1) = 0$.

C

La comunidad moral de los iguales

«La tierra no discute,
No se lamenta, no hace planes,
No grita, no se apura, no persuade,
no amenaza, no promete,
No discrimina, no tiene
fallos concebibles,
No pone fin a nada, no rechaza nada,
no excluye a nadie.»
—Walt WHITMAN
<A los decidores de palabras>



«Otro concepto de animal es necesario, más acertado, y quizás, más místico. Los tratamos condescendientemente debido a su incompletitud, debido a su trágico destino de ser seres muy inferiores a nosotros. Y en esto nos equivocamos, nos equivocamos muchísimo. Los animales no serán medidos por el hombre. En un mundo más antiguo y más completo que el nuestro, ellos viven terminados y completos, favorecidos con extensiones de los sentidos que nosotros hemos perdido o que nunca alcanzamos, conviviendo con voces que nosotros nunca oiremos. No son hermanos, tampoco subordinados; son otras naciones, atrapados junto a nosotros en la red de la vida y el tiempo, compañeros prisioneros del esplendor y de las penalidades de la tierra.»
—Henry BESTON <*The Outermost House*>

Es otra arenga. El haber hablado de la comunidad de los iguales, comunidad humana, en el capítulo 8.2, ha conmovido mis sentimientos de ser vivo, más que de especie. Aunque debemos ser realistas: pretender ampliar esta comunidad a los grandes primates, como defienden en su libro, Paola CAVALIERI *y Peter* SINGER *[51], es un objetivo a largo plazo, a muy largo plazo; y pretender ampliarla a otros seres vivos, es, sencillamente, una utopía. Pero la justicia, como la estabilidad y el equilibrio, sólo es una cuestión de tiempo, así que no es una ucronía. He ahí el porqué de este apéndice. Al igual que en el capítulo 1, donde se reunieron otras tantas arengas, pido disculpas, pues dado su carácter, su síntesis reflexiva no me pertenece.*

C.1 Habilidades de comunicación animal

«No puedes estrechar la mano con un puño cerrado.»
—Indira GANDHI (Observación en una conferencia de prensa, Nueva Delhi, 19-10-1971)

De todos nos son bien conocidos los estudios sobre la comunicación animal en varias especies, por ejemplo, los iniciados por Karl VON FRISCH en 1919 en torno a los comportamientos lingüísticos de las abejas —*cfr.* LINDAUER [1613]; VON FRISCH [1614]—, delfines —*cfr. v. gr.* LILLY [1615, 1616]; `http://www.aquathought.com`—, marsopas —*cfr.* KELLOGG [1617]—, o chimpancés salvajes o controlados —*cfr.* GOODALL [1618, 1619]; GOODALL y BERMAN (Contrib.) [1620].

En la actualidad, existe una especialización de la Semiótica, la Zoosemiótica —*cfr.* SEBEOK [1621]— cuyos centros de interés son el estudio de la naturaleza general de los sistemas de comunicación animales tanto inter

como intra-especie —*cfr.* MARLER [1622] [1623]; HOCKETT [1624]; SEBEOK [1625]—, los orígenes evolutivos del lenguaje humano, sobre todo considerando los posibles lazos filogenéticos con otros sistemas de comunicación de los primates —*cfr.* WHITE [1626]; LENNEBERG [1627]; HOCKETT y ASCHER [1628]—, al estudio comparativo de los sistemas de comunicación animal con los sistemas de comunicación humanos, y a la comunicación entre el hombre y diferentes especies: con abejas, por ejemplo, STECHE —*cfr.* SEBEOK [1621]—, otros insectos —*cfr.* MASSON y BROSSUT [1629]—, ranas —*cfr.* LEROY [1630]—, delfines —*cfr.* WÜRSIG [1631]— y con primates —*cfr.* p. ej. MENZEL [1632].

La comunicación animal parece ser fundamentalmente pragmática y funcionalista, por lo que si está en nuestro ánimo el compararla con la comunicación humana, deberíamos hacerlo *desde el punto de vista de una lingüística fuertemente funcional*, por ejemplo, la de Leonard BLOOMFIELD [1633], *cuya semántica se describe a partir de la situación conductual y social, y olvidarnos de la influencia del lenguaje* —*cfr.* RIBA I CAMPOS [1634].

SEBEOK [1635] distingue entre sistemas zoosemióticos, códigos autoorganizados y autoregulados, independientemente del lenguaje, y sistemas antroposemióticos, culturales, modelados por el lenguaje. Aunque muchos autores opinan que todo código no verbal de comunicación humano está influenciado por el lenguaje —*cfr.* MCNEILL [1636]—, o al menos de una organización paralela a la suya —*cfr.* BIRDWHISTLE [1637]—, otros defienden lo contrario, lo cual puede ser más evidente en la fase anterior al desarrollo del lenguaje —*cfr.* SPITZ [1638]; GUYOT [1639].

Diversos estudios destacan la importancia de los gestos como recursos prelingüísticos —*cfr.* BRUNER [1640]; CASELLI [1641]; BATES, O'CONNEL y SHORE [1642]—, pudiendo concluirse, empíricamente, que en el desarrollo del lenguaje en un niño, el signo precede a la palabra —*cfr.* SCHLESINGER y MEADOW [1643]; BONVILLIAN [1644].

C.2 Conversaciones entre grandes monos

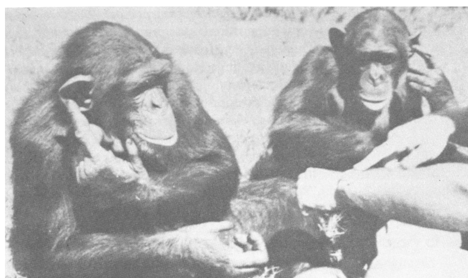


Figura C.1: *Interacción lingüística interespecífica.* — *Fuente:* Humberto R. MATURANA y Francisco J. VARELA [1] (p. 214 de la versión inglesa revisada de 1998). A su vez, procede de C. BLAKENMORE, p. 125, de una fotografía perteneciente al Instituto para el Estudio de los Primates, de la Universidad de Oklahoma.

> *«Hay ciento noventa y tres especies vivientes de monos y simios. Ciento noventa y dos de ellos están cubiertos de pelo. La excepción es un simio desnudo que se autodenomina "Homo sapiens".»*
> —Desmond MORRIS [1645] (Introducción)

Una gran parte de la investigación se centra en estudiar la comunicación entre los animales y el hombre. Resulta evidente que somos más parecidos a los grandes simios (monos antropoides o póngidos: chimpancé, gorila y orangután) que a los monos de tamaño inferior (platirrinos, catirrinos y cinomorfos). Dos han sido las tendencias para enseñarles un lenguaje: aquéllas cuyo objetivo es conseguir del animal, cierta competencia sobre el lenguaje verbal humano (usualmente, el inglés), mediante léxicos artificiales, como fichas, dibujos, fotografías, un teclado de conceptos, o incluso la propia emisión vocal y las que proponen que aprendan un sistema de comunicación no verbal, que puede ser artificial, un lenguaje signado o un lenguaje de signos determinado (usualmente, el ASL), acompañado o no de un refuerzo oral (en inglés) por parte de ciertos instructores.

Parece imposible fisiológicamente que un simio hable. La razón es meramente anatómica. El lenguaje articulado es posible en el hombre, debido a que hacia la edad de dos años, la laringe desciende hacia la base del cuello, aumentando el tamaño de la faringe, que funciona como caja de resonancia a los sonidos producidos por las cuerdas vocales de la laringe, permitiendo su modificación o modulación —*cfr.* FOUTS, SHAPIRO y O'NEIL [1646]; LAITMAN [1647]—. En cambio, en los primates se mantiene más o menos al nivel de las tres vértebras cervicales del cuello, de manera que su faringe es muy pequeña y la modulación ha de efectuarse por los labios y la boca —*cfr.* Fig. C.2.

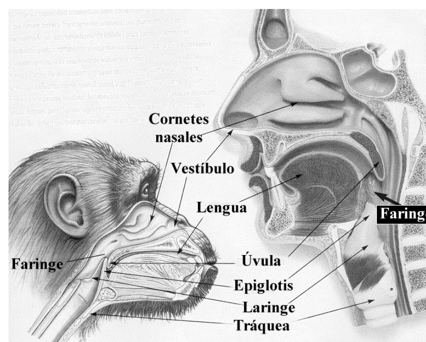


Figura C.2: *Faringe y laringe del simio y del ser humano.*
— *Fuente:* Adaptado de QUO.

Los primeros intentos conocidos para enseñar a hablar a un primate, proceden del siglo XVIII, cuando Peter CAMPER, un anatomista holandés, intentó, sin éxito, enseñar a hablar a un orangután —*cfr.* CHARLINE [1648].

En 1916, William FURNESS consigue que un orangután pronuncie las palabras inglesas «*mama*» y «*cup*». Posteriormente, Winthrop y Lucia KELLOGG, durante 16 meses, intentaron que hablase su mona Gua, y aunque no consiguieron que pronunciase nada, observaron que entendía cerca del centenar de palabras —*cfr.* CHARLINE [1648]—. En 1954, Keith y Cathy HAYES, dan por concluido su experimento con *Viki*, una chimpancé que, tras seis años de entrenamiento, logró pronunciar cuatro palabras inglesas: «*papa*», «*mama*», «*cup*» y «*up*» —*cfr.* FOUTS, SHAPIRO y O'NEIL [1646].

Ante estos continuos fracasos, otros investigadores recurrieron a léxicos artificiales. Ann James y David PREMACK trabajaron con la chimpancé *Sarah* —*cfr.* Ann James PREMACK [1649]; David PREMACK [1650] [1651, 1652]; Ann James PREMACK y David PREMACK [1653, 1654]—. El entrenamiento, apoyado en técnicas de refuerzo básicamente de recompensas y castigos, comenzó cuando *Sarah* tenía cinco años y consiguieron unos resultados excelentes: capacidad de construcción de oraciones organizadas jerárquicamente, clases conceptuales (color, nombre, forma, medida), predicados, ciertos cuantificadores, conectivas lógicas, negaciones y ciertas preguntas (quién, qué) —*cfr.* RIBA I CAMPOS [1634]—. Posteriormente, WOODRUFF y David PREMACK [1655], consiguieron con un grupo de chimpancés, incluida *Sarah*, conductas intencionales de engaño o mentira, aunque esto no debe sorprendernos, pues eran conocidas —*cfr.* SEBEOK [1656]— conductas parecidas entre los monos rhesus, que intercambian comunicaciones meta-lingüísticas para distinguir entre lo que es broma y lo que es en serio.

Estas experiencias, demuestran, y son muchos los psicolingüistas que opinan lo mismo, que estos simios han aprendido, no sólo variados comportamientos expresivos, si no también un verdadero lenguaje con una verdadera sintaxis (aparte de la semántica, inherente al entendimiento conceptual).

En esta línea se expresa el equipo de Duane M. RUMBAUGH y Timothy V. GILL [1657]; RUMBAUGH, GILL y VON GLASERSFELD [1658]—, que en su laboratorio de Yerkes, en Georgia, inventaron un lenguaje, el *yerkish*, basado en ciertos símbolos que la chimpancé *Lana*, de dos años y medio, aprendió en un ordenador. El sistema consta de un computador con dos consolas, una para *Lana* y la otra para la intervención eventual de los instructores. Cada consola puede tener hasta cinco paneles de 25 teclas cada uno, figurando en cada tecla, un lexigrama en yerkish. *Lana*, incluso podía autoentrenarse, pues el sistema proporciona los refuerzos adecuados —*cfr.* RIBA I CAMPOS [1634]—. Vía este sistema, *Lana* aprendió rápidamente a expresarse con largas frases, utilizando una verdadera sintaxis, iniciaba conversaciones, inventaba nuevas variaciones y combinaciones de las palabras conocidas, creando incluso nuevos nombres para determinados objetos.

Finalmente, como ya anticipábamos, otras investigaciones se han centrado en la enseñanza de algún sistema gestual de comunicación. Quizás la primera y más famosa investigación corresponda a Beatrice T. y R. Allan GARDNER [1659], con *Washoe*, una chimpancé hembra que consiguió dominar más de 160 signos del ASL

(aunque los Gardner no eran expertos en ASL), tras un entrenamiento, en ambiente familiar, de cuatro años y tres meses, logrando además una utilización espontánea y apropiada de sus combinaciones en frases, así como la generalización, la autocomunicación y la creación de nuevos términos —*cfr.* Riba i Campos [1634]; Charline [1648].

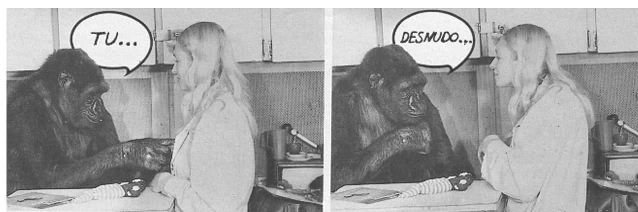
Roger S. Fouts y Deborah H. Fouts, fundadores del Instituto de Comunicación Chimpancé y Humana en la Universidad Central de Washington, continúan las investigaciones con *Washoe* y otros chimpancés —*cfr.* Fouts [1660]; Fouts y Rigby [1661]—. Ellos relatan como el trabajo conjunto con instructores de ASL (aunque tampoco expertos), permite que consigan, no sólo resultados parecidos a los de los Gardner, sino que además los chimpancés se servían del lenguaje de signos para sus relaciones sociales. Quizás, podríamos destacar, además de *Washoe*, a la chimpancé hembra *Ali* —*cfr.* Fouts, Shapiro y O'Neil [1646].

Una de las tareas que se propusieron fue la de comprobar si *Washoe* enseñaría los signos aprendidos a su descendencia. El hijo de *Washoe* murió al nacer, y ella adoptó a *Loulis*, un chimpancé de diez meses. Pues bien, cuando sólo habían transcurrido ocho días, *Loulis* comenzó a imitar los signos que ejecutaba *Washoe*. Ésta se las ingeniaba para enseñárselos y *Louis* los utilizaba para comunicarse con los demás chimpancés y con los seres humanos —*cfr.* Fouts [1662] (cap. 10).

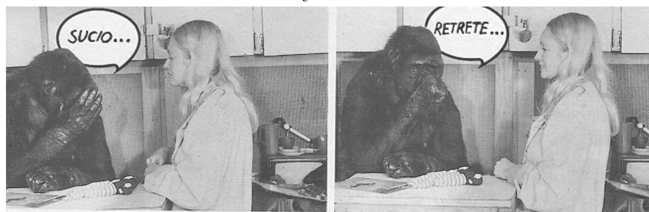
A *Washoe* y *Loulis*, se unieron *Moja* (en 1979) y *Dar* y *Tatu* (en 1981), todos procedentes del segundo proyecto de enseñanza de lenguaje de signos de los Gardner. Loulis enseñaba la signación aprendida de su madre adoptiva a *Dar*, su nuevo compañero de juegos.

Un número mayor de instructores (más competentes) de ASL se empleó con un joven chimpancé macho —*cfr.* Terrace, Petitto, Sanders y Bever [1663], obteniéndose resultados similares a los de los Gardner, aunque las frases que formaba eran de mayor longitud.

También se han realizado experiencias con orangutanes. Debido a la semejanza entre las áreas especializadas en el lenguaje del cerebro humano y el del orangután, se postuló la posibilidad de enseñar lenguaje de signos gestuales a este último —*cfr.* Lemay y Geshwind [1664]; Galdikas [1665]—. H. Lyn White Miles —*cfr.* Ristau [1666]; Ristau y Robbins [1667]; Miles [1668]— comenzó, en 1973, a experimentar con chimpancés, y desde 1979 con *Chantek*, un orangután que llegó a aprender 150 signos, aunque como los demás grandes simios, inventó nuevos signos, los utilizaba de modo simbólico (por ejemplo, haciendo referencia a personas o cosas no presentes, y a cosas o ideas, fuera de su contexto), entendía el inglés hablado, y de manera general, no hay diferencias notables entre sus logros y los de los chimpancés.



Francine Patterson y *Koko*
—*Fuente*: Muy Interesante



Y nos encontramos con *Koko*, una gorila de 27 años, con quien, desde 1972, ha trabajado Francine Patterson, y cuyos resultados son espectaculares —*cfr.* Patterson [1669]—. Pensamos que lo más acertado es «oir» y «escuchar» a su amiga —*cfr.* Patterson y Gordon [1670]—: «utiliza un vocabulario de signos de más de 1.000 palabras, que entiende el inglés hablado y es capaz de mantener conversaciones «bilingües», al responder en signos a preguntas formuladas en inglés. Conoce las letras del alfabeto y es capaz de leer algunas palabras impresas, entre ellas, su propio nombre. Alcanza puntuaciones de entre 85 y 95 en el test de inteligencia de Stanford-Binet[1].

[1]Un ser humano se considera «deficiente mental» (que conste que nos horroriza esta denominación, simplemente es DIFERENTE) si su puntuación es inferior a 70, considerándose normal (intervalo modal) una puntuación entre 90 y 110 —*cfr.* Wolman [1671].

A tenor de esto, resulta curioso que se piense en hacer pasar el test de Turing a una máquina, cuando existen seres vivos que, seguramente, podrían pasarlo. Por otro lado, como no todos los seres humanos somos iguales, pensemos que hay seres humanos

¿Qué es lo que más les gusta hacer a los gorilas?	GORILA AMAR COMER BUENO.
¿Qué te hace feliz?	GORILA ÁRBOL.
¿Qué te pone furioso?	TRABAJO.
¿Qué hacen los gorilas cuando está oscuro?	GORILA ESCUCHAR [pausa] DORMIR
¿Cómo has dormido anoche?	SUELO MANTAS (Koko duerme en el suelo con mantas).
.¿Cómo te gustan que estén las mantas?	CALIENTE KOKO-AMAR.
¿Qué ha pasado? (después de producirse un terremoto).	MALDITA SEA MALDITA SEA SUELO MALO MORDER. JALEO JALEO.

—*Fuente*: Paula CAVALIERI y Peter SINGER [51]

Da muestras de una clara autoconciencia al mirarse en un espejo y realizar una serie de actos relacionados consigo misma, tales como hacer gestos o mirarse los dientes, así como por el adecuado uso de un lenguaje autodescriptivo. Cuando se ha portado mal, miente para evitar las consecuencias que ello pueda acarrearle, y anticipa las reacciones de otros ante sus actos. Juega juegos imaginarios, sola o con otros. Ha hecho dibujos y pinturas de carácter figurativo que representan cosas. Recuerda acontecimientos pasados de su vida y puede hablar sobre ellos. Entiende y utiliza con propiedad palabras relacionadas con el tiempo, tales como ANTES, DESPUÉS, MÁS TARDE, AYER.

Se ríe de sus propias bromas y de las de otros. Llora cuando se ha hecho daño o cuando la dejan sola, grita cuando está asustada o furiosa. Habla de sus sentimientos, con palabras como FELIZ, TRISTE, MIEDO, DISFRUTAR, DESEANDO, FRUSTRADA, FURIOSA, y utiliza con frecuencia la palabra AMOR/AMAR. Siente pesar por aquellos a los que ha perdido: un gato al que quería mucho, o un amigo que se ha marchado. Es capaz de hablar de lo que ocurre cuando se muere, pero se pone nerviosa y se siente incómoda cuando se le dice que hable de su propia muerte o de la muerte de sus compañeros. Se comporta con una amabilidad extraordinaria con los gatitos y con otros animales pequeños. Ha expresado empatía por otros a los que sólo ha visto en fotografías».

Michael, el compañero de *Koko*, un gorila macho tres años más joven que ella, y a pesar de que no se le enseñó lenguaje de signos hasta los tres años y medio, utiliza más de 400 signos diferentes. *Ambos gorilas son capaces de entender si un humano es menos diestro que ellos en la signación, y ralentizan la ejecución de los signos, incluso repitiéndolos. Además, enseñan nuevos signos al otro gorila o a humanos, diseñando sus propias estrategias de enseñanza.*

Además, *Koko* y *Michael* son capaces de generar nombres nuevos a partir de palabras conocidas: BOTELLA CERILLA (encendedor), BLANCO TIGRE (cebra), SOMBRERO OJO (antifaz), JUDÍA BOLA (guisante), COLLAR BOTELLA (un cartón con seis botellas). ¡Cómo nos recuerda esto al principio fundamental del sistema AAC Rebus!, ¿verdad? —cfr. §**??**.

C.3 La comunidad moral de los iguales

«De nuevo contemplé los ojos del gorila, unos ojos sabios y astutos, y me pregunté qué sentido podía tener ese intento de enseñar el lenguaje a los gorilas. Nuestro lenguaje. ¿Por qué? Hay muchos miembros de nuestra propia especie que viven en la selva y con la selva, y que la conocen y la entienden. Sin embargo, no les escuchamos. ¿Qué nos hace pensar que escucharíamos lo que un mono pudiera decirnos, o que el mono fuese capaz de contarnos cosas de su vida en un lenguaje que no ha nacido de esa vida? Pensé que quizá no se trate de que los simios tengan aún que adquirir un lenguaje. Lo que sucede es que hay un lenguaje que nosotros hemos perdido.»
—D. ADAMS y M. CARWARDINE [1672]

Ya comentábamos en §8.2 que, aunque parezca increible, no es hasta 1971 [835], cuando se aprueba una primera declaración de la ONU —que se refuerza y complementa con una segunda declaración en 1975 [836]—, cuando se considera, al fin, a los seres humanos con discapacidad intelectual iguales al resto de seres humanos —aunque, eso sí, sus derechos deben ser salvaguardados por guardianes humanos no discapacitados intelectualmente.

La comunidad de los iguales: todos los seres humanos[2].

La comunidad *moral* de los iguales: ¿quiénes, además?

con graves dificultades de comunicación, que no serían capaces de superarlo.

[2] **¿Igualdad o equidad?** Ante la igualdad, cualquiera puede repartir; ante la equidad, ¿quién reparte? Relea el lector la cita de Milton FRIEDMAN —premio Nobel de Economía en 1976— y Rose FRIEDMAN, en la pág. 196 de la presente Tesis.

¿Por qué no todos los grandes primates? Es decir:

¿por qué no extender la comunidad de los iguales
a la comunidad *moral* de los iguales,
a las especies *homo sapiens* (ser humano),
pan troglodytes (chimpancé),
pan paniscus (chimpancé pigmeo),
gorilla gorilla (gorila)
y *pongo pygmaeus* (orangután)?

Todos los miembros de esta «comunidad moral de los iguales» deberían compartir unos derechos, entre los cuales debería encontrarse el derecho a la vida, la protección de la libertad individual y la prohibición de la tortura.

Entre los principios o derechos propugnados por la declaración sobre los grandes simios figuran los siguientes —reproducido de Cavalieri y Singer [51] (p. 12):

- *El derecho a la vida.* Debe protegerse la vida de los miembros de la comunidad de los iguales. No puede darse muerte a los miembros de la comunidad de los iguales, excepto en circunstancias que se definan muy estrictamente, por ejemplo: en defensa propia.
- *La protección de la libertad individual.* No puede privarse arbitrariamente de su libertad a los miembros de la comunidad de los iguales. Si se les aprisiona sin que medie un proceso legal, tienen el derecho a ser liberados de manera inmediata. La detención de quienes no hayan sido condenados por un delito, o de quienes carezcan de responsabilidad penal, sólo se permitirá cuando pueda demostrarse que es por su propio bien, o que resulta necesaria para proteger al público de un miembro de la comunidad que claramente pueda constituir un peligro para otros si está en libertad. En tales casos, los miembros de la comunidad de los iguales deben tener el derecho a apelar ante un tribunal de justicia, bien directamente o, si carecieren de la capacidad necesaria, mediante un abogado que los represente.
- *La prohibición de la tortura.* Se considera tortura, y por tanto es moralmente condenable, infligir dolor grave, de manera deliberada, a un miembro de la comunidad de los iguales, ya sea sin ningún motivo o en supuesto beneficio de otros.

Heta Häyry y Matti Häyry [1673] (pp. 218-219) defienden que el argumento en el que se fundamentan estos derechos consta de las siguientes premisas y conclusiones:

P1) Los seres que son iguales en el sentido moral deben ser también tratados como iguales.

P2) Son iguales en sentido moral aquellos seres cuyas facultades mentales y cuya vida emocional tienen aproximadamente el mismo nivel.

P3) Las facultades mentales y la vida emocional de los seres humanos y de los otros grandes simios se encuentra aproximadamente al mismo nivel.

C1) En consecuencia, debe darse igual trato a los seres humanos y a los demás grandes simios.

P4) No se debe matar, aprisionar ni torturar a los seres humanos, a menos que se den determinadas condiciones específicas.

C2) En consecuencia, no se debe matar, aprisionar ni torturar a otros grandes simios, a menos que se den determinadas condiciones específicas.

Como seguramente, nada más leer estas premisas y conclusiones, se nos ocurren varios modos de ataque contra cualquiera de las premisas, cualquiera de las conclusiones e incluso contra la propia línea argumental, recomendamos, no ya leer el capítulo de Heta y Matti, sino toda la obra dedicada al Proyecto «Gran Simio» ya citada —*cfr.* Cavalieri y Singer [51][3]—. De todas formas, quien argumente contra (C2) basándose en que los simios se matan entre ellos, y que será difícil enseñarles a cumplir esta nueva ley, que piense en que quizás sea una cuestión de tradición o costumbres, aunque sólo sean (filo)genéticas. Y si no, que piense por qué se asesina, lapidándola, a la mujer en ciertos paises, y en cómo convencerles de no hacerlo. O por qué ciertas

[3] Véase: `http://www.greatapeproject.org/gaphome.html`

familias de India asesinan a sus bebes si son niñas, por el simple hecho de no tener que darles una dote en el futuro. O, ¿por qué existe el terrorismo? O, ¿por qué existe la pena de muerte? O, ¿por qué existen las guerras, donde los asesinos que lanzan las bombas quedan impunes? Infinita mayor crueldad muestra el ser humano con estos comportamientos, o es que acaso, ¿alguien duda de su conocimiento consciente del valor de la vida?

Por algún sitio hay que empezar. Comencemos por los que más se parecen a nosotros, pero realmente, de lo que se trata es de que al igual que somos tolerantes olvidando bastante de nuestra individualidad para vivir en sociedad, también lo seamos, y la especie humana viva en sociedad con el resto de las especies, rechazando de una vez por todas nuestra vil arrogancia, sin sentido ni fundamento alguno.

No obstante los creyentes a pies juntillas en la Biblia seguro que ven una razón en las palabras [...] dominad a los peces del mar, y a las aves del cielo, y a todos los animales que se mueven sobre la tierra.» (Génesis 1, 28). Ahora bien, ser soberano no significa ser dictador, torturador, criminal o asesino. De hecho, los seres humanos vegetarianos estrictos ven en el versículo siguiente una razón para su modo de vida: «Y añadió Dios: Ved que os he dado todas las hierbas que producen simiente sobre la faz de la tierra, y todos los árboles que producen simiente de su especie, para que os sirvan de alimento a vosotros.» (Génesis 1, 29). Claro que según el versículo siguiente, parece que todo animal debería ser vegetariano: «Y a todos los animales salvajes, a todas las aves del cielo y a todo ser viviente que se arrastra sobre la tierra, le doy por alimento toda hierba verde. Y así se hizo.» (Génesis 1, 30). El segundo relato insiste en ello: «Y Dios había hecho nacer de la tierra toda suerte de árboles hermosos a la vista, y de frutos suaves al paladar; [...]» (Génesis 2, 9). El alegato de algunos teístas vegetarianos se funda en que ésto ocurría en el paraíso.

Uno de los principales argumentos contra la consideración de la comunidad moral de los iguales, parece ser la imposibilidad de comunicarnos con el resto de los seres, pero ¿por qué no atendemos a todas las experiencias llevadas a cabo con los grandes primates no humanos —e incluso con otras especies, como relatábamos al comienzo del capítulo?

Y el reino vegetal, ¿qué? Michael Talbot [179] (p. 189) nos cuenta cómo en 1983 se habló mucho de la comunicación entre árboles. Éstos, al ser atacados, liberan una sustancia química en el aire que actúa de «disparador» para que los árboles vecinos preparen sus sistemas de defensa químicos, en proporción a la duración e intensidad del ataque sufrido por los árboles que han sido atacados. Y parece que la transmisión es por el aire, porque se llevaron a cabo experiencias con arces y chopos en macetas, cubiertos con plexiglas, y sólo se comunicaban con los que estaban dentro de la misma urna[4]. En la misma página, Michael Talbot [179] (p. 189) cita también el estudio, en el mismo año, 1983, realizado por un grupo de la Universidad de Clermont, Francia, en el que llevaron a cabo experiencias pinchando clavelones jóvenes con agujas, de manera que como respuesta, éstas, durante 13 días, crecían en direcciones distintas a la del pinchazo. Parece que dedujeron que se podría hablar de un mecanismo básico de memoria y recuperación de la información, dependiente de la provisión de iones[5].

Los ejemplos negativos residen en nuestra propia especie —ya lo hemos comentado repetidamente en esta Tesis—, y queda mucho tiempo para que todos los seres humanos formen parte realmente de la comunidad de los iguales. Seamos realistas: pretender ampliar esta comunidad a los grandes primates es un objetivo a largo plazo, a muy largo plazo; y pretender ampliarla a otros seres vivos, es, sencillamente, una utopía.

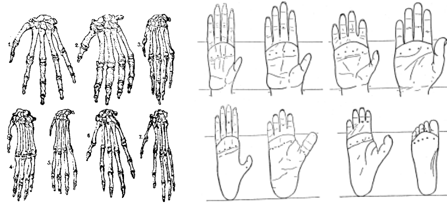
C.4 Embajadores del ser humano

> *«Ahora que los primates están aprendiendo el lenguaje por señas, sólo es cuestión de tiempo hasta que se consiga que alguno nos ayude en el estudio de su propia especie. Podemos imaginar a primates diestros en el lenguaje que actúan como intérpretes o incluso como embajadores del ser humano.»*
> —Frederick Pearl

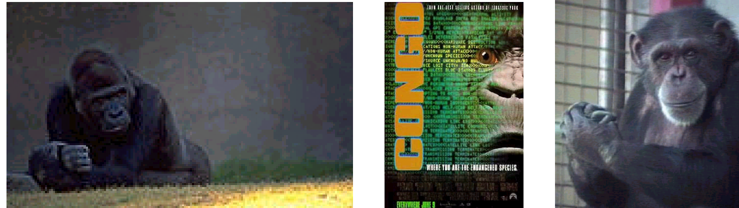
Ante el éxito obtenido en estas experiencias, ¿podría resultar interesante considerar la posibilidad de adaptar dispositivos de adquisición a la mano de un gran simio? Evidentemente es una idea que peca de antropomorfa.

[4] How trees talk to one another, *Science Frontiers (OnLine)*, 27, 1983, mayo-junio; Trees talk to one another, *Science Digest*, 92(1), 1984, enero, p. 47.

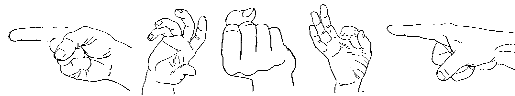
[5] Plants have childhood memories, *New Scientist*, 97(1340), 1983, 13 enero, p. 88.



Dos pueden ser las primeras razones: si escuchamos «hablar» al simio, y expresar sus sentimientos, en nuestro lenguaje, quizás se nos ablande un poquito el corazón, y por supuesto, la razón argumentada por Frederick Pearl en la cita del comienzo.



Esto ya aparece reflejado en la película Congo, de Paramount Pictures (1995), dirigida por Frank Marshall, donde se aporta la idea de que un simio sirva de enlace entre nosotros y ellos, simulando una gorila, *Amy*, que, mediante un guante equipado con sensores, de aspecto muy parecido a un PowerGlove®, se comunique mediante gestos.



Cuando el mundo entero estalle,
será demasiado tarde,
para reencontrarnos
con las leyes naturales.

Si hemos roto con los bosques,
si hemos roto con los mares,
con los peces, con el viento,
que nos hizo libres.

Como niños chicos,
en oscuridad,
así estamos todos,
bajo el mismo vendaval.

Mi rosa de la paz,
vieja rosa con heridas,
siento cuando me acaricias, frío,
y no se donde estás.

Mi rosa de la paz,
mira que te siento lejos,
yo te busco y no te encuentro,
ahora.

Mi rosa de la paz.

Que diría de este mundo,
un viajero del futuro,
de un planeta,
más allá de las estrellas.

Si hemos roto con los bosques,
roto nuestras propias voces,
y aunque nadie escuche,
aún se oye.

Con nosotros mismos,
con la eternidad,
porque estamos todos,
bajo el mismo vendaval.

Mi rosa de la paz,
vieja rosa con heridas,
siento cuando me acaricias, frío,
y no se donde estás.

Mi rosa de la paz,
mira que te siento lejos,
yo te busco y no te encuentro,
ahora.

Mi rosa de la paz.
Mi rosa de la paz.

Cuando el mundo entero estalle,
y sea demasiado tarde,
y ya no queden rosas,
para nadie.

Yo estaré contigo,
rosa de la paz,
como niños chicos,
cuando acabe el vendaval

Mi rosa de la paz,
vieja rosa con heridas,
siento cuando me acaricias, frío,
y no se donde estás.

Mi rosa de la paz,
mira que te siento lejos,
yo te busco y no te encuentro,
ahora.

Mi rosa de la paz,
vieja rosa con heridas,
siento cuando me acaricias, frío,
y no se donde estás.

Mi rosa de la paz,
mira que te siento lejos,
yo te busco y no te encuentro,
ahora.

Mi rosa de la paz.
Mi rosa de la paz.

Amaral

«El conocimiento del conocimiento obliga. *Nos obliga a adoptar una actitud de vigilancia permanente contra la tentación de la certeza. Nos obliga a reconocer que la certeza no es una prueba de la verdad.*»
—Humberto R. Maturana y Francisco J. Varela [1] (p. 245 de la versión inglesa revisada de 1998)

«*Hay un viejo dicho según el cual el pez no puede ver el agua en que nada. Nosotros, los seres humanos, nadamos en un océano más que extraordinario, un mar de acontecimientos tan asombroso, y sin embargo tan diferente de nuestra realidad cotidiana, que se torna difícil dar un paso atrás y advertir esa maravilla en toda su plenitud.*»
—Michael Talbot [179] (p. 199)

«*Ha sido una prueba difícil. Pero, por fín, un poco de descanso es posible ... por fin, puede disfrutarse de la vida. [...] La próxima vez comenzará temprano, se organizará mejor, se ajustará a un cronograma y controlará su ansiedad. Y su convicción es firme, hasta la próxima vez.*»
—Jane B. Burka y Leonora M. Yuen [1674] (p. 27)

Bibliografía

[1] H. R. Maturana y F. J. Varela. *El Árbol del Conocimiento.* Editorial Universitaria, Santiago de Chile, Chile, 1987. (Existe una traducción al inglés como edición revisada: <The Tree of Knowledge: The Biological Roots of Human Understanding>, Shambhala Publications, Inc., Boston, Massachusetts, 1998).

[2] E. A. Poe. El demonio de la perversidad. En: *Cuentos*, páginas 185–192. Alianza, Madrid, España, 1983. (Novena edición; traducción de Julio Cortázar; volumen 1).

[3] J. S. Bruner. *Realidad Mental y Mundos Posibles. Los Actos de la Imaginación que Dan Sentido a la Experiencia.* Gedisa, Barcelona, España, 2001. (Traducido al español por Beatriz López de: <Actual minds, possible worlds>, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 1986).

[4] B. Pascal. Pensées Sur la Religion et Sur Quelques Autres Sujets, 1660.

[5] D. L. Medin, R. L. Goldstone, y A. B. Markman. Comparison and choice: Relations between similarity processes and decision processes. *Psychonomic Bulletin and Review*, 2(1):1–19, 1995.

[6] R. A. Lewontin. *Human Diversity.* Scientific American Library, New York, NY, USA, 1982. (Trad. al español: <La diversidad humana>, Prensa Científica, Barcelona, España, 1984).

[7] M. Ruse. *Mystery of Mysteries: Is Evolution a Social Construction?* Harvard University Press, 1999. (Traducción al español de Vicente Campos: <El Misterio de los Misterios. ¿Es la Evolución una Construcción Social?>, Tusquets, Barcelona, España, 2001).

[8] B. R. Colom Marañón. *Psicología de las Diferencias Individuales. Teoría y Práctica.* Colección <Psicología>. Pirámide, Madrid, España, 1998.

[9] J.-C. Chen, T.-L. Lin, y M.-H. Kuo. Artificial worlds modeling of human resource management systems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(6):542–556, 2002.

[10] A. D. Gordon. *Classification: Methods for the Exploratory Analysis of Multivariate Data.* Monographs on Applied Probability and Statistics. Chapman and Hall / CRC, London / Boca Raton, FL, segunda edición, 1999.

[11] R. De Piles. *Balance des Peintres.* 1708. (<Cours de Peinture par Principes>, Paris, 1708, pp. 489-498; una traducción al inglés: <The Principles of Painting>, 1743).

[12] E. Morin. *Introduction à la pensée complexe.* ESF, Paris, France, 1990. (Traducción al español por Marcelo Pakman de: <Introducción al pensamiento complejo>, Gedisa, Barcelona, España, 1995).

[13] A. Orti. Toma de decisiones en la gestión del conocimiento. En: C. Ongallo (Ed.), *XI Jornadas Hispanolusas de Gestión Científica. Actas. Volumen VI. Gestión del Conocimiento*, páginas 306–314. Ediciones la Coria. Fundación Xavier de Salas, Trujillo, Cáceres, Extremadura, España, 2001.

[14] H. Mintzberg, D. Raisinghani, y A. Théorét. *La Estructura de los Procesos de Decisión.* Ciencia Administrativa, 1976.

[15] N. Rescher y P. Oppenheim. Logical analysis of gestalt concepts. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 6(22):89–106, 1955.

[16] P. Gerstl y S. Pribbenow. Midwinters, end games, and bodyparts: A classification of part-whole relations. *International Journal of Human-Computer Studies*, 43:865–889, 1995. (Special issue on: <Formal Ontology in Conceptual Analysis and Knowledge Representation>).

[17] C. Latimer y C. Stevens. Some remarks on wholes, parts and their perception. *Psycoloqy*, 8(13), 1997. (Disponible en: http://www.cogsci.ecs.soton.ac.uk/cgi/psyc/ newpsy?8.13).

[18] C. Mortensen. Perceptual cognition, parts and wholes. *Psycoloquy*, 9(1). (Disponible en: http://www.cogsci.ecs.soton.ac.uk/cgi/psyc/newpsy?9.1).

[19] L. K. Hansen y P. Salamon. Neural network ensembles. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(10):993–1000, 1990.

[20] A. J. C. Sharkey. Multi-net systems. En: A. J. C. Sharkey (Ed.), *Combining Artificial Neural Nets.* Springer-Verlag, London, 1999.

[21] C. Bishop. *Neural Networks for Pattern Recognition.* Clarendon Press, Oxford, 1995.

[22] M. Fernández Pérez. *Las Tareas de la Profesión de Enseñar. Práctica de la Racionalidad Curricular: Didáctica Aplicable.* Siglo XXI de España Editores, Madrid, España, 1994.

[23] A. Van Der Hoek y A. L. Wolf. Software release management for component-based software. *Software-Practice and Experience*, 33:77–98, 2003.

[24] S. Ríos, C. Bielza, y A. Mateos. *Fundamentos de los Sistemas de Ayuda a la Decisión.* Ra-Ma, Madrid, España, 2002.

[25] G. Boole. *Investigación sobre las Leyes del Pensamiento.* Paraninfo, Madrid, España, 1982. (An Investigation of the Laws of Thought, Dover, New York, NY, USA).

[26] W. Leslie. *Master para Estudiantes Vividores: "Aprobar sin Estudiar".* Obra Guasa, Madrid, España, 1992.

[27] D. Sem Tob De Carrión. *Glosas de Sabiduría o Proverbios Morales y Otras Rimas.* Alianza, Madrid, España, 1983. (El Libro de Bolsillo, LB-516, Sección Clásicos: texto, versión, introducción y comentarios de Agustín García Calvo).

[28] B. Zeigarnik. On finished and unfinished tasks. En: W. D. Ellis (Ed.), *A Source Book of Gestalt Psychology*, páginas 300–314. Harcourt, Brace and World, New York, NY, USA, 1938. (Reimpreso y resumido de: <Psychologische Forshung>, 9, l-85, 1927).

[29] D. M. Wegner, D. J. Schneider, I. Carter, S. R., y T. L. White. Paradoxical effects of thought suppression. *Journal of Personality and Social Psychology*, 53:5–13, 1987.

[30] D. M. Wegner. *White Bears and Other Unwanted Thoughts: Suppression, Obsession, and the Psychology of Mental Control*. Viking - Penguin, New York, NY, USA, 1989. (Traducido del alemán por Ernst Kabel; nueva edición 1994: Guilford Press, New York, NY, USA).

[31] S. R. N. De Chamfort. *Máximas, Pensamientos, Caracteres y Anécdotas*. Península, Barcelona, España, 1999. (Epílogo de Albert Camus; selección, traducción, presentación y notas de Antonio Martínez Sarrión, de: <Pensées, maximes et anecdotes>).

[32] F. Savater. *Ética, Política, Ciudadanía*. Colección Textos Del Nuevo Ciudadano. Grijalbo - Raya Enel Agua (Hoja Casa) - Causa Ciudadana, México, D. F., 1998.

[33] B. Latour. *Ciencia en Acción. Cómo Seguir a los Científicos e Ingenieros a Través de la Sociedad*. Labor, Barcelona, España, 1992. (Traducido por Eduardo Aibar, Roberto Méndez y Estela Ponisio de: <Science in Action: How to Follow Scientists and Engineers Through Society>, Open University Press, Buckingham, 1987).

[34] P. Broughton. How to win at wordsmanship. *Newsweek*, 1968.

[35] R. N. Bolles. *The Three Boxes of Life and How to Get Out of Them. An Introduction to Life/Work Planning*. Ten Speed Press, Berkeley, CA, USA, 1981.

[36] J. Fernández Aguado. *Sobre el Hombre y la Empresa. La Dirección de Recursos Humanos y la Ética en la Empresa*. Instituto Superior de Técnicas y Prácticas Bancarias, Madrid, España, 1999.

[37] L. S. Shulman y E. R. Keislar (Eds.). *Aprendizaje por descubrimiento*. Trillas, México, 1974.

[38] R. Marín Ibáñez. *La Creatividad: Diagnóstico, Evaluación e Investigación*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), Madrid, España, 1998.

[39] K. R. Popper. Science: conjectures and refutations. En: *Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge*, páginas 33–65. Basic Books, New York, NY, USA, 1962. (Traducido al español por Néstor Mínguez: <La ciencia: conjeturas y refutaciones>, en <El desarrollo del conocimiento científico. Conjeturas y refutaciones>, Paidós, Buenos Aires, Argentina, 1967).

[40] E. T. Jaynes. Probability Theory as Logic. En: P. F. Fougere (Ed.), *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, Dordrecht, Nederland, 1990. Kluwer Academic Publishers. (Proceedings Volume of The Ninth Annual Workshop on Maximum Entropy and Bayesian Methods, Dartmouth College, New Hampshire, August 14, 1989) (Versión en Internet, revisada, corregida y extendida con fecha de 1 de mayo de 1994).

[41] C. G. Hempel. *Filosofía de la Ciencia Natural*. Alianza, Madrid, España, 1998. (Traducido de: <Philosophy of Natural Science>, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1966).

[42] A. M. Gene Duch. La enseñanza de la Biología. Situación actual. En: *La Nueva Enseñanza de las Ciencias Experimentales*, páginas 35–51. Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid, España, 1985. (Simposio <El profesor ante los nuevos enfoques curriculares de la enseñanza básica y secundaria> (1984, Madrid)).

[43] R. Dawson. *The Confident Decision Maker*. William Morrow and Company, Inc., New York, NY, USA, 1993. (<Decidir lo Correcto. Con Rapidez y Seguridad>, Grijalbo, Barcelona, España, 1994).

[44] D. V. Lindley. *Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint. Part II: Inference*. Cambridge University Press, Cambridge, 1965.

[45] E. R. House. Tendencias en evaluación. *Revista de Educación*, 299:43–55, 1992.

[46] G. J. Klir y B. Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.

[47] J. Pearl. *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems. Networks of Plausible Inference*. Morgan Kaufmann, San Francisco, California, segunda edición, 1998.

[48] E. Castillo, J. M. Gutiérrez, y A. S. Hadi. *Sistemas Expertos y Modelos de Redes Probabilísticas*. Academia de Ingeniería, Madrid, España, 1996.

[49] A. Tversky y D. J. Koehler. Support theory: A nonextensional representation of subjective probability. *Psychological Review*, 101:547–567, 1994.

[50] W. J. Krzanowski. Distance between populations using mixed continuous and categorical variables. *Biometrika*, 70:235–243, 1983.

[51] P. Cavalieri y P. E. Singer. *El Proyecto «Gran Simio ». La Igualdad Más Allá de la Humanidad*. Trotta, Madrid, España, 1998. (Traducción realizada por Carlos Martín y Carmen González).

[52] L. Tolstoi. *Calendario de la Sabiduría*. Martínez Roca, Barcelona, España, 1998.

[53] F. Montreynaud. *Diccionario de Citas Literarias*. Everest, León, España, 1990. (Ampliación de citas de autores de la Literatura Española e Hispanoamericana: Ana Quintanilla González; traducido al español por Ángel García Aller de: <Dictionnaire de Citations Françaises et Etrangères>, Éditions Fernand Nathan, 1983).

[54] Macmillan. *The Macmillan Dictionary of Quotations*. Chartwell Books, Inc., Edison, New Jersey, USA, 2000. (Macmillan Publishing Company).

[55] J. R. Searle. *Razones Para Actuar. Una Teoría del Libre Albedrío*. Nobel, Oviedo, 2000.

[56] R. Powers. *Galatea 2.2*. Grijalbo Mondadori, Barcelona, España, 1997. (Traducido al español por Cristóbal Pera de: <Galatea 2.2>, Farrar, Straus and Giroux, New York, NY, USA, 1995).

[57] L. Von Mises. *La Acción Humana. Tratado de Economía*. Unión Editorial, Madrid, España, 1984. (Traducido al español de: <Human Action: A Treatise on Economics>, disponible versión en Internet, en múltiples sitios, p. ej., en el Instituto Ludwig Von Mises [www.mises.org]).

[58] B. Kosko. *Pensamiento borroso*. Crítica (Grijalbo Mondadori, S. A.), Barcelona, España, 1995. (Traducido al español por Juan Pedro Campos de: <Fuzzy Thinking. The New Science of Fuzzy Logic>, Hyperion, New York, NY, USA, 1993).

[59] B. Kosko. *El Futuro Borroso o el Cielo en un Chip*. Crítica (Grijalbo Mondadori, S. A.), Barcelona, España, 2000. (Traducido al español por Mercedes García Garmilla de: <The Fuzzy Future. From Society and Science to Heaven in a Chip>, Harmony Books, New York, NY, USA, 1999).

[60] K. D. Forbus. Interpreting Measurements of Physical Systems. En: *Proccedings of AAAI-86*, páginas 113–117. Los Altos, CA, USA, 1986.

[61] B. Kuipers. Qualitative simulation. *Artificial Intelligence*, 29, 1986.

[62] J. De Kleer y D. G. Bobrow. Qualitative reasoning with higher-order derivates. En: *Proceedings of AAAI-84*, páginas 86–91. Austin, Texas, USA, 1984.

[63] B. C. Williams. The use of continuity in a qualitative phisics. En: *Proc. AAAI*. 1984.

[64] K. D. Forbus. Qualitative process theory. *Artificial Intelligence*, 24:85–168, 1984.

[65] J. Á. Vadillo Zorita. *Razonamiento Cualitativo*. Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos. Facultad de Informática. Universidad del País Vasco, San Sebastián, Guipúzcoa, España, 1991. Informe Interno de Investigación.

[66] R. Aris. *Mathematical Modelling Techniques*. Pitman, San Francisco, CA, USA, 1978.

[67] P. J. Davis y R. Hersh. *Experiencia Matemática*. Ministerio de Educación y Ciencia - Ed. Labor, Madrid - Barcelona, España, 1989.

[68] H. S. Becker. Constructive typology in the Social Sciences. *American Sociological Review*, 5(1):40–55, 1940.

[69] M. Weber. *Ensayos sobre Metodología Sociológica*. Amorrortu, Buenos Aires, Argentina, 1982.

[70] A. Estany. El papel de las tipologías en la explicación de la dinámica científica. En: E. De Bustos, J. C. García-Bermejo, E. Pérez Sedeño, A. Rivadulla, J. Urrutia, y J. L. Zofío (Eds.), *Perspectivas Actuales de Lógica y Filosofía de la Ciencia*, páginas 317–331. Siglo Veintiuno, Madrid, España, 1994.

[71] J. C. McKinney. *Tipología Constructiva y Teoría Social*. Amorrortu, Buenos Aires, Argentina, 1968.

[72] C. G. Hempel. *La Explicación Científica. Estudios sobre la Filosofía de la Ciencia*. Paidós, Buenos Aires, Argentina, 1979.

[73] J. Von Neumann. *Theory of Self-Reproducing Automata*. University of Illinois Press, Urbana, 1966. (Editado y completado por A. W. Burks).

[74] M. A. Arbib. *Theories of Abstract Automata*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.

[75] N. J. Cutland. *Computability: An Introduction to Recursive Function Theory*. Cambridge University Press, 1980.

[76] F. J. Tipler. *La Física de la Inmortalidad. Cosmología Contemporánea: Dios y la Resurrección de los Muertos*. Alianza Universidad, Madrid, España, 1997. (Traducido por Daniel Manzanares Fourcade, primera reimpresión).

[77] J. R. Searle. *El Misterio de la Consciencia*. Paidós, Barcelona - Buenos Aires, 2000. (The Mystery of Conciousness, Granta Books, Great Britain, 1997).

[78] R. Reyes. *La Voluntad de Fragmento (para una Filosofía de las Ciencias Sociales)*. Akal, Madrid, España, 1983.

[79] D. J. White. *Teoría de la Decisión*. Alianza, Madrid, segunda edición, 1979. (Traducción al español de José Luis García Molina de: <Decision Theory>, George Allen and Unwin, London, 1969).

[80] N. Smith. *Modes of Enquiry and Research Tasks for General Systems Analysis*. Paper RAC-TP-72. Department of Army (American), 1972.

[81] C. Churchman. *Prediction and Optimal Decision*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1961.

[82] W. Dunlop. The representation of choice. *Terminological Review, Quarterly Bulletin*, 3, 1951.

[83] K. Binmore. *Teoría de Juegos*. McGraw-Hill, Aravaca, Madrid, España, 1994. (Traducido por Antoni Malet Tomas de: <Fun and Games. A Text on Game Theory>, D. C. Heath and Company, 1992).

[84] P. C. Wason y P. Johnson-Laird. *Psychology of Reasoning: Structure and Content*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 1972.

[85] R. Revlin, V. Leirer, H. Yopp, y R. Yopp. The belief-bias effect in formal reasoning: The influence of knowledge on logic. *Memory and Cognition*, 8(6):584–592, 1980.

[86] R. Nickerson, D. Perkins, y E. Smith. *The Teaching of Thinking*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey, USA, 1985.

[87] A. R. Luria. *Cognitive Development: Its Cultural and Social Foundations*. Harvard University Press, Cambridge, MA, USA, 1976.

[88] M. Cole y S. Scribner. *Culture and Thought: A Psychological Introduction*. Wiley, New York, NY, USA, 1974.

[89] P. C. Wason. Reasoning about a rule. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 20:273–281, 1968.

[90] S. E. Newstead y J. S. B. T. Evans (Eds.). *Perspectives on Thinking and Reasoning: Essays in Honor of Peter Wason*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey, USA, 1995.

[91] R. L. Dominowski. Content effects in Wason's selection task. En: S. E. Newstead y J. S. B. T. Evans (Eds.), *Perspectives on Thinking and Reasoning: Essays in Honor of Peter Wason*, páginas 41–66. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey, USA, 1995.

[92] R. A. Griggs y J. R. Cox. The elusive thematic-materials effect in Wason's selection task. *British Journal of Psychology*, 73:407–420, 1982.

[93] A. Tversky y D. Kahneman. Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, 185:1124–1131, 1974.

[94] A. Tversky y D. Kahneman. Judgments of and by representativeness. En: D. Kahneman, P. Slovic, y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristicsand biases*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1980.

[95] A. Tversky y D. Kahneman. The framing of decisions and the psychology of choice. *Science*, 211:453–458, 1981.

[96] H. Gambara D'Errico. *Diseño de Investigaciones. Cuaderno de Prácticas*. McGraw-Hill, Aravaca, Madrid, España, 1998.

[97] J. A. Fodor. *The Elm and the Expert. Mentalese and its Semantics*. The MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1994. (Trad. al español por Marco Aurelio Galmarini: <El olmo y el experto. El reino de la mente y su semántica>, Paidós Ibérica, Barcelona, 1997).

[98] M. Rabin. Psychology and economics. *Journal of Economic Literature*, 36:11–46, 1998.

[99] D. L. Horton y C. B. Mills. Human learning and memory. *Annual Review of Psychology*, 35:361–394, 1984.

[100] P.-L. Yu. Behavior bases and habitual domains of human decision/behavior concepts and applications. En: G. Fandel y T. Gal (Eds.), *MCDM Theory and Application (Proceedings Hagen/Königswinter 1979), LNEMS 177*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[101] P. L. Yu, D. Zhang, y S. Huang. Competence set analysis and effective decision support systems. En: A. Goicoechea, L. Duckstein, y S. Zionts (Eds.),

Multiple Criteria Decision Making, páginas 473–485. Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1992.

[102] D. Vanderpooten. Three basic conceptions underlying multiple criteria interactive procedures. En: A. Goicoechea, L. Duckstein, y S. Zionts (Eds.), *Multiple Criteria Decision Making*, páginas 441–448. Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1992.

[103] R. Ackoff. *Scientific Method: Optimizing Applied Research Decisions.* John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 1962.

[104] P. Vincke. *Multicriteria Decision-Aid.* John Wiley & Sons, Baffins Lane, Chichester, 1992.

[105] C. Bullinger. The estimation function in decision-making. *J. Ind. Eng.*, 13(1), 1962.

[106] H. P. Erdman. The impact of an explanation capability for a computer consultation system. *Methods of Information in Medicine*, 24:181–191, 1985.

[107] D. A. Klein, M. Weber, y E. H. Shortliffe. Computer-based explanation of multiattribute decisions. En: *Multiple Criteria Decision Making*, páginas 159–171. Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1992.

[108] E. Kosey y B. Wise. Self-explanatory financial planning models. En: *Proceedings AAAI-84*, páginas 176–181. Austin, TX, USA, 1984.

[109] D. Waterman. *A Guide to Expert Systems.* Addison-Wesley, Reading, MA, USA, 1986.

[110] A. Senlle. *Tomar Decisiones y Resolver Problemas. Cómo Potenciar las Competencias del Equipo.* Gestión 2000, Barcelona, España, 2003.

[111] T. Gyatso (Dalai Lama). *El Poder de la Paciencia.* Martínez Roca, Barcelona, España, 1998. (<Healing Angers>, Arizona Teachings, Inc., 1997).

[112] C. Monereo (Coord.), M. Castello, M. Clariana, M. Palma, y M. L. Pérez Cabaní. *Estrategias de Enseñanza y Aprendizaje. Formación del Profesorado y Aplicación en el Aula.* Graó, de Serveis Pedagògics, Barcelona, España, 1997.

[113] E. Paul Torrance. *Orientación del Talento Creativo.* Troquel, Buenos Aires, Argentina, 1969.

[114] J. L. Mosquera Villar. *De la Lógica a la Paradójica (Un Estudio en Torno a Unamuno).* Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Santiago, Santiago de Compostela, A Coruña, España, 1979.

[115] J. P. Guilford. *The Nature of Human Intelligence.* McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1967.

[116] D. Cohen. *The Secret Language of Mind.* Duncan Baird Publishers, London, UK, 1996. (<El Lenguaje Secreto de la Mente>, Debate-Círculo de Lectores, Madrid, España, 1996).

[117] R. Vasta, M. M. Haith, y S. A. Miller. *Child Psychology the Modern Science.* John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 1999.

[118] S. J. Shettleworth. Transitive inference in animals? En: *Introduction to Learning (Lecture outlines for week 8, November 2, 1999: Can animals count?).* Department of Psychology. University of Toronto, Toronto, Canadá, 1999. (Disponible en: http://www.psych.utoronto.ca/ courses/260f/).

[119] M. Soto. Rock, scissors, and paper: A survey of violations of transitivity. Disponible en: http://www.geocities.com/mausoto/papers/rsp.pdf.

[120] K. O. May. Intransitivity, utility and the aggregation of preference patterns. *Econometrica*, 22(1):1–13, 1954.

[121] P. Moessinger. La procédure de vote de Simon Lhuilier. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 54:25–32, 1976.

[122] D. Black. *The Theory of Commitees and Elections.* Kluwer, Boston, MA, USA, 1958.

[123] R. Infante Macías. *Teoría de la Decisión.* Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid, España, 1978.

[124] K. J. Arrow. *Social Choice and Individual Values.* John Wiley and Sons, New York, 1951.

[125] G. Richardson. The structure of fuzzy preferences: Social choice implications. *Social Choice and Welfare*, 15(3):359–369, 1998. (Disponible en: http:// link.springer.de/ link/ service/ journals/ 00355/ papers/ 8015003/ 80150359.pdf).

[126] S. Barberá. Decisiones y juicios colectivos probabilistas. En: E. De Bustos, J. C. García-Bermejo, E. Pérez Sedeño, A. Rivadulla, J. Urrutia, y J. L. Zofío (Eds.), *Perspectivas Actuales de Lógica y Filosofía de la Ciencia*, páginas 475–491. Siglo Veintiuno, 1994.

[127] Anónimo. *Testimonios de la Antigua Palabra.* Crónicas de América (Vol. 56). Historia 16, Información y Revistas, S. A., Madrid, España, 1990.

[128] L. J. Peter y R. c. Hull. *The Peter principle.* Buccaneer Books, Cutchogue, New York, USA, 1996.

[129] L. Puchol. *Dirección y Gestión de Recursos Humanos.* Díaz de Santos, Madrid, Europa, cuarta edición, 2000.

[130] M. F. Hirigoyen. La cara oculta de la violencia. *El País*, 2002. (Suplemento dominical, 8 de diciembre de 2002).

[131] E. Gervilla Cantillo. *Introducción a la Filosofía de la Educación.* Promoción del Libro Universitario (Promolibro), Valencia, España, 1987.

[132] P. G. D'Alfonso. *La Personalidad Humana.* Plus Ultra, Buenos Aires, Argentina, 1979.

[133] A. Kronfeld. *Psychoterapie, Charakterlehre, Psychoanalyse, Hypnose, Psychagogik.* Springer, Berlin, Deutschland, 1924.

[134] C. Baudouin. *La Force en Nous.* Delachaux, Neufchâtel, 1946.

[135] F. Altarejos. *Educación y Felicidad.* Ediciones Universidad de Navarra, S. A. (EUNSA), Barañain - Pamplona, España, 1986.

[136] E. De Mulder Duclós y J. M. Ortiz. *Ética para Seguir Creciendo: Cuando la Globalización se ha Instalado en la Empresa.* Pearson Educación, 2001.

[137] J. M. Lozano. *Ética y Empresa.* Trotta, Madrid, 1999.

[138] C. A. Dailey y F. C. Dyer. *Cómo Tomar Decisiones Respecto a las Personas.* Herrero Hermanos Sucesores, México, 1969.

[139] J. Álvarez López y F. Blanco Ibarra. La contabilidad de dirección estratégica para la competitividad en el siglo XXI. El Capital Intelectual. *Revista Técnica Contable*, páginas 1–16, 2000. (Enero).

[140] J. L. González De Rivera y Revuelta. El síndrome del acoso institucional. *Diario Médico*, 2000. (18/07/00, <http:// www.diariomedico.com/ psiquitria/ n180700.html>).

[141] N. Porto Serantes. Modelo DIR: una sistematización del tratamiento de las provisiones y contingencias. En: *IX International Conference European Association of Management and Busines Economics.* AEDEM, Chile, 2000.

[142] N. Porto Serantes. Información contable en ambiente de incertidumbre: un modelo para el tratamiento de provisiones y contingencias. En: *XI Congreso AECA*. Asociación Española de Contabilidad y Administración de Empresas (AECA), Madrid, España, 2001.

[143] N. Porto Serantes y J. M. Viedma Marti. El mobbing: un obstáculo para el desarrollo del capital intelectual en la universidad pública española. En: *Novos Desafios na Gestão: Inovação ou Renovação?* Universidade da Beira Interior, Departamento de Gestão e Economia, 2002. (Actas de las XII Jornadas Luso-Espanholas de Gestão Científica, Covilhã, 10-12 de abril de 2002).

[144] I. Piñuel y Zabala. El mobbing en la Universidad: claves explicativas y manifestaciones. (Presentado en el Primer Congreso Nacional sobre la Corrupción en la Universidad Pública Española, 19, 20 y 21 de septiembre de 2002, Madrid — Referenciado por Mar Villasante, Diario <La Razón>, Sábado, 21 de septiembre de 2002, <Un estudio alerta de que 20.000 empleados de la universidad son objeto de mobbing>), 2002.

[145] L. Gratton. *Estrategias de Capital Humano*. Prentice Hall, Madrid, España, 2001.

[146] R. K. Cooper y A. Sawaf. *Estrategia Emocional para Ejecutivos*. Martínez Roca, Barcelona, España, 1997. (Traducción de J. A. Bravo de: Executive EQ; EQ Map (c) 1996, AIT and Essi Systems; (c) 1997, Advance Intelligence Technologies, LLC).

[147] J. A. Mora y R. M. Ruiz. Concepto de inteligencia emocional: sus conexiones a la biología y a la cognición en la actualidad. En: J. A. Mora (Ed.), *Neuropsicología Cognitiva: Algunos Problemas Actuales*, páginas 176–184. Aljibe, Archidona, Málaga, España, 2001.

[148] M. F. Hirigoyen. *Malaise dans le Travail, Harcèlement Moral: pour Démêler le Vrai du Faux*. La Découverte et Syros, París, Francia, 2001.

[149] J. Ibáñez. Las paradojas de la investigación social: una tarea necesaria e imposible. En: *IV Congreso de Teoría Y Metodología de la Ciencia*. Sociedad Asturiana de Sociología, Gijón, Europa, 1988.

[150] F. G. Delgado. *Cambio de Tiempo. Nubes y Claros en el Diario de un Testigo*. El País - Aguilar, Madrid, España, 1994.

[151] D. C. Dennett. *Tipos de Mentes*. Debate, Madrid, España, 2000. (Traducción de Francisco Páez de la Cadena, de <Kinds of Minds>, 1996).

[152] G. Sinoué. *El Libro de Zafiro*. Ediciones B (Grupo Z), Barcelona, España, 1996. (Traducción de Manuel Serrat Crespo, Le Livre de Saphir, Editiones Denöel, 1996).

[153] P. Núñez Liz y M. Gómez Barreiro. Influencia de los factores sociales y contextuales en los procesos de evaluación del rendimiento. En: *Novos Desafios na Gestão: Inovação ou Renovação?* Universidade da Beira Interior, Departamento de Gestão e Economia, 2002. (Actas de las XII Jornadas Luso-Espanholas de Gestão Científica, Covilhã, 10-12 de abril de 2002).

[154] B. R. Schlenker. *Impression Management: The Self Concept, Social Identity and Interpersonal Relations*. Brooks/Cole, Monterey, CA, USA, 1980.

[155] D. Kipnis y S. M. Schmidt. Upward influence styles: Relationship with performance evaluations, salary, and stress. *Administrative Science Quaterly*, 33:528–542, 1988.

[156] W. S. J. y F. G. R. Influence tactics, affect and exchange quality in supervisor-subordinate interactions: a laboratory experiment and a field study. *Journal fo Applied Psychology*, 75:487–499, 1990.

[157] S. J. Wayne y M. K. Kacmar. The effects of impression management on the performance appraisal process. *Organizational Behavoir and Human Decision Processes*, 48:70–88, 1991.

[158] G. R. Ferris, T. A. Judge, K. M. Rowland, y D. E. Fitzgibbons. Subordinate influence and the performance evaluation process: test of a model. *Organizational Behavoir and Human Decision Processes*, 58:101–135, 1994.

[159] S. J. Wayne y R. C. Liden. Effects of impression management on performance ratings. *Academy of Managemente Journal*, 38(febrero):232–260, 1995.

[160] A. Gibbard. Manipulation of voting schemes: a general result. *Econometrica*, 41:587–601, 1973.

[161] P. Chaunu. *El Rechazo de la Vida: Análisis Histórico del Presente*. Espasa-Calpe, Madrid, España, 1979. (Traducido por Juan del Agua de: <Le refus de la vie>, Calmann-Lévy, París, 1975).

[162] A. De Miguel. *El Aula en el Aire*. Ediciones de la Universidad Complutense (EUDEMA), 1987.

[163] U. Eco. *Segno*. ISEDI: Instituto Editoriale Internazionale, Milán, 1973. (Traducido al español por Francisco Serra Cantarell: <Signo>, Labor, Barcelona, 1988, segunda edición: 1994 - Grupo Editor Quinto Cennario, Colombia).

[164] B. Kosko. Fuzziness vs. probability. *International Journal of General Systems*, 17(2-3):211–240, 1990.

[165] D. Dubois y H. Prade. Fuzzy sets and probability: Misunderstandings, bridges and gaps. En: *Proceedings of the Second IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Vol. II*, páginas 1059–1068. IEEE, San Francisco, CA, March 28 - April 1 1993.

[166] B. De Finetti. *Theory of Probability: A Critical Introductory Treatment (vol. 1)*. Wiley, London, UK, 1974.

[167] B. De Finetti. *Theory of Probability: A Critical Introductory Treatment (vol. 2)*. Wiley, London, UK, 1975.

[168] F. J. Girón. La idea de intercambiabilidad de De Finetti como justificación de la inferencia bayesiana. En: E. De Bustos, J. C. García-Bermejo, E. Pérez Sedeño, A. Rivadulla, J. Urrutia, y J. L. Zofío (Eds.), *Perspectivas Actuales de la Lógica y Filosofía de la Ciencia*, páginas 427–434. Siglo Veintiuno, Madrid, España, 1994.

[169] J. Montero y M. Mendel. Crisp acts, fuzzy decisions. En: S. Barro, A. Bugarín, y A. Sobrino (Eds.), *Advances in Fuzzy Logic (Selected papers -with comments- of some spanish authors)*. (Artículo comentario al Capítulo 8: <Fuzzy Decision Making Problems>, de José Luis Verdegay).

[170] H. Von Helmholtz. *Treatise on Physiological Optics*. Rochster, Optical Society of American, New York, NY, USA, 1925. (Traducción inglesa de 1925; primera edición alemana de 1856-1866).

[171] E. Brunswik. Probability as a determiner of rat bejavior. *J. Exp. Psychol.*, 25:175–197, 1939.

[172] E. Brunswik. Ratiomorphic models of perception and thinking. En: N. Mailloux (Ed.), *Proe. 14th int. Congr. Psichol.* Montreal, 1954.

[173] J. L. Fernández Trespalacios. Aproximación ecológica al estudio del estímulo perceptual. En: J. L. Fernández Trespalacios y P. Tudela Garmendia (Eds.), *Atención y Percepción*, páginas 45–92.

Alhambra Longman, Madrid, España, 1992. (Tratado de Psicología General, 3, Juan Mayor y José Luis Pinillos).

[174] A. García Calvo. *Contra el Tiempo.* Lucina, Zamora, España, 1993.

[175] W. V. O. Quine. What price bivalence? *Journal of Philosophy*, 78:90–95, 1991.

[176] B. Kosko. *Neural Networks and Fuzzy Systems. A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1992.

[177] M. Vásconez y L. Peña. ¿Qué es una ontología gradual? *Ágora*, 15(2):29–48, 1996. (Servicio de Publicaciones e Intercambio Científico de la Universidad de Santiago de Compostela, España).

[178] J. Wheeler. The Mistery and Message of the Quantum. Conferencia ante la American Physical Society (1 de febrero), 1984.

[179] M. Talbot. *Más Allá de la Teoría Cuántica: Las Polémicas y Audaces Experiencias que Desafían la Teoría Cuántica, Desdibujando los Límites entre Física y Metafísica.* Gedisa, Barcelona, España, 1995. (Traducido por Luis N. Justo de: <Beyond the Quantum>, 1968).

[180] P. Ekins, M. Hillman, y R. Hutchison. *Riquezas Sin Límite.* Edaf, Madrid, 1992. (Traducido al español de: <Wealth Beyond Measure>, Gaia Books Ltd., London, 1992).

[181] I. Schneider. Abraham De Moivre: Pionero de la Teoría de Probabilidades entre Jakob Bernoulli y Laplace. En: E. De Bustos, J. C. García-Bermejo, E. Pérez Sedeño, A. Rivadulla, J. Urrutia, y J. L. Zofío (Eds.), *Perspectivas Actuales de Lógica y Filosofía de la Ciencia*, páginas 373–384. Siglo Veintiuno, Madrid, España, 1994.

[182] M. S. De Mora Charles. De Leibniz a Carnap. Probabilidad e inducción. En: E. De Bustos, J. C. García-Bermejo, E. Pérez Sedeño, A. Rivadulla, J. Urrutia, y J. L. Zofío (Eds.), *Perspectivas Actuales de Lógica y Filosofía de la Ciencia*, páginas 397–415. Siglo Veintiuno, Madrid, España, 1994.

[183] B. H. Bunch. *Matemática Insólita: Paradojas y Paralogismos.* Reverté, Barcelona, España, 1987. (Traducido por José L. de María González de: <Mathematical Fallacies and Paradoxes>, Van Nostrand Reinhold Co., New York, NY, USA).

[184] J. Wiseman. Principles of political economy. An outline proposal, illustrated by application to fiscal federalism. *Constitutional Political Economy*, 1:101–124, 1990.

[185] A. Smith. *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations.* 1776. (Estudio sobre la naturaleza de las causas y de la riqueza de las naciones).

[186] F. A. Hayek. *La Fatal Arrogancia. Los Errores del Socialismo.* Unión Editorial, Madrid, España, 1990. (<The Fatal Conceit. The Errors of Socialism>, Routledge - Chicago University Press, 1988).

[187] T. Gallarta Campo. *Filosofía de las Estructuras Matemáticas (Ensayo de una Teoría Estructuralista).* Diálogo Filosófico, Madrid, España, 1994.

[188] J. Myhill. What is a real number? *American Mathematical Monthly*, 79(7):748–754, 1972.

[189] E. Bishop. *Foundations of Constructive Analysis.* McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1967. (Revisado por E. Bishop and D. Bridges: <Constructive Analysis>, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 279, Springer-Verlag, Berlin, 1985).

[190] D. Bridges y F. Richman. *Varieties of Constructive Mathematics.* London Mathematical Society, Lecture Note Ser. 97, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[191] F. S. Beckman. *Mathematical Foundations of Programming.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, USA, 1980.

[192] B. F. Skinner. *Science and Human Behavior.* The Free Press, New York, NY, USA, 1953. (Traducido al español: <Ciencia y Conducta humana>, Martínez Roca, Barcelona, España, 1986).

[193] R. L. Gregory. *Mind in Science: A History of Explanations in Psychology and Physics.* Weidenfeld and Nicholson, London, England, UK, 1981.

[194] M. Cooley. *Architect or Bee?* Hogarth Press, London, UK, 1987.

[195] P. Wegner. Foundations of Interactive Computing. Informe Técnico CS-96-01, Brown University, 1996.

[196] P. Wegner. Why interaction is more powerful than algorithms? *Communications of the ACM*, 40(5):80–91, 1997.

[197] P. Wegner. Interactive foundations of computing. *Theoretical Computer Science*, 192:315–351, 1998.

[198] H. A. Simon y C. A. Kaplan. Foundations of cognitive science. En: M. I. Posner (Ed.), *Foundations of Cognitive Science.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 1989.

[199] D. P. Ausubel. *The Psychology of Meaningful Verbal Learning.* Grune and Stratton, New York, NY, USA, 1963.

[200] D. P. Ausubel. *Educational Psychology: A Cognitive View.* Holt, Rinehart and Winston, New York, NY, USA, 1968. (Traducido al español: Ed. Trillas, México, 1976).

[201] D. P. Ausubel. *The Acquisition and Retention of Knowledge. A Cognitive View.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Nederland, 2000.

[202] D. P. Ausubel, J. D. Novak, y H. Hanesian. *Educational Psychology. A Cognitive View.* Holt, Rinehart and Winston, New York, NY, USA, 1978.

[203] J. D. Novak. Tratamiento de los errores conceptuales. El aprendizaje significativo: factor básico para el cambio conceptual. En: *Jornada sobre Innovación Educativa.* Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España, 2001.

[204] J. D. Novak y R. J. Luli. Meaningful learning as the foundation for constructivist epistemology. En: F. Finley, D. Allchin, D. Rhees, y S. Fifield (Eds.), *Proceedings of the Third International History, Philosophy and Science Teaching Conference (Vol. 2*, páginas 873–896. University of Minnesota, Minneapolis, 1995.

[205] A. Abel. Termination Checking with Types. Informe Técnico 0201, Institut für Informatik, Ludwig-Maximilians Universität, München, 2002.

[206] S. Bergamaschi. Extraction of informations from highly heterogeneous source of textual data. En: P. Kandzia y M. Klush (Eds.), *Proceedings of the First International Workshop CIA-97 Cooperative Information Agents - DAI meets Database Systems. (Lecture Notes in Computer Science, 1202)*, páginas 42–63. Springer-Verlag, Berlin, Deutchsland, 1997. (Computer Science Department, University of Kiel).

[207] D. Beneventano y S. Bergamaschi. Incoherence and subsumption for recursive views and queries in object-oriented data models. *Data and Knowledge Engineering*, 21:217–252, 1997.

[208] A. Ohori y K. Tajima. A polymorphic calculus for views and object sharing. En: *Proceedings of the Thirteenth ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Database Systems*, páginas 255–266. ACM Press, Minneapolis, Minnesota, USA, 1994.

[209] H. F. Korth y A. Silberschatz. *Database Systems Concepts*. McGraw-Hill, Co., USA, 1986. (Trad.: Fundamentos de Bases de Datos, McGraw-Hill, México, 1988).

[210] G. W. Hansen y J. V. Hansen. *Database Management and Design*. Prentice Hall, Inc., Hertfordshire, UK, 1996. (Trad.: Diseño y Administración de Bases de Datos, Prentice Hall, Madrid, España, 1997).

[211] C. W. Bachman y S. B. Williams. A general purpose programming system for random access memories. En: *Proceedings of the Fall Joint Computer Conference (Volume 26)*, páginas 411–422. AFIPS Press, 1964.

[212] G. G. Dodd. APL-A language for associative data handling in PL/I. En: *Proceedings of the AFIPS Fall Joint Computer Conference (Volume 29)*, páginas 667–684. Spartan Books, Washington D. C., WA, USA, 1966.

[213] W. C. McGee. The Information Management System IMS/VS Part I: General structure and operation. *IBM Systems Journal*, 16(2):84–168, 1977.

[214] I. Corporation. Information Management System/Virtual Storage General Information. IBM Form Number GH20-1260, SH20-9025, SH20-9026, SH20-9027, 1978.

[215] A. H. Vorhaus y R. D. Mills. *The Time-Shared Data Management System: A New Approach to Data Management*. System Development Corporation, Santa Monica, CA, USA, 1967. Technical Memo SP-2747 (ahora en: Xerox Data Systems, El Segundo, CA, USA).

[216] M. S. Corporation. System 2000 Reference Manual. Document UMN-1, 1974.

[217] E. F. Codd. A relational model for large shared data banks. *Communications of the ACM*, 13(6):377–387, 1970.

[218] M. M. Ashtrahan, M. W. Blasgen, D. D. Chamberling, K. P. Eswaran, J. Gray, P. P. Griffiths, W. F. King, R. A. Lorie, P. R. McJones, J. W. Mehl, G. R. Putzolu, I. L. Traiger, B. W. Wade, y V. Watson. System R: A relational approach to data base management. *ACM Transactions on Database Systems*, 1(2):97–137, 1976.

[219] S. J. P. Todd. The Peterlee relational test vehicle-A system overview. *IBM Systems Journal*, 15(4):285–308, 1976.

[220] M. Stonebraker, E. Wong, P. Kreps, y H. G. D. The design and implementation of INGRES. *ACM Transactions on Database Systems*, 1(3):189–222, 1976.

[221] M. Stonebraker. *The Ingres Papers*. Addison Wesley, Reading, Massachusetts, USA, 1986.

[222] M. M. Zloof. Query-by-Example: A data base language. *IBM Systems Journal*, 16(4):324–343, 1977.

[223] B. Thalheim. *Entity-Relationship Modeling: Foundations of Database Technology*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2000.

[224] J. Piaget y R. García (Eds.). *Hacia una Lógica de Significaciones*. Bibliotecas Universitarias. Centro Editor de América Latina, 1988. (Traducción al español de: <Vers une logique des significations>, Ginebra, Murionde, 1987).

[225] R. Säljö. *Learning and Understanding: A Study of Differences in constructing meanings from a text*. Acta Universitatis Gothoburgensis, Göteborg, 1982.

[226] I. Enkvist. *La Educación en Peligro*. Grupo Unisón Producciones, Madrid, España, 2000.

[227] M. R. Beheshti. The consequences of a decision support system for road design, construction, management and maintenance. En: *Route et Informatique*, páginas 13–20. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France, March 1990. (Actas de un coloquio organizado por l'École Nationale des Ponts et Chaussées, París 13-15 marzo).

[228] M. Norrie. Advances in object-oriented data modeling. En: M. P. Papazoglou, S. Spaccapietra, y Z. Tari (Eds.), *Advances in Object-Oriented Data Modeling*, páginas 1–18. The MIT Press, Cambridge, MA, USA - London, England, 2000. (In the Series: Cooperative Information Systems, M. Papazoglou, J. W. Schmidt and J. Mylopoulos, Eds.).

[229] H. Putnam. Is semantic possible? En: S. P. Schwarz (Ed.), *Naming, Necessity, and Natural Kinds*. Cornell University Press, Ithaca, NY, USA, 1977.

[230] G. Lakoff. *Women, Fire, and Dangerous Things. What Categories Reveal About the Mind*. Chicago University Press, Chicago, USA, 1987.

[231] E. Rosch (Heider). Cognitive representations of semantic categories. *Journal of Experimental Psychology: General*, 104:192–233, 1975.

[232] J. M. Rossiter, T. H. Cao, T. P. Martin, y J. F. Baldwin. Object-oriented modelling with words. En: *Proceedings of IEEE Workshop on Modelling with Words, FUZZ-IEEE*. December 2001.

[233] T. H. Cao, J. M. Rossiter, Rossiter, T. P. Martin, y J. F. Baldwin. Inheritance and recognition in uncertain and fuzzy object-oriented models. En: *Proceedings of the 1st International Joint Conference of the International Fuzzy Systems Association and the North American Fuzzy Information Processing Society, IFSA/NAFIPS'2001*. 2001.

[234] R. G. G. Cattell, D. K. Barry, M. Berler, J. Eastman, D. Jordan, C. Russell, O. Schadow, T. Stanienda, y F. Vélez (Eds.). *The Object Data Standard: ODMG 3.0*. Data Management Systems (James Gray, Series Editor). Morgan Kaufmann, 2000.

[235] R. Missaoui, R. Godin, y J.-M. Gagnon. Mapping an extended entity-relationship into a schema of complex objects. En: M. P. Papazoglou, S. Spaccapietra, y Z. Tari (Eds.), *Advances in Object-Oriented Data Modeling*, páginas 107–130. The MIT Press, Cambridge, MA, USA - London, England, 2000. (In the Series: Cooperative Information Systems, M. Papazoglou, J. W. Schmidt and J. Mylopoulos, Eds.).

[236] M. P. Papazoglou y B. J. Krämer. Modeling Object Dynamics. En: M. P. Papazoglou, S. Spaccapietra, y Z. Tari (Eds.), *Advances in Object-Oriented Data Modeling*, páginas 195–217. The MIT Press, Cambridge, MA, USA - London, England, 2000. (In the Series: Cooperative Information Systems, M. Papazoglou, J. W. Schmidt and J. Mylopoulos, Eds.).

[237] M. Gogolla. Identifying objects by declarative queries. En: M. P. Papazoglou, S. Spaccapietra, y Z. Tari (Eds.), *Advances in Object-Oriented Data Modeling*, páginas 256–277. The MIT Press, Cambridge, MA, USA - London, England, 2000. (In the Series: Cooperative Information Systems, M. Papazoglou, J. W. Schmidt and J. Mylopoulos, Eds.).

[238] N. Jardine y R. Sibson. *Mathematical Taxonomy.* John Wiley, London, 1971.

[239] A. Tversky. Features of similarity. *Psychological Review*, 84:327–352, 1977.

[240] J. Mosterín. *Conceptos y Teorías en la Ciencia.* Alianza, Madrid, 1984.

[241] E. Mayr. *Principles of Systematic Zoology.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1969.

[242] P. H. A. Sneath y R. R. Sokal. *Numerical Taxonomy.* W. H. Freeman, San Francisco, 1973.

[243] R. Sokal. Numerical Taxonomy. *Scientific American*, December 1966.

[244] P. Ciaccia y M. Patella. Searching in metric spaces with user-defined and approximate distances. *ACM Transactions on Database Systems*, 27(4):398–437, 2002.

[245] C. G. Figuerola, J. L. Alonso Berrocal, y Á. F. Zazo Rodríguez. Nuevos puntos de vista en la recuperación de información en el Web. En: *Actas de las VI Jornadas Españolas de Documentación.* FESABID, Valencia, España, 1998.

[246] E. Chávez, G. Navarro, R. Baeza-Yates, y J. L. Marroquín. Proximity searching in metric spaces. *ACM Computing Survey*, 33(3):273–321, 2001.

[247] P. Ciaccia, M. Patella, y P. Zezula. M-tree: An efficient access method for similarity search in metric spaces. En: *Proceedings of the 23rd International Conference on Very Large Data Bases (VLDB'97)*, páginas 426–435. 1997. (Atenas, Grecia, Agosto).

[248] F. P. Fischer y E. A. Patrick. A preprocessing algorithm for nearest neighbor decision rules. *Proceedings of the National Electronic Conference*, 26:481–485, 1970.

[249] E. Vidal Ruiz. An algorithm for finding nearest neighbours in (approximately) constant average time complexity. *Pattern Recognition Letters*, 4:145–157, 1986.

[250] E. Vidal Ruiz. New formulation and improvements of the Nearest-Neighbour Approximating and Eliminating Search Algorithm (AESA). *Pattern Recognition Letters*, 15(1):1–7, 1994.

[251] K. Fukunaga y P. M. Narendra. A branch and bound algorithm for computing k-nearest neighbors. *IEEE Transactions on Computers*, C24:750–753, 1975.

[252] I. Kalantari y G. McDonald. A data structure and an algorithm for the nearest point problem. *IEEE Transactions on Software Engineering*, SE-9(5):631–634, 1983.

[253] B. Kamgar-Parsi y L. Kanal. An improved branch and bound algorithm for computing k-nearest neighbors. *Pattern Recognition Letters*, 3(1):7–12, 1985.

[254] V. Ramasubramanian y K. K. Paliwal. An efficient approximation-elimination algorithm for fast nearest-neighbour search based on a spherical distance coordinate formulation. *Pattern Recognition Letters*, 13(7):471–480, 1992. (Primeramente publicado en <Signal Processing V:Theories and Applications>, Proceedings del EUSIPCO-90 (Barcelona, septiembre de 1990), North-Holland, Amsterdam, pp. 1323-1326).

[255] M. L. Micó Andrés. *Algoritmos de Búsqueda de Vecinos más Próximos en Espacios Métricos (Tesis Doctoral).* Departamento de Sistemas Informáticos y Computación. Universidad de Valencia, Marzo 1996. (Disponible en: http://www.dlsi.ua.es/ mico/Tesis.ps.gz).

[256] O. Etzioni y D. S. Weld. A softbot-based interface to the internet. *Communications of the ACM*, 37(7):72–76, 1994.

[257] J. F. Sowa. *Knowledge Representation. Logical, Philosophical, and Computational Foundations.* Brooks/Cole, Pacific Grove, California, 2000.

[258] M. R. Genesereth y N. J. Nilson. *Logical Foundations of Artificial Intelligence.* Morgan Kaufmann, Palo Alto, CA, 1988.

[259] Webster. *Webster's New Universal Unabridged Dictionary.* Barnes & Noble, New York, 1996.

[260] E. Strasburger, F. Noll, H. Schenck, A. F. W. Schimper, P. Sitte, H. Ziegler, F. Ehrendorfer, y A. Bresinsky. *Strasburger, Tratado de Botánica.* Omega, Barcelona, España, 1994. (Octava edición).

[261] M. J. Wooldridge y N. R. Jennings. Agent Theories, Architectures, and Languages: A Survey. En: M. J. Wooldridge y N. R. Jennings (Eds.), *Intelligent Agents*, páginas 1–ff. Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1995. (Lecture Notes in Artificial Intelligence, 890).

[262] O. Etzioni y D. S. Weld. Intelligent Agents on the Internet: Fact, Fiction, and Forecast. *IEEE Expert*, 10(4):44–49, 1995.

[263] J. S. Chipman. The foundations of utility. *Econometrica*, 28(2):193–224, 1960. (Reimpreso en: Readings in Mathematical Psychology, Vol. II, edited by R. Duncan Luce, Robert R. Bush and Eugene Galanter, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1965, pp. 419-450).

[264] R. Jansana. *Una Introducción a la Lógica Modal.* Tecnos, Madrid, 1990.

[265] M. C. Escribano Ródenas. Las relaciones de orden en la modernización de las preferencias. Resolución de modelos con la Teoría de Decisión Multicriterio. En: P. Corcho Sánchez (Ed.), *La Utilización de las Matemáticas en la Economía del Año 2000*, páginas 41–57. Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones, Cáceres, España, 2001.

[266] M. P. Galindo Villardón. *Estudio Crítico de Ordenaciones.* Universidad Nacional a Distancia, 1981. (Trabajo para optar al grado de Licenciado dirigido por el Prf. Dr. Norberto Cuesta Dutari).

[267] J. A. Alonso, J. Borrego, M. J. De Pérez, y J. L. Ruiz. *Curso Práctico de Teoría de Conjuntos.* La Ñ, Sevilla, 1998.

[268] K. Menger. *Kurventheorie.* Teubner, Leipzig, Germany, 1932. (Chelsea Pub Co, 2nd edition, february 1968).

[269] N. Cuesta Dutari. *La Sinfonía del Infinito.* Universidad de Salamanca, Salamanca, España, 1981.

[270] L. A. Skorniakov. Conjunto parcialmente ordenado. En: I. M. Vinográdov (Ed.), *Enciclopedia de las Matemáticas (Vol. 2)*, páginas 423–426. MIR - Rubiños1860, Moscú - Madrid, 1993.

[271] P. C. Fishburn. *Utility Theory for Decision Making.* John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 1970.

[272] M. Roubens y P. Vincke. Preference modelling. En: *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems (LNEMS, n. 250).* Springer Verlag, Berlin, 1985.

[273] C. Alarcón Cabrera. *Estudios de Deóntica.* Castillejo, Sevilla, España, 1995.

[274] J. Desanti. Observaciones sobre la conexión de las nociones de génesis y estructura en matemáticas. En: *Las Nociones de Estructura y Génesis, tomo II: Matemática y Biología.* Nueva Visión, Buenos Aires, Argentina, 1975.

[275] J. Ibáñez (Coord.). *Nuevos Avances en la Investigación Social II: La Investigación Social de Segundo Orden*. Proyecto A Ediciones. Kings Tree S. L., Barcelona, España, 1998.

[276] G. Birkhoff. *Lattice Theory*, volumen 25 de *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1967.

[277] G. Grätzer. *General Lattice Theory*. Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1978.

[278] B. Z. Vúlij. Espacio semiordenado. En: I. M. Vinográdov (Ed.), *Enciclopedia de las Matemáticas (Vol. 4)*, páginas 310–314. MIR - Rubiños1860, Moscú - Madrid, 1994.

[279] D. Hinrichsen y J. L. Fernández Muñiz. *Topología General*. Pueblo y Educación (La Habana) and Urmo, S. A. de Ediciones (Bilbao), 1977.

[280] G. Birkhoff y M. K. Bennett. The convexity lattice of a poset. *Order*, 2:223–242, 1985.

[281] M. Wysocki y A. Darmochwal. Subsets of topological spaces. *Journal of Formalized Mathematics*, 1(1):231–237, 1990. (Institute of Computer Science, University of Bia).

[282] N. Feldman y P. Bourdon. Somewhere dense orbits are everywhere dense. *Indiana University Mathematics Journal*. (En prensa).

[283] Z. Karno. Remarks on special subsets of topological spaces. *Journal of Formalized Mathematics*, 5, 1993.

[284] P. A. Cairns. *Boundary Properties and Construction Techniques in General Topology*. Tesis Doctoral, Department of Mathematical Sciences, Corpus Christi College, Oxford University, Oxford, UK, November 1995.

[285] E. K. Van Douwen. Applications of maximal topologies. *Topology and its Applications*, 51:125–139, 1993.

[286] S. M. Markov. On the Algebra of Intervals and Convex Bodies. *Journal of Universal Computer Science*, 4(1):34–47, 1998.

[287] J. A. Tupper. *Graphing Equations with Generalized Interval Arithmetic*. Tesis Doctoral, Graduate Department of Computer Science. University of Toronto, 1996.

[288] R. B. Kearfott. *Rigorous Global Search: Continuous Problems*. Kluwer Academic Publishers, London (UK) - Dordrecht (ND) - Boston (USA), 1996.

[289] T. Duff. Interval Arithmetic and recursive subdivision for implicit functions and Constructive Solid Geometry. *Computer Graphics*, 26(2):131–138, July 1992.

[290] J. L. D. Comba y J. Stolfi. Affine arithmetic and its applications to computer graphics. En: *Anais do VII Sibgrapi*, Recife (PE) Brazil, October 1993. (Disponible en: http:// www.dc.unicamp.br/ stolfi/ EXPORT/ projects/ affine-arith/ Welcome.html).

[291] T. Hickey, Q. Ju, y M. H. Van Emden. Interval arithmetic: From principles to implementation. *Journal of the ACM*, 48(5):1038–1068, 2001.

[292] G. W. Walster. The extended real interval system, 1996. (Disponible en Internet: http://www.mscs.mu.edu/globsol/readings.html).

[293] G. W. Walster y E. R. Hansen. Interval Algebra. composite Functions and Dependence in Compilers, 1998. (Disponible en Internet: http://www.mscs.mu.edu/globsol/readings.html).

[294] T. Sunaga. Theory of an interval algebra and its applications to numerical analysis. *RAAG Memoirs*, 2:29–46, 1958.

[295] R. E. Moore. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.

[296] R. E. Moore. *Methods and Applications of Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, USA, 1979.

[297] D. Ratz. Inclusion isotone extended interval arithmetic. A toolbook update. Informe Técnico 5, Institut für Angewandte Mathematik. Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe, 1996.

[298] H. Ratschek. Über einige intervallarithmetische Grundbegriffe. *Computing*, 4:43–55, 1969.

[299] H. Ratschek. Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik. *J. Reine Angew. Math.*, 252:128–138, 1972.

[300] S. M. Markov. A Non-Standard Subtraction of Intervals. *SERDICA Bulgaricae Mathematicae Publicationes*, 3:359–370, 1977.

[301] S. M. Markov. On the Extended Interval Arithmetic. *Comptes rendus de l'Acadèmie bulgare des Sciences*, 31(2):163–166, 1978.

[302] S. M. Markov. On the application of interval arithmetic in numerical analysis and approximation theory. En: *Constructive Function Theory*, páginas 389–393. 1977.

[303] S. M. Markov. On the interval computation of elementary functions. *Comptes rendus de l'Acadèmie bulgare des Sciences*, 34:319–322, 1981.

[304] W. M. Kahan. A more complete interval arithmetic. Lecture Notes for a Summer Course at the University of Michigan, 1968.

[305] H. Ratschek y J. Rokne. *New Computer Methods for Global Optimization*. Ellis Horwood, Chichester, 1988.

[306] H. Bauch. Solving Ordinary Initial Problems by Means of T-Intervals. *ZAMM Z. angew. Math. Mech.*, 70(6):590–591, 1990.

[307] B. M. Acioly. *Fundamentação Computacional Da Matemática Intervalar*. Tesis Doctoral, Departamento de Informática Teórica. UFRGS, Porto Alegre, 1991.

[308] B. M. Acioly. The Scott Interval Analysis. En: M. A. Campos (Ed.), *Recife, II Workshop on Computer Arithmetic, Interval and Symbolic Computation*, páginas 4–6. 1996.

[309] M. Smyth. Topology. En: D. M. Gabbay, S. Abramsky, y T. S. E. Mainbaum (Eds.), *Handbook of Logic in Computer Science (Volume 1)*. Oxford University Press, 1992.

[310] S. G. Mentzer. LP-Form inclusion functions for global optimization. URL = citeseer.nj.nec.com/527417.html. (Basado en un artículo en: Computers Math. Applic. Vol 21, No. 6/7, pp. 51-65, 1991).

[311] E. Hisdal. The philosophical issues raised by fuzzy set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 25:349–356, 1988.

[312] G. Lakoff. Hedges: A study in meaning criteria and the logic of fuzzy concepts. En: P. M. Peranteau, J. Levi, y G. C. Phares (Eds.), *Proceedings of the Chicago Linguistic Society. Vol. 8: Eight Regional Meeting*, páginas 183–228. University of Chicago. Department of Linguistics, Chicago, IL, USA, 1972. (Reimpreso en 1975, con modificaciones, en <Contemporary Research in Philosophical Logic and Linguistic Semantics>, D. Hockney, W. Harper y B. Freed (Eds.), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Nederland, pp. 221-271).

[313] G. LAKOFF. Hedges: A study in meaning criteria and the logic of fuzzy concepts. *Journal of Philosophical Logic*, 2:458–508, 1973.

[314] A. DEAÑO. *Introducción a la Lógica Formal.* (Manuales / Filosofía y Pensamiento - ma 035). Alianza, Madrid, España, 2002. (Segunda edición).

[315] B. MATES. *Lógica de los Estóicos.* Tecnos, Madrid, 1985. (Stoic Logic, University of California Press, 1973).

[316] E. TRILLAS, C. ALSINA, Y J.-M. TERRICABRAS. *Introducción a la Lógica Borrosa.* Ariel, Barcelona, 1995.

[317] ARISTÓTELES. Categorías. *Cuadernos Teorema*, 52, 1983. (Edición bilingüe griego-castellano).

[318] P. WEIL. *Holística: Una Nueva Visión y Abordaje de lo Real.* San Pablo, Santafé de Bogotá, Colombia, 1993.

[319] J. CARLZON. *El Momento de la Verdad.* Díaz de Santos, Madrid, España, 1991.

[320] G. MCCLAIN Y T. SACHS. *Back to the User: Creating User-Focused Web Sites.* New Riders Publishing, Indianapolis, IN, USA, 2002. (Traducido por KME Sistemas, S. L., al español: <Sitios Web orientados al usuario>, Pearson Educación, Madrid, España, 2002).

[321] A. LÓPEZ, A. PARADA, Y F. SIMONETTI. *Introducción a la Psicología de la Comunicación.* Universidad Católica de Chile, Chile, 1995.

[322] T. R. AUSTIN-MILLÁN. *Fundamentos Sociales y Culturales de la Educación.* Universidad Arturo Prat, Sede Victoria, Chile, 2000.

[323] K. L. VON BERTALANFFY. *General System Theory: Foundations, Development, Applications.* George Braziller, New York, NY, USA, 1976.

[324] M. DAVIDSON. *Uncommon Sense The Life and Thought of Ludwig von Bertalanffy, Father of General Systems Theory.* JP Tarcher, Inc., Los Angeles, CA, USA, 1983.

[325] R. L. ACKOFF. *Planificación de la Empresa del Futuro.* Limusa-Noriega, México, 1997.

[326] D. RODRÍGUEZ Y M. ARNOLD. *Sociedad y Teoría de Sistemas.* Ed. Universitaria, Santiago, Chile, 1990.

[327] Ó. JOHANSEN. *Introducción a la Teoría General de Sistemas.* Limusa, México, 1989.

[328] H. R. MATURANA Y F. J. VARELA. *De Máquinas y Seres Vivos: Una Teoría de la Organización Biológica.* Editorial Universitaria, Santiago de Chile, Chile, 1973. (Versión en inglés: <Autopoiesis and Cognition: The Realization of the Living>, D. Reidel, Boston, Massachusetts, USA, 1980).

[329] R. ECHEVERRÍA. *El Búho de Minerva.* PIIE, Santiago de Chile, 1987.

[330] A. VENGEROV. *Application of Holistic Engineering to Sensitive Systems Analysis and Design: Example of E-Business.* Xlibris Corporation, 2002.

[331] J. C. SMUTS. *Holism and Evolution.* MacMillan, New York, NY, USA, 1926.

[332] F. GONSETH. *La Verite Mathematique et la Realite.* Societe Helvetique des Sciences Naturelies, Thoune, 6 aout 1932. (Conference prononcee a l'assembleee annuale de la Societe Helvetique des Sciences Naturelies).

[333] F. GONSETH (ED.). *Les Entretiens de Zurich sur les Fondements et la Methode des Sciences Mathematiques.* Editeurs S.a. Leemann freres & cie., Zurich, 1941. (6-9 Decembre 1938).

[334] M. BLACK. Vagueness: An exercise in logical analysis. *Philosophy of Science*, 4:427–455, 1937. (Reimpreso en: International Journal of General Systems, 17(2-3), 1990, pp. 107-128).

[335] R. KEEFE Y P. SMITH (EDS.). *Vagueness: A Reader.* The MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1997.

[336] M. BLACK. Reasoning with loose concepts. *Dialogue*, 2:1–12, 1963.

[337] A. J. AYER. *El Positivismo Lógico.* Fondo de Cultura Económica, México, 1965.

[338] G. KLIR. An introduction to the special issue on a quarter-century of fuzzy systems. *International Journal of General Systems*, 17(2):89–93, 1990.

[339] G. L. S. SHACKLE. *Expectation in Economics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1952. (Primera edición de 1949).

[340] G. L. S. SHACKLE. *Decision, Order and Time in Human Affairs.* Cambridge University Press, New York - Cambridge, 1961.

[341] L. A. ZADEH. From circuit theory to systems theory. *Institute of Radio Engineers (IRE) Proceedings*, 50:856–865, 1962.

[342] P. URBANO. *Garzón, el Hombre que Veía Amanecer.* Plaza y Janés Editores, S. A., Barcelona, España, 2000.

[343] M. KLINE. *Mathematics: The Loss of Certainty.* Oxford University Press, New York, NY, USA, 1980.

[344] E. TRILLAS Y A. SOBRINO. Nota sobre la enseñanza de la lógica en el Bachillerato. *Suma, Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 7:17–22, 1990.

[345] C. ALSINA Y E. TRILLAS. Fuzzy sets and mathematical education. *For the Learning of Mathematics*, 11(3):16–19, 1991.

[346] A. C. ON LOGIC Y EDUCATION. Guidelines for logic education. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 1(1), 1995.

[347] A. SOBRINO. Principios muy generales para la educación en lógica fuzzy. En: E. Montseny (Ed.), *Actas del VII Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy.* Departament d'Enginyeria Informàtica, Universitat Rovira i Virgili, Tarragona, 1997.

[348] B. R. GAINES. Foundations of fuzzy reasoning. *International Journal of Man-Machine Studies*, 8:623–668, 1976.

[349] L. VALVERDE GARCÍA. Lógica polivalente y vaguedad lingüística. En: C. Martín Vide (Ed.), *Lenguajes naturales y lenguajes formales I. Actas del I congreso de Lenguajes naturales y lenguajes formales*, páginas 128–150. Promociones y Publicaciones Universitarias (PPU), Barcelona, España, 1986.

[350] N. GEORGESCU-ROEGEN. *The Entropy Law and the Economic Process.* Harvard University Press, Cambridge, MA, USA, 1971.

[351] B. LARA. *La Decisión, Un Problema Contemporáneo.* Espasa-Calpe, Madrid, 1991.

[352] A. L. COMREY. *Manual de Análisis Factorial.* Colección Teorema. Serie Mayor. Cátedra, Madrid, 1985. (A First Course in Factor Analysis, Academic Press, New York).

[353] E. HISDAL. Are grades of membership probabilities? *Fuzzy Sets and Systems*, 25:325–348, 1988.

[354] E. HISDAL. Infinite-valued logic based on two valued logic and probability, Part 1.2. *Internat. J. Man-Machine Stud.*, 25:113–138, 1986.

[355] T. WILLIAMSON. *Vagueness.* Routledge, London, England, 1994.

[356] K. Fine. Vagueness, truth and logic. *Synthese*, 30:265–300, 1975.

[357] D. Hyde. From heaps and gaps to heaps and gluts. *Mind*, 106:641–660, 1997.

[358] J. A. Goguen. The logic of inexact concepts. *Synthese*, 19:325–373, 1969.

[359] D. Osherson y E. E. Smith. On typicality and vagueness. *Cognition*, 64:263–277, 1997.

[360] N. Bonini, D. Osherson, R. Viale, y T. Williamson. On the psychology of vague predicates. *Mind and Language*, 14(4):377–393, 1999.

[361] E. Or. Semantics of vague concepts. En: G. Donn y P. Weingartner (Eds.), *Foundations of Logic and Linguistics. Problems and Solutions*, páginas 465–482. Plenum Press, London, UK - New York, NY, USA, 1983. (Selected contributions to the 7th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Salzburg 1983).

[362] C. Elkan. The paradoxical success of fuzzy logic. *IEEE Expert*, 9(4):3–8, 47–49, 1994.

[363] *IEEE Expert*. IEEE, August 1994.

[364] D. L. Medin y A. Ortony. Psychological essentialism. En: S. Voisniadou y A. Ortony (Eds.), *Similarity and Analogical Reasoning*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1989.

[365] E. Margolis. The significante of the theory analogy in the psychological study of concepts. *Mind and Language*, 10:45–71, 1995.

[366] C. W. Kalish. Essentialism and graded membership in animal and artifact categories. *Memory and Cognition*, 23(3):335–353, 1995.

[367] S. Gelman y H. Wellman. Insides and essences: Early understandings of the non-obvious. *Cognition*, 38:213–244, 1991.

[368] A. Gopnik y A. Meltzoff. *Words, Thoughts, and Theories*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1997.

[369] I. Guzmán De Rojas. *Logical and Linguistic Problems of Social Communication with the Aymara People*. International Development Research Centre (IDRC), Ottawa, Canadá, 1984. (Disponible en: http://www.aymara.org/biblio/igr/igr.html).

[370] L. Peña. Lógicas multivalentes. En: *Lógica (Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, Vol. 7)*. Trotta & Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC), 1995.

[371] N. Rescher. *Many-valued Logic*. McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1969.

[372] J. Ferrater Mora. *Diccionario de Filosofía (4 tomos)*. Ariel (Grupo Planeta), Barcelona, España, 1994.

[373] J. Ferrater Mora y H. Leblanc. *Lógica Matemática*. Fondo de Cultura Económica, México, 1975.

[374] E. L. Post. Introduction to a general theory of elementary propositions of logic. *American Journal of Mathematics*, 43:163–185, 1921.

[375] S. C. Kleene. On notation for ordinal numbers. *The Journal of Symbolic Logic*, 3(4):150–155, 1938.

[376] S. C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*. Van Nostrand Co., Inc., New York, NY, USA, 1952. (Introducción a la Metamatemática, Tecnos, Madrid, España, 1974).

[377] D. A. Bochvar. On a three-valued logical calculus and its application to the analysis of the classical extended functional calculus. *History and Philosophy of Logic*, 24:87–112, 1981. (Traducido al inglés de: <Od odnom tréhznacčnom iscčislénii i égo priménénii k analizu paradoksov klassicčéskogo rass čirénnogo funkcional'nogo iscčislenija>, Matématicčéskij Sbornik, 4 (1939): 287-308).

[378] A. Heyting. *Intuitionism: An Introduction*. North Holland, Amsterdam, Nederland, 1956.

[379] H. Reichenbach. *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics*. Universityof California, Berkeley, 1944, 1965.

[380] J. B. Rosser y A. R. Turquette. *Many-valued Logics*. North-Holland, Amsterdam, 1952.

[381] L. A. Zadeh. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.

[382] G. Menges y H. J. Skala. On the problem of vagueness in the social sciences. En: G. Menges (Ed.), *Information, Inference and Decision*. D. Reidel, Dordrecht, Nederland, 1974.

[383] R. E. Bellman y L. A. Zadeh. *Local and Fuzzy Logics*. University of California, Berkeley, CA, USA, 1976.

[384] D. McNeill y P. Freiberger. *Fuzzy Logic*. Simon & Schuster, New York, NY, USA, 1993.

[385] J. Á. Olivas. La lógica borrosa y sus aplicaciones. *bole.tic*, 24, 2002. (www.astic.es).

[386] S. Mohaghegh. Virtual intelligence and its applications in petroleum engineering. Part 3. Fuzzy Logic. *Journal of Petroleum Technology*, 2000. (November, Distinguished Author Series, Intelligent Solutions, Inc., West Virginia University).

[387] L. A. Zadeh. Fuzzy logic, neural networks and soft computing. *Communications of the ACM*, 37(3):77–84, 1994.

[388] A. Sangalli. *The Importance of Being Fuzzy*. Princeton, 1998.

[389] H. Jeffreys. *Theory of Probability*. Clarendon Press, Oxford, 1948.

[390] A. Zellner. *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*. John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1971.

[391] J. Muruzabal. Discusión invitada del artículo Análisis y tratamiento estadístico de elementos difusos en experimentos aleatorios. *Estadística Española*, 35(134):559–562, 1993. (Autora del artículo discutido: María Ángeles Gil).

[392] C. J. Matheus, P. K. Chan, y G. Piatetsky-Shapiro. Systems for knowledge discoverys in databases. *IEEE TKDE (special issue on Learning and Discovery in Knowledge-Based Databases)*, 1993.

[393] F. Azorín Poch. *Algunas Aplicaciones de los Conjuntos Borrosos a la Estadística*. Instituto Nacional de Estadística, Madrid, 1979.

[394] E. Trillas. *Conjuntos Borrosos*. Vicens-Vives, Barcelona, España, 1980.

[395] L. Pardo Llorente. *Medidas de Nitidez para Conjuntos y Sucesos Difusos. Procesos de Decisión de Grupo con Preferencias Individuales Difusas*. Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB), Barcelona, España, 1980. (Tesis Doctoral).

[396] L. Pardo Llorente. Medidas de nitidez para conjuntos difusos. *Trabajos de Estadística e Investigación Operativa*, 34:43–59, 1983.

[397] J. L. Verdegay. Problemas de decisión en ambiente difuso. *Trabajos de Estadística e Investigación Operativa*, 34:66–78, 1983.

[398] A. Levy. *Basic Set Theory*. Perspectives in Mathematical Logic Series. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1979.

[399] K. J. Devlin. *Fundamentals of Contemporary Set Theory*. Springer - Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1979.

[400] G. Takeuti y W. M. Zaring. *Introduction to Axiomatic Set Theory*. Springer - Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1971.

[401] L. A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1):3–28, 1978.

[402] L. A. Zadeh. Calculus of fuzzy restrictions. En: L. A. Zadeh, K. S. Fu, K. Tanaka, y M. Shimura (Eds.), *Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes*. Academic Press, New York, NY, USA, 1975.

[403] L. A. Zadeh. *Theory of Fuzzy Sets*. Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, CA, USA, 1977. Memorandum M 77-1.

[404] L. A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 3:28–44, 1973.

[405] J. A. Goguen. L-fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 18(1):145–174, 1967.

[406] R. E. Bellman, R. Kalaba, y L. A. Zadeh. Abstraction and pattern classification. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 13:1–7, 1966.

[407] L. A. Zadeh. Fuzzy sets and systems. En: *Proceedings Symposium on Systems Theory*, páginas 29–37. Polytechnic Institute of Brooklyn, 1965.

[408] B. Kosko. Fuzzy Entropy and Conditioning. *Information Sciences*, 40:165–174, 1986.

[409] E. Parzen. On the estimation of a probability density function and the mode. *Annals of Mathematical Statistics*, 33:1065–1076, 1962.

[410] O. Bashkirov, E. M. Braverman, y I. E. Muchnik. Potential function algorithms for pattern recognition learning machines. *Automation and Remote Control*, 25:692–695, 1964.

[411] L. A. Zadeh. Fuzzy logic. *IEEE Computer*, 21(4):83–93, 1988.

[412] A. Kaufmann y J. Gil Aluja. *Las Matemáticas del Azar y de la Incertidumbre. Elementos Básicos para su Aplicación en Economía*. Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, 1990.

[413] L. A. Zadeh. Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences*, 3:177–200, 1971.

[414] F. De Dainville. From the depths to the heights. *Surveying and Mapping*, 30:389–403, 1970. (Traducido al inglés por Arthur H. Robinson).

[415] T. L. Hankins. Blood, dirt, and nomograms. A particular history of graphs. *Isis*, 90:50–80, 1999. History of Science Society Distinguished Lecture.

[416] J.-S. R. Jang, C.-T. Sun, y E. Mizutani. *Neuro-Fuzzy and Soft Computing*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.

[417] P. Ibarrola, L. Pardo, y V. Quesada. *Teoría de la Probabilidad*. Síntesis, Madrid, España, 1997.

[418] M. Mizumoto y K. Tanaka. Some properties of fuzzy numbers. En: M. M. Gupta, R. K. Ragade, y R. R. Yager (Eds.), *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, páginas 153–164. North-Holland, New York, NY, USA, 1979.

[419] O. Kaleva y S. Seikkala. On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, páginas 215–229, 1984.

[420] R. Kruse y K. D. Meyer. *Statistics with Vague Data: Theory and Decision Library*. Series B, Mathematical and Statistical Methods. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht (ND) - Boston (USA), 1987.

[421] R. Viertl. Is it necessary to develop a fuzzy Bayesian inference? En: R. Viertl (Ed.), *Probability and Bayesian Statistics*. Plenum, New York, USA, 1987.

[422] E. Cox. *The Fuzzy Systems Handbook*. AP Professional - Harcourt Brace Company, Boston, 1994.

[423] G. Bojadziev y M. Bojadziev. *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications*. World Scientific, Singapore, 1995.

[424] S. Schnatter. On the propagation of fuzziness of data. *Environmetrics*, páginas 241–251, 1991.

[425] D. M. Yeager y A. H. Marsh. Niveles sonoros y su medida. En: *Manual de Medidas Acústicas y Control del Ruido*, páginas 11.1–11.22. McGraw-Hill, Aravaca, Madrid, España, 1995. (Traducido de la tercera edición en inglés de: <Handbook of Acoustical Measurements and Noise Control>, McGraw-Hill, 1991).

[426] D. L. Johnson, A. H. Marsh, y M. Harris, Cyril. Instrumentos de medida acústica. En: C. M. Harris (Ed.), *Manual de Medidas Acústicas y Control del Ruido*, páginas 5.1–5.24. McGraw-Hill, Aravaca, Madrid, España. (Traducido de la tercera edición en inglés de: <Handbook of Acoustical Measurements and Noise Control>, McGraw-Hill, 1991).

[427] S. Haack. *Deviant Logic*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1974. (Lógica Divergente, Paraninfo, Madrid, 1980).

[428] S. Haack. *Philosophy of Logics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1978. (Filosofía de las Lógicas, Cátedra, Madrid, segunda edición, 1991).

[429] S. Haack. *Deviant Logic, Fuzzy Logic, Beyond the Formalism*. University of Chicago Press, Chicago, 1996.

[430] J. Grunfeld. Haack On Fuzzy Logic. En: *The Paideia Project On-Line. Proccedings of The Twentieth World Congress of Philosophy*. American Organizing Committee, Inc., Boston University, Boston, Massachusetts, USA, 1998. (10-15 agosto, http://www.bu.edu/wcp/Papers/Logi/LogiGrun.htm).

[431] R. I. John. Modelling nursing perceptions using type-2 fuzzy sets. En: *Proceedings of the EUROFUSE Workshop on Preference Modelling and Applications*, páginas 241–246. Euro Working Group on Fuzzy Sets (EUROFUSE), The Association of European Operational Research Societies (EUOR), European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT), University of Granada, University of Jaén, Consejería de Educación y Ciencia of Junta de Andalucía, 2001.

[432] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part I/II/III. *Information Sciences*, 8/8/9:199–249/301–375/43–80, 1975.

[433] M. Mizumoto y K. Tanaka. Some properties of fuzzy sets of type. *Information and Control*, 31(4):312–340, 1976.

[434] M. Mizumoto y K. Tanaka. Fuzzy sets of type 2 under algebraic product and algebraic sum. *Fuzzy Sets and Systems*, 5:277–290, 1981.

[435] A. Sobrino. *La Vaguedad: Hacia un Estudio Crítico de Algunos Aspectos Formales y de Gestión*. Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela, 1989.

[436] A. Sobrino. Lógicas supervaloracionales y precisificación de la vaguedad. En: *Comunicaciones del Primer Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*, páginas 29–33. DECSAI. Universidad de Granada, 1991.

[437] D. Dubois y H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications.* Academic Press, New York, 1980.

[438] N. Karnik, J. M. Mendel, y Q. L. Liang. Type-2 fuzzy logic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(6):643–658, December 1999.

[439] R. I. John. Type 2 fuzzy sets: an appraisal of theory and applications. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems*, 6(6):563–576, 1998.

[440] R. I. John, P. R. Innocent, y M. R. Barnes. Neuro-fuzzy clustering of radiographic tibia image data using type-2 fuzzy sets. *Information Sciences*, 125(1-4):203–220, 2000.

[441] L. A. Zadeh. Quantitative fuzzy semantics. *Information Sciences*, 3(2):159–176, 1971.

[442] S. Gottwald. Set theory for fuzzy sets of higher level. *Fuzzy Sets and Systems*, 2(2):125–151, 1979.

[443] R. Sambuc. *Fonctions Phi-Floues. Application à l'Aide au Diagnostic en Pathologie Thyroïdienne.* Faculté de Médicine de Marseille, 1975. Thèses Doctoral.

[444] C. Ponsard. Hiérarchies des places centrales et graphes Φ-flous. *Environment and Planning*, 9:1232–1253, 1977.

[445] M. B. Gorza. Approximate inference with interval-valued fuzzy sets: an outline. En: *Proc. Polish Symp. on Interval and Fuzzy Mathematics*, páginas 89–95, Pozna, Polland, 1983.

[446] M. B. Gorza. A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 21:1–17, 1987.

[447] M. B. Gorza. Interval-valued fuzzy controller based on verbal model of object. *Fuzzy Sets and Systems*, 28:45–53, 1988.

[448] A. Dziech y M. B. Gorza. Decision making in signal transmission problems with interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 23:191–203, 1987.

[449] W. Pedrycz. *Fuzzy Control and Fuzzy Systems.* Research Studies Press Ltd. / John Wiley & Sons Inc., Taunton, Somerset, England / Chichester, West Sussex, England, 1996.

[450] Y. Gentilhomme. Les ensembles flous en linguistique. *Cahiers de Linguistique Théorique et Appliquée (Bucharest)*, V:47–63, 1968.

[451] A. S. Narin'yani. Sub-definite set. New datatype for knowledge representation. Informe Técnico memo n. 4-232, Computing Center, Novosibirsk, 1980. (En ruso).

[452] Z. a. Pawlak. Rough Functions. Informe Técnico 435, Institute of Computer Science, Polish Academy of Sciences, Warsaw, 1981.

[453] Z. Pawlak. Rough Functions. Informe Técnico 567, Institute of Computer Science, Polish Academy of Sciences, Warsaw, 1981.

[454] Z. Pawlak. Rough Sets: Algebraic and Topological Approach. Informe Técnico 482, Institute of Computer Science, Polish Academy of Sciences, Warsaw, 1982.

[455] Z. Pawlak. Rough sets. *International Journal of Computer and Information Sciences*, 11(5):341–356, 1982.

[456] K. T. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. En: V. Sgurev (Ed.), *VII ITKR's Session.* Sofia, June 1983. (Central Sci. and Techn. Library, Bulg. Academy of Sciences, 1984).

[457] H. Atanassov y S. Stoeva. Intuitionistic fuzzy sets. En: *Polish Symposium on Interval and Fuzzy Mathematics*, páginas 23–26. Poznan Technical University, 1983.

[458] K. T. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20:87–96, 1986.

[459] K. T. Atanassov. *Intuitionistic Fuzzy Sets.* Physica Verlag, Heidelberg - New York, 1999.

[460] Z. Pawlak. Rough sets and fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 17:99–102, 1985.

[461] D. Dubois y H. Prade. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. *Intern. J. of General Systems*, 17(2-3):191–209, 1990.

[462] D. Dubois y H. Prade. Putting rough sets and fuzzy sets together. En: R. Slowinski (Ed.), *Intelligent Decision Support.* Kluwer, Boston, 1992.

[463] D. Dubois y H. Prade. Twofold fuzzy sets and rough sets – some issues in knowledge representation. *Fuzzy Sets and Systems*, 23:3–18, 1987.

[464] K. Hirota. Kakuritsu-Shugoron to sono Oyourei (Probabilistic sets and its applicacions). En: *Behaviormetric Society of Japan 3rd conference.* 1975.

[465] K. Hirota. Concepts of probabilistic sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 5:31–46, 1981.

[466] R. L. Féron. Ensembles aléatoires flous. *C. R. Acad. Sci.*, A(282):303–306, 1976.

[467] M. L. Féron y R. L. Féron. Fuzzy specifications and random fuzzy events considered as basic tools for statistical prediction. *Fuzzy Sets and Systems*, 28:285–293, 1988.

[468] E. Czogala. On distribution function description of probabilistic sets and its application in decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 10:21–29, 1983.

[469] E. Czogala y W. Pedrycz. On the concept of fuzzy probabilistic controllers. *Fuzzy Sets and Systems*, 10:109–121, 1983.

[470] E. Czogala. *Probabilistic Sets in Decision Making and Control.* Verlag TUV Rheinland, Köln, 1984.

[471] E. Czogala y H.-J. Zimmermann. Some aspects of synthesis of probabilistic fuzzy controllers. *Fuzzy Sets and Systems*, 13:169–177, 1984.

[472] E. Czogala. Probabilistic fuzzy controller as a generalization of the concept of fuzzy controller. *Fuzzy Sets and Systems*, 26:215–223, 1988.

[473] G. F. L. P. Cantor. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers.* Dover, New York, NY, USA, 1955.

[474] K. Menger. Statistical metrics. *Proceedings of the Nat. Academy of Sciences of the United States of America*, 28:535–537, 1942.

[475] K. Menger. Probabilistic geometry. *Proceedings of the Nat. Academy of Sciences of the United States of America*, 37:226–229, 1951.

[476] B. Schweizer y A. Sklar. Associative functions and statistical triangle inequalities. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 8:169–186, 1961.

[477] B. Schweizer y A. Sklar. *Probabilistic Metric Spaces.* North-Holland, Elsevier Science Publisher, New York - Amsterdam - Oxford, 1983.

[478] A. Robinson. *Non-Standard Analysis.* North-Holland, Amsterdam, Nederland, 1966.

[479] P. Vopěnka y P. Hájek. *The Theory of Semisets.* North-Holland, Amsterdam, 1972.

[480] E. Nelson. Internal Set Theory, a new approach to NSA. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83:1165–1198, 1977.

[481] P. Vopěnka. *Mathematics in the Alternative Set Theory*. Teubner, Leipzig, 1979.

[482] M. L. Dalla Chiara y G. Toraldo di Francia. Individuals, kinds and names in physics. En: G. Corsi (et Otros) (Ed.), *Bridging the Gap: Philosophy, Mathematics, Physics*, páginas 261–283. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Nederland, 1993.

[483] D. Krause. On a quasi-set theory. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 33:402–411, 1992.

[484] V. Kanovei y M. Reeken. Internal approach to external sets and universes. Part 1. Bounded set theory. *Studia Logica*, 55(2):229–257, 1995.

[485] P. Aczel. *Non-well-founded Sets*. The University of Chicago Press. Center for the Study of Language and Information (Lecture Notes N. 14), 1988.

[486] C. Houzel. Histoire de la théorie des faisceaux. En: *Matériaux pour L'Histoire des Mathématiques au XXe Siècle - Actes du Colloque à la Mémoire de Jean Dieudonné (Nice 1996)*, páginas 101–119. Société Mathématique de France, 1998. (Séminaires et Congrès 3).

[487] H. P. Cartan. Séminaire: <Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux>, 1950-51. Paris, France.

[488] A. Grothendieck. Sur quelques points d'algebre homologique. *Tôhoku Mathematical Journal*, 9:119–221, 1957.

[489] A. Grothendieck y J. L. Verdier. *Th'eorie des Topos et Cohomologie Etale des Sch'emas (SGA 4)*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269. Springer, segunda edición, 1972.

[490] F. W. Lawvere. Quantifiers and sheaves. En: *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Tome 1)*, páginas 329–334. Nice, France. (Nice, 1970; Gauthier-Villars, 1971).

[491] F. W. Lawvere. Introduction. En: *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*, páginas 1–12. Springer-Verlag, 1972. (Lecture Notes in Mathematics, 274).

[492] F. W. Lawvere. Variable quantities and vaiable structures in topoi. En: *Algebra, Topology and Category Theory: A Collection of Papers in Honor of S. Eilenberg*, páginas 101–131. Academic Press, New York, NY, USA, 1976.

[493] M. Tierney. Sheaf theory and the continuum hypothesis. En: F. W. Lawvere (Ed.), *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*, páginas 13–42. Springer, 1972. (Lecture Notes in Mathematics, n. 274).

[494] C. McLarty. *Elementary Categories, Elementary Toposes*. Oxford University Press, Oxford, 1992.

[495] P. J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 50:1143–1148, 1963.

[496] S. A. Kripke. Semantic analysis of modal logic I, normal propositional calculi. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9:67–96, 1963. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[497] D. S. Scott. A proof of the independence of the continuum hypothesis. *Mathematical Systems Theory*, 1(2):89–111, 1967.

[498] P. Vopěnka. The independence of the continuum hypothesis. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae Suppl.*, 5, 1964.

[499] P. Vopěnka. The limits of sheaves and applications on constructions of models. *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 13:189–192, 1965.

[500] P. Vopěnka. The limits of sheaves over extremally disconnected compact Hausdorff spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 15:1–4, 1967.

[501] P. Vopěnka y P. Hájek. Concerning the 5-models of set theory. *Bull. Acad. Polon. Sciences*, 15:113–117, 1967.

[502] P. Vopěnka. General theory of 5-models. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 8:145–170, 1967.

[503] C. A. Drossos. Foundations of fuzzy sets: a nonstandard approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 37:287–307, 1990.

[504] S. Albeverio, J. E. Fenstad, R. Joegh-Krohn, y T. Lindstrom. *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*. Academic Press, New York, NY, USA, 1986.

[505] K. D. Stroyan y W. A. J. Luxembourg. *Introduction to the Theory of Infinitesimals*. Academic Press, New York, NY, USA, 1976.

[506] V. Novak. *The Alternative Mathematical Model of Linguistic, Semantics and Pragmatics*. Plenum Press, New York, NY, USA, 1992.

[507] E. M. Mamdani. Applications of fuzzy algorithms for simple dynamic plants. *Proc. IEEE*, 21(12):1585–1588, 1974.

[508] S. Assilian. *Artificial Intelligence in the Control of Real Dynamic Systems*. Tesis Doctoral, Queen Mary College, London, UK, 1974.

[509] B. Schweizer y A. Sklar. Associative functions and abstracts semigroups. *Publ. Math. Debrecen.*, 10:69–81, 1963.

[510] J. Dombi. A general class of fuzzy operators, the De Morgan class of fuzzy operators and fuzziness measures induced by fuzzy operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 8(2):149–163, 1982.

[511] M. J. Frank. On the simultaneous associativity of F(x,y) and x+y-F(x,y). *Aequationes Mathematicae*, 19(2-3):194–226, 1979.

[512] H. Hamacher. *Über logische Aggregationen nichtbinär explizierter Entscheidungskriterien*. Rita G. Fischer Verlag, Frankfurt, Deutschland, 1978.

[513] S. Weber. A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 11(2):115–134, 1983.

[514] R. R. Yager. On a general class of fuzzy connectives. *Fuzzy Sets and Systems*, 4(3):235–242, 1980.

[515] Y. D. Yu. Triangular norms and TNF-sigma-algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, 16(3):251–264, 1985.

[516] R. Giles. The concept of grade of membership. *Fuzzy Sets and Systems*, 25:297–323, 1988.

[517] D. Driankov, H. Hellendoorn, y M. Reinfrank. *An Introduction to Fuzzy Control*. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, segunda edición, 1996.

[518] Y. Nakoula, S. Galichet, y L. Foulloy. Identification of Linguistic Fuzzy Models Based on Learning. En: H. Hellendoorn y D. Driankov (Eds.), *Fuzzy Model Identification. Selected Approaches*, páginas 281–319. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1997.

[519] C. C. Lee. Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 20(2):404–435, March/April 1990.

[520] H. R. Berenji. Fuzzy logic controllers. En: R. R. Yager y L. A. Zadeh (Eds.), *An Introduction to Fuzzy Logic Applicatons in Intelligent Systems*, páginas 69–96. Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 1992.

[521] M. Braae y D. A. Rutherford. Fuzzy relations in a control setting. *Kybernetes: The International Journal of Systems and Cybernetics*, 7(3):185–188, 1978.

[522] L. I. Larkin. A fuzzy logic controller for aircraft flight control. En: M. Sugeno (Ed.), *Industrial Applications of Fuzzy Control*, páginas 87–104. North-Holland, Amsterdam, Nederland, 1985.

[523] T. A. Runkler y M. Glesner. A set of axioms for defuzzification strategies towards a theory of rational defuzzification operators. En: *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, páginas 1161–1166. 1993.

[524] D. Filev y R. R. Yager. Generalized defuzzification method nia BADD distribution. *International Journal of Intelligent Systems*, 6:687–697, 1991.

[525] D. Filev y R. R. Yager. An adaptive approach to defuzzification based on level sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 54:355–360, 1993.

[526] R. R. Yager y D. Filev. On the issue of defuzzification and selection based on a fuzzy set. *Fuzzy Sets and Systems*, 55:255–274, 1993.

[527] R. Zhao y R. Govind. Defuzzification of fuzzy intervals. *Fuzzy Sets and Systems*, 43(1):45–55, 1991.

[528] S. Mabuchi. A proposal for a defuzzification strategy by the concept of sensitivity analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 55:1–14, 1993.

[529] C.-J. Wu y A. H. Sung. Comparison of three defuzzification methods in the application of Jpeg. *International Journal of Intelligent Control and Systems*, 1(4):511–519, 1998.

[530] O. Song y G. Bortolan. Some properties of defuzzification neural networks. *Fuzzy Sets and Systems*, 61:83–89, 1994.

[531] D. C. Dennett. *Content and Consciousness.* Routledge and Kegan Paul, London, England, UK, 1969.

[532] B. R. Colom Marañón y M. De Juan Espinosa. *Estudios sobre los Fundamentos de la Cognición.* Promoción del Libro Universitario (Promolibro), Valencia, España, 1990.

[533] R. Von Mises. On the foundations of probability and statistics. *Annals of Mathematical Statistics*, 12:191–205, 1941.

[534] R. Carnap. Probability as a guide in life. *The Journal of Philosophy*, 44:141–148, 1947.

[535] L. J. Savage. *The Foundations of Statistics.* John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 1954.

[536] J. Marschak. Rational behaviour, uncertain prospects, and measurable utility. *Econometrica*, 18(2):111–141, 1950.

[537] H. Raiffa y R. Schlaiffer. *Applied Statistical Decision Theory.* Division of Research. Harvard Business School, Boston, USA, 1961.

[538] R. D. Luce y H. Raïffa. *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey.* John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 1957.

[539] I. J. Good. Rational Decisions. *Journal of the Royal Statistical Society (B)*, 14(1):107–114, 1952.

[540] H. Reichenbach. *The Theory of Probability.* University of California Press, Berkeley, CA, USA, 1949.

[541] G. Tintner. Foundations of probability and statistical inference. *Journal of the Royal Statistical Society (A)*, 112(3), 1949.

[542] G. L. S. Shackle. A non-additive measure of uncertainty. *Review of Economic Studies*, 17(1):70–74, 1950.

[543] W. Stallings. Fuzzy set theory versus Bayesian statistics. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, páginas 216–219, 1977.

[544] P. Cheeseman. In defense of probability. En: A. K. Joshi (Ed.), *Proceedings of the 9th International Joint Conference on Artificial Intelligence (Vol. 2)*, páginas 1002–1009. Morgan Kaufmann, Los Angeles, CA, USA, 1985.

[545] P. Cheeseman. Probabilistic vs. fuzzy reasoning. En: L. Kanal y J. F. Lemmer (Eds.), *UAI '85: Proceedings of the First Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, páginas 85–102. Elsevier, Rome, New York, USA, 1988.

[546] S. Nahmias. Fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:97–110, 1978.

[547] J. Bezdek. Fuzzy models: What are they, and why? *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1(1):1–6, 1993.

[548] J. Mosterín. *Los Lógicos.* Espasa Calpe, Madrid, España, 2000.

[549] B. R. Gaines. Precise past, fuzzy future. *International Journal of Man-Machine Studies*, 19:117–134, 1983.

[550] P. Grim. Self-reference and chaos in fuzzy logic. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1(4):237–253, 1993.

[551] M. Á. Gil. Análisis y tratamiento estadístico de elementos difusos en experimentos aleatorios. *Estadística Española*, 35(134), 1993.

[552] I. Bloch. Fuzzy mathematical morphology and derived spatial relationships. En: E. E. Kerre y M. Nachtegael (Eds.), *Fuzzy Techniques in Image Processing.* Physica-Verlag, Heidelberg - New York, 2000.

[553] D. Dubois y M. C. Jaulent. A general approach to parameter evaluation in fuzzy digital pictures. *Pattern Recognition Letters*, 6:251–259, 1987.

[554] R. Krishnapuram, J. M. Keller, y Y. Ma. Quantitative analysis of properties and spatial relations of fuzzy image regions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1(3):222–233, 1993.

[555] I. Bloch y H. Maître. Fuzzy mathematical morphologies: a comparative study. *Pattern Recognition*, 28(9):1341–1387, 1995.

[556] M. Nachtegael y E. E. Kerre. Classical and fuzzy approaches towards mathematical morphology. En: E. E. Kerre y M. Nachtegael (Eds.), *Fuzzy Techniques in Image Processing*, páginas 3–57. Physica-Verlag, Heidelberg - New York, 2000.

[557] W. Bandler y L. Kohout. Fuzzy power sets and fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:13–30, 1980.

[558] W. Bandler y L. J. Kohout. Semantics of implication operators and fuzzy relational products. *International Journal of Man-Machine Studies*, 12(1):89–116, 1980.

[559] D. Sinha y R. Dougherty. Fuzzification of set inclusion: theory and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 55:15–42, 1993.

[560] L. Kitainik. *Fuzzy Decision Procedures with Binary Relations: Towards a Unified Theory.* Kluwer Academic Publishers, 1993.

[561] S. A. Alímov. Conjunto borroso. En: I. M. Vinográdov (Ed.), *Enciclopedia de las Matemáticas. (Vol. 12)*, páginas 6–30. MIR - Rubiños1860, Moscú - Madrid, 1994.

[562] D. V. Lindley. The 1998 Wald Memorial Lectures: The present position in Bayesian statistics. *Statistical Science*, 5(1):44–89, 1990.

[563] M. J. Bayarri, M. H. DeGroot, y J. B. Kadane. What is the likelihood function? (with discussion). En: S. S. Gupta y J. O. Berger (Eds.), *Statistical Decision Theory and Related Topics IV*, páginas 3–27. Springer, New York, 1988.

[564] R. I. John. Fuzzy Inferencing Systems - Problems and Some Solutions. *http://www.cms.dmu.ac.uk/ People/ rij/ newrep/ newrep.html*, 1995. CMS Working Paper No. 62.

[565] N. Watanabe. Statistical Methods for Estimating Membership Functions. *Japanese Journal of Fuzzy Theory and Systems*, 5(4), 1979.

[566] K. Nakamura. Fuzzy theory and behavior science. En: J. S. for Fuzzy Sets Theory y System (Eds.), *Fuzzy Theory, and Humanity and Social Science*, páginas 194–198. Nikkankougyo-shinbun, Tokyo, 1994.

[567] A. M. Norwich y I. B. Turksen. A model for the measurement of membership and the consequences of its empirical implementation. *Fuzzy Sets and Systems*, 12:1–25, 1984.

[568] I. B. Turksen. Measurement of membership functions and their acquisition. *Fuzzy Sets and Systems*, 40:5–38, 1991.

[569] A. Yoshikawa. Improvement of membership function identification method in usability and precision. En: R. Roy, T. Furuhashi, y K. P. Chawdry (Eds.), *Advances in Soft Computing: Engineering Design and Manufacturing*, páginas 248–259. Springer-Verlag, London, UK, 1998. (LNICS - Lecture Notes in Control and Information Sciences - Vol.).

[570] W. Kempton. Interview methods for eliciting fuzzy categories. *Fuzzy Sets and Systems*, 14:43–64, 1984.

[571] B. R. Gaines. Fuzzy and probability uncertainty logics. *Information and Control*, 38:154–169, 1978.

[572] R. Giles. Lukasiewicz logic and fuzzy set theory. *International Journal of Man-Machine Studies*, 8:313–327, 1976.

[573] D. Dubois y H. Prade. Unfair coins and necessty measures: toward a possibilistic interpretation of histograms. *Fuzzy Sets and Systems*, 10:15–20, 1983.

[574] B. Bharathi Devi y V. V. S. Sarma. Estimation of fuzzy memberships from histograms. *Information Sciences*, 35:43–59, 1985.

[575] M. R. Civanlar y H. J. Trussel. Constructing membership functions using statistical data. *Fuzzy Sets and Systems*, 18:1–13, 1986.

[576] H. Takagi y I. Hayashi. NN-driven fuzzy reasoning. *International Journal of Approximate Reasoning*, 5:191–212, 1991.

[577] S. Wang. Generating fuzzy membership functions: A monotonic neural network model. *Fuzzy Sets and Systems*, 61:71–82, 1994.

[578] H. Ishibushi y K. Moriaka. Determination of type II membership functions by fuzzified neural networks. En: *EUFIT'95*, páginas 529–533. 1995.

[579] C. L. Karr. Design of an adaptive fuzzy logic controller using a genetic algorithm. En: *Proceedings of the 4th International Conference on Genetic Algorithms*, páginas 450–457. 1991.

[580] D. L. Meredith, C. L. Karr, y K. Krishna Kamur. The use of genetic algorithms in the design of fuzzy logic controllers. En: *3rd Workshop on Neural Networks WNN'92*. 1992.

[581] M. A. Lee y H. Takagi. Integrating design stages of fuzzy systems using genetic algorithms. En: *Second IEEE International Conference on Fuzzy Systems (Vol. 1)*, páginas 612–617. 1993.

[582] H. Bremermann. Pattern recognition. En: H. Bosset (et Otros) (Ed.), *Systems Theory in the Social Sciences*. Birkhauser-Verlag, Stuttgart, 1976.

[583] D. G. Burkhardt y P. P. Bonissone. Automated fuzzy knowledge base generation and tuning. En: *Proceedings of the First IEEE Fuzzy Systems Conference*, páginas 179–188. 1992.

[584] C. J. Kim y B. D. Russell. Automatic generation of membership function and fuzzy rule using inductive reasoning. En: *Proccedings of the IFIS-93: The Third International Conference on Industrial Fuzzy Control and Intelligent Systems*, 1993.

[585] K. T. Atanassov y S. Stoeva. Intuitionistic L-fuzzy sets. En: R. Trappl (Ed.), *Cybernetics and Systems Research (2)*, páginas 539–540. Elsevier Science, Amsterdam, Holland, 1984.

[586] R. Orayen. Lógica modal. En: C. E. Alchourrón, J. M. Méndez, y R. Orayen (Eds.), *Lógica*, páginas 289–322. Trotta - Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC), Madrid, 1995. Enciclopedia IberoAmericana de Filosofía (EIAF), volumen 7.

[587] G. E. Hughes y M. J. Cresswell. *Introducción a la Lógica Modal*. Tecnos, Madrid, 1973. Colección Estructura y Función: El Porvenir Actual de la Ciencia, dirigida por Enrique Tierno Galván.

[588] D. Quesada. *La Lógica y su Filosofía: Introducción a la Lógica*. Barcanova, Barcelona, 1985. Colección Temas Universitarios, asesorada y dirigida por José Manuel Bernudo e Higinio Clotas.

[589] J. Garrido. *Lógica y Lingüística*. Colección Lingüística (N. 2). Síntesis, Madrid, España, 1988.

[590] A. Meinong. The theory of objects. En: R. Chisholm (Ed.), *Realism and the Background of Phenomenology*, páginas 76–117. The Free Press, Glencoe, 1960. (Publicado inicialmente en 1907).

[591] W. J. Krzanowski y F. H. C. Marriot. *Multivariate Analysis. Part 1. Distributions, Ordination and Inference*. Edward Arnold, London, Great Britain, 1994.

[592] W. J. Pervin. *Foundations of General Topology*. Academic Press, London.

[593] W. J. Thron. *Topological Structures*. Halt, Rinehart and Winston, 1966.

[594] F. Riesz. Die Genesis des. Raumbergriffs. *Math. Naturwiss Ber Ungarn*, 24, 1906.

[595] R. M. Fréchet. *Sur quelques points du calcul fonctionnel*. Reudicont del Circulo Matematico di Palermo, vol. 22, 1906.

[596] E. H. Moore. Introduction to a form of General Analysis. *(Lectures delivered September 1906)*. New Haven.

[597] A. Weil. Sur les espaces a structure uniforme it sur la topologie generale. *Actualites Sci Ind.*, 551, 1932.

[598] Z. P. Mamuzič. *Introduction to General Topology*. P. Noordhoff, Ltd., Gröningen, 1963.

[599] N. Bourbaki. *Topologie General*. Hermann, París, 1961.

[600] J. A. Hartigan. Representation of similarity matrices by trees. *Journal of the American Statistical Association*, 62:1140–1158, 1967.

[601] R. M. Cormack. A review of classification (with Discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 134:321–367, 1971.

[602] R. Shepard. Analysis of proximities as a technique for the study of information processing in Man. *Human Factors*, 5:33–48, 1963.

[603] J. C. Gower. The analysis of asymmetry and orthogonality. En: J. R. Barra, F. Brodeau, G. Romier, y B. Van Cutsem (Eds.), *Recent Developments in Statistics*, páginas 109–123. North-Holland, Amsterdam, 1977.

[604] J. C. Gower. Measures of similarity, dissimilarity and distance. En: S. Kotz, N. L. Johnson, y C. B. Read (Eds.), *Encyclopedia of Statistical Sciences*, volumen 5. John Wiley & Sons, New York, 1985.

[605] A. G. Constantine y J. C. Gower. Graphical representation of asymmetric matrices. *Applied Statistics*, 27:297–304, 1978.

[606] P. H. Schönemann. On metric multidimensional unfolding. *Psychometrika*, 35:349–365, 1970.

[607] J. Chauhan, R. Harper, y W. J. Krzanowski. Comparison between direct similarity assessments and descriptive profiles of certain soft drinks. En: A. A. Williams y R. K. Aitken (Eds.), *Sensory Quality in Foods and Beverages; its Definition, Measurement and Control*. Ellis Horwood, Chichester, England, 1983.

[608] A. Kaufmann, T. Dubois, y M. Cools. *Exercises avec Solutions sur la Théorie des Sous-Ensenbles Flous*. Masson et Cie, París, Francia, 1975. (Tradución al español por Fernando Ibarra Aispuro: <Ejercicios con soluciones sobre la teoría de los subconjuntos borrosos>, Cia. Editorial Continental S. A. de C. V., México, 1982).

[609] G. Birkhoff. A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics*, 33:329–345, 1932.

[610] G. Birkhoff y R. Beatley. A new approach to elementary geometry. En: *The Teaching of Geometry, the Fifth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*. 1929. (Reimpreso en: George David Birkhoff, Collected Mathematical Papers. Vol.: 3. American Mathematical Society (1950), Dover (1968)).

[611] G. Birkhoff y R. Beatley. *Basic Geometry*. Scott Foresman, 1941. Chelsea, 1959.

[612] G. Martin. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1975.

[613] E. Moise. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.

[614] W. Prenowitz y M. Jordan. *Basic Concepts of Geometry*. Blaisdell, New York, 1965.

[615] R. S. Millman y G. D. Parker. *Geometry: a Metric Approach with Models*. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1981.

[616] T. Heath. *Euclid, The Thirteen Books of the Elements*. Dover, New York, 1956.

[617] M. Pasch. *Vorlesungen über Neuere Geometrie*. Teubner, Leibzig, 1882.

[618] D. Hilbert. *The Foundations of Geometry*. Open Court, Chicago, 1921. translated from: Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, 1899. Teubner, Stuttgart, 8th Ed. (1956).

[619] K. Borsuk y W. Szmielew. *Foundations of Geometry*. North-Holland, Amsterdam, 1960.

[620] M. Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean Geometry*. Freeman, San Francisco, 1980.

[621] E. Cech. *Topological Spaces*. Interscience, New York, NY, USA, 1966.

[622] W. Balzer. *Teorías Empíricas: Modelos, Estructuras y Ejemplos*. Alianza, Madrid, España, 1997. (Traducción al español por Agustín González Ruiz de: <Empirische Theorien: Modelle, Strukturen, Beispiele>, 1982).

[623] L. Rabiner y B.-H. Juang. *Fundamentals of Speech Recognition*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1993.

[624] M. Vásconez. La paradoja del sorites. *Pucara*, 13:141–149, 1993. (Departamento de Idiomas, Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación, Universidad de Cuenca, Cuenca, Ecuador).

[625] M. Minsky. *Computation: Finite and Infinite Machines*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1967.

[626] R. J. Carnota. Lógica e Inteligencia Artificial. En: C. E. Alchourrón, J. M. Méndez, y R. Orayen (Eds.), *Lógica (Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, Vol. 7)*, páginas 143–183. Trotta & Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC), Madrid, 1995.

[627] C. U. Moulines. *La Estructura del Mundo Sensible (Sistemas Fenomenalistas)*. Ariel, Barcelona, 1973.

[628] F. Del Castillo. *Análisis Matemático II*. Alhambra, Madrid, 1980.

[629] E. Pflaumann y H. Unger. *Análisis Funcional I*. Alhambra, Madrid, 1974.

[630] R. Ayala, E. Domínguez, y A. Quintero. *Elementos de la Topología General*. Addison-Wesley Iberoamericana-España, Madrid, 1997.

[631] C. M. Cuadras. *Métodos de Análisis Multivariante*. PPU: Promociones y Publicaciones Universitarias, S. A., Barcelona, España, 1991.

[632] E. Trillas. Sobre distancias aleatorias. En: *Actas R. A. M. E.* Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Santiago de Compostela, Galicia, España, 1967.

[633] C. Alsina. Producto, convesificación y completación de espacios métricos generalizados y probabilísticos. *Stochastica*, 2:35–49, 1978.

[634] E. Trillas y C. Alsina. *Introducción a los Espacios Métricos Generalizados*. Fundación Juan March Ser. Univ. 49, Madrid, España, 1978.

[635] L. M. Blumenthal. *Theory and Applications of Distance Geometry*. Oxford University Press, New York and London, 1953.

[636] I. Kramosil y J. Michalek. Fuzzy metric and statistical metric spaces. *Kybernetica*, 11:336–344, 1975.

[637] Z. Mijajlovič. Duro Kurepa (1907 - 1993). En: *Duro Kurepa Memorial Volume*, páginas 13–18. Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 57 (71), Beograd, 1995.

[638] R. M. Fréchet. De l'écart numérique à l'écart abstrait. *Portugaliae Mathematica*, 5:121–131, 1946.

[639] J. C. Gower. Statistical methods of comparing different multivariate analysis of the same data. En: F. R. Hodson, D. G. Kendall, y P. Tautu (Eds.), *Mathematics in the Archaeological and Historical Sciences*, páginas 138–149. Edinburgh University Press, Edinburgh, 1971.

[640] E. W. Holman. The relation between hierarchical and Euclidean models for psychological distances. *Psychometrika*, 37:417–423, 1972.

[641] C. M. Cuadras y T. Usón. Sobre la propiedad euclidea de las distancias ultramétricas. En: *Actas XII Reunión Nacional de Estadística, Investigación Operativa e Informática*. 1980.

[642] P. C. Mahalanobis. On the generalized distance in statistics. *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, 2(1):49–55, 1936.

[643] F. Montalvo. *Estructuras Diametrales*. Tesis Doctoral, Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura, 1983.

[644] A. Wierzbicki. The use of reference objectives in multiobjective optimization. En: G. Fandel y T. Gal (Eds.), *Multiple Criteria Decision Making: Theory and Applications*, páginas 468–486. Springer-Verlag, Berlin, 1980. (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 177).

[645] A. Wierzbicki. Interactive decision analysis and interpretative computer intelligence. En: M. Grauer y A. Wierzbicki (Eds.), *Interactive Decision Analysis*, páginas 2–19. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1984. (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 229).

[646] B. Roy. *Management Scientifique et Aide à la Décision.* Direction Scientifique de la SEMA, Paris, 1974. rapport n. 86.

[647] R. Vetschera. An interactive outranking system for multiattribute decision making. *Computers and Operations Research*, 15(4):311–322, 1988.

[648] R. Vetschera. The IDEAS interactive outranking system: a user-oriented description. Working Paper 8912, Ludwig Boltzmann Institut Working Paper, Wien, 1989.

[649] C. Kepner y J. Tregoe. *The New Rational Manager.* Charles Kepner Associates, Princenton, USA, 1981.

[650] F. De Saussure. *Course in General Linguistics.* McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1915. (Edición de 1959; traducido del francés: <Cours de Linguistique Générale>, Payot, Paris, France).

[651] J.-C. Simon. *El Reconocimiento de Formas mediante Algoritmos.* Masson, Barcelona, 1987. (Traducido del francés <La Reconnaissance des Formes par Algorithmes> por Carmen Roig Bonillo, Revisión de Ramón López de Mántaras Badía).

[652] J. A. Fodor. *Concepts. Where Cognitive Science Went Wrong.* Oxford University Press, Oxford - New York, 1998. (Conceptos. Donde la Ciencia Cognitiva se Equivocó, Gedisa, Barcelona, 1999).

[653] G. Lakoff y M. Johnson. *Metaphors We Live By.* The University of Chicago, 1980. (Metáforas de la Vida Cotidiana, Cátedra, Madrid, 1998).

[654] H. Putnam. *Cómo Renovar la Filosofía.* Cátedra, Madrid, 1994. (Renewing Philosophy, Harvard University Press, 1994).

[655] D. C. Dennett. *La Conciencia Explicada. Una Teoría Interdisciplinar.* Paidós, Barcelona - Buenos Aires - México, 1995. (Consciousness Explained; Little, Brown and Co., 1991).

[656] J. A. Díez y C. U. Moulines. *Fundamentos de Filosofía de la Ciencia.* Ariel, Barcelona, 1997.

[657] J. L. Casti. *The Cambridge Quintet: a Work of Scientific Speculation.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, USA, 1998.

[658] J. R. Searle. *La Construcción de la Realidad Social.* Paidós Ibérica - Paidós, SAICF, Barcelona, España - Buenos Aires, Argentina, 1997. (Traducido al español por Antoni Domènech de: <The construction of social reality>, The Free Press, a Division of Simon and Schuster, New York, NY, USA).

[659] R. Carston. Implicature, explicature and truth-theoretic semantics. En: S. Davis (Ed.), *Pragmatis: A Reader.* Oxford University Press, Oxford, 1991.

[660] R. Penrose. *Emperor's New Mind.* Oxford University Press, Oxford - New York, 1989. (Traducción al español: <La Nueva Mente del Emperador>, Mondadori, Madrid, 1991).

[661] R. Penrose. *Shadows of the Mind. A Search for the Missing Science of Consciousness.* Oxford University Press, Oxford - New York, 1994. (Traducido al español: <Las Sombras de la Mente>, Crítica –Grijalbo Mondadori–, Barcelona, 1996).

[662] R. Penrose. *The Large, the Small and the Human Mind.* Cambridge University Press, Cambridge - New York - Melbourne - Madrid, 1997. (Traducido al español: <Lo Grande, lo Pequeño y la Mente Humana>, Cambridge Univeristy Press, Madrid, 1999).

[663] F. H. C. Crick. *The Astonishing Hypothesis: The Scientific Search for the Soul.* Simon and Schuster, 1994. (Traducido al español: <La Búsqueda Científica del Alma>, Debate, Madrid, España, 1994).

[664] D. Dubois y H. Prade. Weighted minimum and maximum operations in fuzzy set theory. *Information Sciences*, 39:205–210, 1986.

[665] D. Dubois y H. Prade. A review of fuzzy set aggregation connectives. *Information Sciences*, 36:85–121, 1985.

[666] R. R. Yager. Aggregation operators and fuzzy systems modeling. *Fuzzy Sets and Systems*, 67:129–145, 1994.

[667] R. R. Yager. Family of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59:125–148, 1993.

[668] A. Kaufmann y J. Gil Aluja. *Grafos Neuronales para la Economía y la Gestión de Empresas.* Pirámide, Madrid, 1995.

[669] M. Anzola y J. Caruncho. *Problemas de Álgebra. T. 1. Conjuntos y Grupos.* Anzola-Caruncho, Madrid, 1981.

[670] A. Bouvier y M. George. *Diccionario de Matemáticas.* Akal Editor, Torrejón de Ardoz, Madrid, España, 1984.

[671] M. Hallet. *Cantorian Set Theory and Limitation of Size.* Oxford University Press, Oxford, 1984.

[672] ANSI y IEEE. *IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic: ANSI/IEEE Stantard 754-1985.* The American National Standards Institute (ANSI) and the Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), New York, NY, USA, 1985.

[673] ANSI y IEEE. *IEEE Standard for Radix-Independent Floating-Point Arithmetic: ANSI/IEEE Stantard 854-1987.* The American National Standards Institute (ANSI) and the Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), New York, NY, USA, 1987.

[674] C. T. Fike. *Computer Evaluation of Mathematical Functions.* Automatic Computation. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1968.

[675] D. Knuth. *The Art of Computer Programming. Seminumerical Algorithms.* Computer Science and Information Processing (Volume 2). Addison-Wesley, Reading, MA, USA, 1969.

[676] W. L. Miranker y U. Kulisch. Computer Arithmetic in Theory and Practice. Mathematics RC 7776 (33658), IBM Thomas K. Watson Research Center, Yorktown Heights, July 24 1979.

[677] A. García Nogales. *Estadística Matemática.* Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones, Cáceres (Spain), 1998.

[678] L. F. Escudero. *Reconocimiento de Patrones.* Paraninfo, Madrid, 1977.

[679] J. F. Allen. Maintaining knowledge about temporal intervals. *Communications of the ACM*, 26(11):832–843, November 1983.

[680] B. Nebel y H.-J. Bürckert. Reasoning about temporal relations: A maximal tractable subclass of Allen's interval algebra. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 42(1):43–66, 1995.

[681] C. Bertoluzza, N. Corral, y A. Salas. On a new class of distances between fuzzy numbers. *Mathware and Soft Computing*, 2:71–84, 1995.

[682] M. De Guzmán, M. A. Martín, M. Morán, y M. Reyes. *Estructuras Fractales y sus Aplicaciones.* Labor, Barcelona, España, 1993.

[683] M. L. Puri y D. A. Ralescu. Fuzzy Random Variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 114:409–422, 1986.

[684] M. R. Anderberg. *Cluster Analysis for Applications.* Academic Press, New York, 1973.

[685] H. T. Clifford y W. Stephenson. *An Introduction to Numerical Classification.* Academic Press, New York, 1975.

[686] E. Diday y J. C. Simon. Clustering analysis. En: K. S. Fu (Ed.), *Communication and Cybernetics 10 Digital Pattern Recognition*, páginas 47–94. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[687] G. Lance y W. T. Williams. Computer programs for hierarchical polythetic classification ('similarity analyses'). *Computer Journal*, 9:60–64, 1966.

[688] J. R. Bray y J. T. Curtis. An ordination of the upland forest communities of Southern Wisconsin. *Ecological Monographs*, 27(4):325–349, 1957.

[689] J. Czekanowski. *Zarys metod statystycznych w zastosowaniu do antropologii.* Towarzystwa Naukowego Warszawskiego (Sociedad de Ciencias de Varsovia), Warszawa, Poland, 1913. (Estudio técnico n. 5, en la Serie de Ciencias Matemáticas y Naturales).

[690] S. Theodoridis y K. Koutroumbas. *Pattern Recognition.* Academic Press, San Diego, CA, USA, 1999.

[691] H. Spat. *Cluster Analysis Algorithms.* Ellis Horwood, 1980.

[692] J. C. Gower. Multivariate analysis and multidimensional geometry. *The Statistician*, 17:13–25, 1967.

[693] R. W. Parsons. A Mathematical Approach to the Interpretation of Pollen Spectra. Tesis de Maestría en Ciencias, University of St. Andrews, 1978.

[694] I. Hodder y C. Orton. *Spatial Analysis in Archaeology.* Cambridge University Press, Cambridge, 1976. (Análisis Espacial en Arqueología, Crítica, Barcelona, 1990).

[695] A. Salas, C. Bertoluzza, y N. Corral. Regresión lineal con observaciones difusas y coeficientes nítidos. En: D. de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Santiago (Ed.), *18 Reunión Nacional de Estadística, Investigación Operativa e Informática*, páginas 457–461. Banco Pastor, 1989.

[696] C. Bertoluzza, N. Corral, y A. Salas. Polinomial regression in a fuzzy context. The least squares method. En: *Proceedings of the 6th IFSA Conference*, páginas 431–434, 1995.

[697] S. Montes, P. Gil, y C. Bertoluzza. Divergence between fuzzy sets and fuzziness. En: *Proceedings of the IPMU'98.* Université de La Sorbonne, Paris, 1998.

[698] A. Kaufmann. *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets. Fundamental Theoretical Elements*, volumen 1. Academic Press, New York, 1975.

[699] G. J. Klir y T. A. Folger. *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information.* Prentice-Hall International (UK) Limited, 1988.

[700] A. De Luca y S. Termini. Entropy measures in fuzzy set theory. *Systems and Control Encyclopedia*, páginas 1467–1473, 1988.

[701] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27:379–423, 1948.

[702] T. M. Cover y J. A. Thomas. *Elements of Information Theory.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.

[703] L. Pardo Llorente. *Teoría de la Información Estadística.* Hespérides, Salamanca, 1997.

[704] A. I. Khinchin. *Mathematical Foundations of Information Theory.* Dover, New York, 1957.

[705] A. De Luca y S. Termini. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Information and Control*, 20:301–312, 1972.

[706] R. R. Yager. *On the Measure of Fuzziness and Negation. Part I - Membership in the Unit Interval.* Rep. RRY 79-016, School of Business Administration, New Rochelle, New York, 1979.

[707] D. P. Huttenlocher, G. A. Klanderman, y W. J. Rucklidge. Comparing images using the Hausdorff distance. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 15:850–863, 1993.

[708] W. J. Rucklidge. Locating objects using the Hausdorff distance. En: *Proceedings of the International Conference of Computer Vision*, páginas 457–464. 1995.

[709] M. P. Dubuisson y A. K. Jain. A modified Hausdorff distance for object matching. En: *Proc. 12th Int. Conf. Pattern Recognition*, páginas 566–568. ., Jerusalem, October 1994.

[710] R. Azencott, F. Durbin, y J. Paumard. Multiscale identification of building in compressed large aerial scenes. En: *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition (vol. 2)*, páginas 974–978. ., Vienna, Austria, August 1996.

[711] A. Kolmogorov. Sur la notion de moyenne. *Atti delle Reale Accademia Nazionale dei Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez.*, 12:323–343, 1930.

[712] J. Aczél. *Lectures on functional equations and their applications.* Academic Press, New York, London, 1966.

[713] J. Fodor y M. Roubens. On meaningfulness of means. *Journal Computational and Applied Mathematics*, 64:103–115, 1995.

[714] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, y G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge University Press, London, UK, 1934.

[715] G. Calot. *Cours de Statistique Descriptive.* Dunod, París, 1965. (Traducido al español por Francisco José Cano Sevilla: <Curso de Estadística Descriptiva>, Paraninfo, Madrid, 1988).

[716] D. S. Sivia. *Data Analysis: A Bayesian Tutorial.* Clarendon Press, Oxford, 1996.

[717] P.-S. Laplace. *Essai Philosophique sur les Probabilités.* Paris, France, 1814. (también en OEuvres, 7, Paris, France, 1847).

[718] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics.* Oxford, 1935.

[719] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, y F. Laloë. *Quantum Mechanics (Volume II).* Wiley, New York, NY, USA, 1977.

[720] A. Messiah. *Mecánica Cuántica.* Technos, Madrid, 1983.

[721] S. L. Sóbolev. *Matem. sb.* 1936. v. 1, pp.39-72 (en ruso).

[722] L. Schwartz. *Théorie des distributions.* Hermann, París, 1950-1951.

[723] L. Schwartz. *Les Méthodes Mathematiques de la Physique.* Cours de Sorbonne, París, 1955.

[724] E. Hille y R. S. Philips. *Functional Analysis and Semigroups.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31, 1957.

[725] D. E. Edmunds y H. Triebel. *Function Spaces, Entropy Numbers, Differential Operators.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[726] H. Triebel. *Fractals and Spectra: Related to Fourier Analysis and Function Spaces.* Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 1997.

[727] J. Fernández-Sánchez. La evaluación de la calidad docente. En: A. Medina Rivilla (Coord.) (Ed.), *Teoría y Métodos de Evaluación*, páginas 157–168. Cincel, Madrid, España, 1991.

[728] D. Borrajo, N. Juristo, V. Martínez, y J. Pazos. *Inteligencia Artificial. Métodos y Técnicas.* Centro de Estudios Ramón de Areces, Madrid, España, 1993.

[729] M. V. Trianes Torres (Coord.). *Psicología de la Educación para Profesores.* Pirámide, Madrid, España, 1995.

[730] H. Gamboa y A. Fred. Designing intelligent tutoring systems: a Bayesian approach. 2001. Paper presented at the 3rd International Conference on Enterprise Information Systems, ICEIS'2001.

[731] F. Bennett. *Computers as Tutors: Solving the Crisis in Education.* Munksgaard International Publishers (Book published in First Monday, December 1996 and January 1997, journal on the Internet, http://www.firstmonday.dk), Copenhagen, 1997.

[732] A. Galvis. *Educative Software Engineering.* Uniandes Editions, Santafé de Bogotá, 1992.

[733] H. L. Burns y C. G. Capps. Foundations of intelligent tutoring systems: An introduction. En: M. C. Polson y J. J. Richardson (Eds.), *Foundations on Intelligent Tutoring Systems*, capítulo 1. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, 1988.

[734] V. J. Shute. SMART: student modelling approach for responsive tutoring. *User Modelling and User Adapted Interaction*, 5:1–44, 1995.

[735] H. J. Eysenck y M. W. Eysenck. *Personality and Individual Differences: A Natural Science Approach.* Plenum Press, New York, NY, USA, 1985. (Trad. al español: <Personalidad y Diferencias Individuales>, Pirámide, Madrid, España, 1987).

[736] K. VanLehn. Student Modelling. En: M. C. Polson y J. J. Richardson (Eds.), *Foundations on Intelligent Tutoring Systems*, capítulo 3. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, 1988.

[737] J. D. Novak. *A Theory of Education.* Cornell University Press, Ithaca, NY, USA, 1977.

[738] T. S. Kuhn. *The Structure of Scientific Revolutions.* University of Chicago Press, Chicago, IL, USA, 1962.

[739] S. E. Toulmin. *Human Understanding (Vol. 1).* Princenton University Press, Princenton, NJ, USA, 1972.

[740] J. J. Schwab. The Practical 3: Translation into curriculum. *School Review*, 81(4):501–522, 1973.

[741] D. B. Gowin. *Educating.* Cornell University Press, Ithaca, NY, USA, 1981.

[742] F. M. González García, C. Morón Arroyo, y J. D. Novak. *Errores Conceptuales. Diagnosis, Tratamiento y Reflexiones.* Eunate, Pamplona, España, 2001.

[743] J. H. Wandersee. Can the history of science help science educators anticipate students' misconceptions? *Journal of Research in Science Teaching*, 23:581–597, 1986.

[744] G. Kelly. *The Psychology of Personal Constructs.* Norton, New York, NY, USA, 1955.

[745] L. Viennot. *Le Raisonnement Spontané en Dynamique Elémentaire.* Tesis Doctoral, Université Paris 7, 1976. (Publicada en 1979 por Herman, Paris).

[746] K. Edmondson. *The Influence of Student's Conceptions of Scientific Knowledge and their Orientations to Learning on their Choices of Learning Strategy in a College Introductory Level Biology Course.* Tesis Doctoral, Cornell University, 1989.

[747] K. Edmondson y J. D. Novak. *Toward an Authentic of Science in Science Education (Vol. 1).* Queen's U. Faculty of Education and The Mathematics, Science, Technology and Teacher Education Group, Kingston, Canadá, 1992.

[748] J. S. Bruner. The act of discovery. *Harvard Educational Review*, 31:21–32, 1961.

[749] J. S. Bruner. *The Process of Education.* Harvard University Press, Cambridge, Mass., USA, 1961.

[750] J. Piaget. *To Understand is to Invent.* Grossman, New York, NY, USA, 1973. (Traducido al inglés por George-Anne Roberts).

[751] D. P. Ausubel. The use of advance organizers in the learning and retention of meaningful verbal material. *Journal of Educational Psychology*, 51:267–272, 1960.

[752] D. Alvermann. The compensatory effect of graphic organizers in the learning and retention of meaningful verbal material. *Journal of Educational Research*, 75:44–48, 1981.

[753] M. F. Graves, C. L. Cooke, y M. J. Laberge. Effects of previewing difficult short stories on low ability junior high school students' comprehension, recall, and attitudes. *Reading Research Quarterly*, 18(3):262–276, 1983.

[754] T. Buzan. *The Mind Map Book.* Penguin, New York, NY, USA, 1991.

[755] C. Eden, S. Jones, y D. Sims. *Thinking in Organizations.* Macmillan, London, England, UK, 1979.

[756] C. Eden. Cognitive mapping. *European Journal of Operational Research*, 36:1–13, 1988.

[757] F. Ackermann, C. Eden, y S. Cropper. Getting started with cognitive mapping, 1992. (Tutorial, 7th Young OR Conference. Disponible en: Banxia Software Ltd.).

[758] J. D. Novak y D. B. Gowin. *Learning how to learn.* Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1984.

[759] J. D. Novak. *Learning, Creating, and Using Knowledge: Concept Maps as Facilitative Tools in Schools and Corporations.* Lawrence Erlbaum and Associates, Mawah, NJ, USA, 1998.

[760] C. Eden y F. Ackermann. *Making Strategy: The Journey of Strategic Management.* Sage Publications Ltd., London, England, UK, 1998.

[761] B. R. Gaines y M. L. G. Shaw. Concept maps as hypermedia components. *International Journal of Human-Computer Studies*, 1995. (Disponible en: http://ksi.cpsc.ucalgary.ca/articles/ConceptMaps/).

[762] B. R. Gaines y M. L. G. Shaw. Collaboration through concept maps. En: *Proceedings of CSCL95: Computer Supported Cooperative Learning.* Bloomington, 1995. (Octubre. Disponible en: http://ksi.cpsc.ucalgary.ca/articles/CSCL95CM/).

[763] B. R. Gaines y M. L. G. Shaw. WebMap: Concept mapping on the Web. En: *Proceedings of WWW4: Fourth International World Wide Web Conference*. Boston, 1995. (Diciembre. Disponible en: http:// ksi.cpsc.ucalgary.ca/articles/WWW/ WWW4WM/).

[764] M. Álvarez. Using a thematic pre-organizer and guided instruction as an aid to concept learning. *Reading Horizons*, 24:51–58, 1983.

[765] M. Álvarez y V. Risko. Using a thematic organizer to facilitate transfer learning with college developmental studies students. *Reading Research and Instruction*, 28:1–15, 1989.

[766] V. Risko y M. Álvarez. An investigation of poor readers' use of a thematic strategy to comprehend text. *Reading Research Quarterly*, 21:298–316, 1986.

[767] D. M. Ogle. K-W-L: A teaching model that develops active reading of expository text. *Reading Teacher*, 39:564–570, 1986.

[768] K. A. Fuata'i. *Learning to Solve Mathematics Problems Through Concept Mapping and Vee Mapping*. The National University, Apia, Samoa, 1998.

[769] J. W. Wrightstone, J. Justman, y I. Robbins. *Evaluation in Modern Education*. American Books, Co., New York, NY, USA, 1956.

[770] N. E. Gronlund. *Measurement Evaluation in Teaching*. MacMillan Co., New York, NY, USA, 1965.

[771] V. H. Noll, D. P. Scannell, y R. C. Craig. *Introduction to Educational Measurement*. Houghton Mifflin Co., Boston, USA, cuarta edición, 1979.

[772] P. D. Lafourcade. *Evaluación de los Aprendizajes*. Colección Didaxis. Cincel, Madrid, España, 1987.

[773] J. W. Wrightstone. Rating Methods. En: W. S. Monroe (Ed.), *Encyclopedia of Educational Research*. MacMillan Co., New York, NY, USA, 1950.

[774] G. A. Miller. The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *The Psychological Review*, 63:81–97, 1956.

[775] V. García Hoz. *Normas elementales de pedagogía empírica*. Escuela Española, Madrid, España, 1963.

[776] A. Bodin. Problèmes de l'évaluation des savoirs mathématiques. *Petit X*, 7:5–28, 1985.

[777] D. G. Ryans y J. R. Frederiksen. Performance test of educational achievement. En: E. F. Lindquist (Ed.), *Educational Measurement*. American Council on Education, Washington, D. C., USA, 1950.

[778] B. Berlin y P. Kay. *Basic Color Terms: Their Universality and Evolution*. CSLI Publications. Stanford University, Stanford, CA, USA, 1999. (Publicado en 1969 por: University of California Press, Berkeley, CA, USA).

[779] G. M. Ruch. *The Objective of New-Type Examination*. Scott Foreman and Co., Chicago, USA, 1929.

[780] P. A. Goring. *Manual de Mediciones y Evaluación del Rendimiento en los Estudios*. Kapelusz, Buenos Aires, Argentina, 1971.

[781] R. L. Ebel. *Measuring Educational Achievement*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva York, USA, 1965.

[782] J. Romero Morante. *La Clase Artificial. Recursos Informáticos y Educación Histórica*. AKAL, Madrid, España, 2001.

[783] D. Dubois y H. Prade. A unifying view of comparison indices in a fuzzy set-theoretic framework. En: R. R. Yager (Ed.), *Fuzzy Set and Possibility Theory. Recent Developments*. Pergamon Press, New York, 1982.

[784] P. Diamond. Fuzzy Kriging. *Fuzzy Sets and Systems*, 33:315–332, 1989.

[785] R. Zwick, E. Carlstein, y D. V. Budescu. Measures of similarity among fuzzy concepts: A comparative analysis. *International Journal of Approximation Reasoning*, 1:221–242, 1987.

[786] S. G. Tzafestas y A. Venetsanopoulos. *Fuzzy Reasoning in Information, Decision and Control Systems*. Kluwer, Boston, Mass., 1994.

[787] A. Yoshikawa. Mutuality measures corresponding to subjective judgment of similarity and matching. En: *Proceedings of the Eighth IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, páginas I–33 – I–37. IEEE, 1999.

[788] M. A. Lubiano. *Tesis Doctoral: Medidas de Variación de Elementos Aleatorios Imprecisos*. Universidad de Oviedo, XXX.

[789] M. A. Lubiano, A. Colubi, y M. A. Gil. La $\vec{\lambda}$-desviación cuadrática media para variables aleatorias difusas en poblaciones finitas. En: E. Montseny (Ed.), *VII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*, Ctra. Salou s/n. Tarragona, 1997. Departament d'Enginyeria Informàtica. Universitat Rovira i Virgili.

[790] S. Montes y P. Gil. Divergencias entre conjuntos y entre particiones difusas. En: E. Montseny (Ed.), *Actas del VII Congreso Español sobre Tecnología y Lógica Fuzzy*, Ctra. Salou s/n. Tarragona, 1997. Departament d'Enginyeria Informàtica. Universitat Rovira i Virgili.

[791] S. Montes, P. Gil, y C. Bertoluzza. Divergence between fuzzy sets and fuzziness. En: *Proceedings of IPMU'98 Conference*, páginas 1030–1035. 1998.

[792] S. Montes. *Particiones y Medidas de Divergencia en Modelos Difusos. Tesis Doctoral*. Universidad de Oviedo, 1998.

[793] S. Montes, I. Couso, y P. Gil. Medidas de divergencia entre particiones difusas. En: *Actas del Congreso 24'SEIO*, páginas 89–90. 1999.

[794] A. Yoshikawa y T. Nishimura. Relationship between subjective degree of similarity and some similarity indices of fuzzy sets. En: T. Yamakawa y G. Matsumoto (Eds.), *Methodologies for the Conception, Design, and Application of Intelligent Systems (Proceedings of the 4th International conference on Soft Computing [IIZUKA'96])*, páginas 818–821. World Scientific, Singapore, 1996.

[795] D. J. Sturman. *Whole-hand Input*. MIT, 1992. (Tesis Doctoral).

[796] K. Hirota. Concepts of probabilistic sets. En: *IEEE Conference on Decision and Control*, páginas 1361–1366. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), New Orleans, USA, 1977.

[797] K. Hirota. Extended fuzzy expression of probabilistic sets. En: M. M. Gupta, R. K. Ragade, y R. R. Yager (Eds.), *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, páginas 201–214. North Holland, Amsterdam, Holland, 1979.

[798] A. Kaufmann. *Les Expertons*. Hermes, París, France, 1987.

[799] A. Kaufmann. *Le Paramètrage des Moteurs d'Inférence*. Hermes, París, France, 1988.

[800] A. Kaufmann. Expert Appraisements and Counter-Appraisements with Experton Processes. En: B. M. Ayyub, M. M. Gupta, y L. Kanal (Eds.), *Analysis and Management of Uncertainty: Theory and Applications*, páginas 109–132. North-Holland, Amsterdam, 1992.

[801] A. Kaufmann y J. Gil Aluja. *Models per a la Recerca d'Efectes Oblidats*. Milladoiro, 1988.

[802] M. Á. Rodríguez. *Lenguaje de Signos*. Confederación Nacional de Sordos de España - Fundación ONCE, Madrid, 1992.

[803] D. A. Winter. *Biomechanics and Motor Control of Human Movement*. John Wiley Sons, New York, NY, USA, 1990.

[804] P. Boyes-Braem. Acquisition of the handshapes in American Sign Language: A preliminary analysis. En: V. Volterra y C. J. Erting (Eds.), *From Gesture to Language in Hearing and Deaf Children*, páginas 107–127. Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1990.

[805] R. Dennis, J. Reichle, W. Williams, y E. T. Vogelsberg. Motoric factors influencing the selection of vocabulary for sign production programs. *Journal of the Association for Persons with Severe Handicaps*, 7:20–32, 1982.

[806] B. Dorner. *Chasing the Colour Glove: Visual Hand Tracking*. School of Computing Science, Simon Fraser University, June 1994. (Master of Science Thesis).

[807] J. Lee y T. L. Kunii. Constraint-based hand animation. En: N. M. Thalmann y D. Thalmann (Eds.), *Models and Techniques in Computer Animation World (Proc. Computer Animation 93)*, páginas 110–127. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1993.

[808] J. Lee y T. L. Kunii. Model-based analysis of hand posture. *IEEE Computer Graphics and Applications*, páginas 77–86, September 1995.

[809] G. Burdea y P. Coiffet. *La réalité virtuelle*. Hermès, Paris, 1993.

[810] M. Soriano, J. R. González, M. González, y D. López. *La Tecnología al Servicio de los Discapacitados. Telecomunicaciones en Audición*. Anaya Multimedia, Madrid, 1999.

[811] F. G. Hofmann y G. Hommel. Analyzing human gestural motions using acceleration sensors. En: *Gesture Workshop*, páginas 39–59. 1996. http://pdv.cs.tu-berlin.de /forschung/IFP_engl.html.

[812] D. Maravall Gómez-Allende. *Reconocimiento de Formas y Visión Artificial*. RA-MA, Madrid, España, 1993.

[813] M. Macías. *Diseño y Realización de un Neurocomputador Multi-CPU*. Tesis Doctoral, Universidad de Extremadura. Departamento de Electrónica e Ingeniería Electromecánica, 1997.

[814] T. Pavlidis. Contour filling in raster graphics. *Computer Graphics and Image Processing*, páginas 126–141, 1979.

[815] T. Pavlidis. *Algorithms for Graphics and Image Processing*. Computer Science Press, Rockwille, 1982.

[816] R. C. González y R. E. Woods. *Digital Image Processing*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1993.

[817] J. G. March y H. A. Simon. *Organizations*. John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 1958.

[818] C. Perrow. *Sociología de las Organizaciones*. McGraw-Hill/Interamericana de España, S. A. U., Aravaca, Madrid, España, 1998. (Traducido por Benjamín González de: <Complex Organizations>, McGraw-Hill, Inc., 1986).

[819] Juan Pablo II. Discurso al mundo del trabajo en Oporto 7, 15-5-1982. En: D. Melé-Carné (Ed.), *Empresa y Economía al Servicio del Hombre. Mensajes de Juan Pablo II a los Empresarios y Directivos Económicos*. Ediciones Universidad de Navarra, S. A. (EUNSA), Pamplona, 1992.

[820] P. T. Kidd. El diseño interdisciplinario de sistemas de producción. *Quaderns de Tecnologia. Institut Català de Tecnologia*, 4:119–122, octubre 1991.

[821] R. Casamayor. La plantilla también cotiza. *El País - Negocios*, 13(784):34, noviembre 2000.

[822] UNICEF. *The State of the World's Children 1990*. Oxford University Press, Oxford - New York, 1990.

[823] C. Handy. What is a company for? *RSA Journal*, CXXXIX(5416), 1991.

[824] J. Filella. Persona y organización, de estructuras convencionales a formas funcionales. En: E. M. Recio y J. M. Lozano (Eds.), *Persona y Empresa. Libertad Responsable o Sujeción a las Normas*, páginas 37–98. Hispano Europea, Barcelona, 1994.

[825] A. Llano. Ética empresarial. *AEDIPE*, páginas 3–9, September 1993.

[826] A. Argandoña. Dignidad del trabajo y mercado de trabajo. En: D. Melé-Carné (Ed.), *Ética, Trabajo y Empleo. III Coloquio de Ética Empresarial y Económica*. Ediciones Universidad de Navarra, S. A. (EUNSA), Pamplona, 1994.

[827] G. Becker. *Human Capital*. Columbia University Press, New York, segunda edición, 1975.

[828] I. Chiavenato. *Gestión del Talento Humano: El nuevo papel de los recursos humanos en las organizaciones*. McGraw-Hill Interamericana, S. A., Bogotá, D. C., Colombia, 2002. (Traducido por Germán Villamizar de: <Gestao de pessoas. O novo papel dos recursos humanos nas organizaçoes>, Interface Assessoria e Planejamento y Editora Campus, Brasil).

[829] *Fuzzy Sets and Systems*, 49(1), 1992.

[830] C. Ponsard. Fuzzy mathematical models in economics. *Fuzzy Sets and Systems*, 28:273–283, 1988.

[831] J. Gil Aluja. *La Gestión Interactiva de los Recursos Humanos en la Incertidumbre*. Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, 1996.

[832] A. Kaufmann y J. Gil Aluja. *Introducción de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos a la Gestión de las Empresas*. Milladoiro, Santiago de Compostela, 1993. (tercera edición).

[833] L. Carroll. *Alicia en el País de las Maravillas*. Colección <El Libro de Bolsillo> (Vol. 276). Alianza Editorial, Madrid, España, 1986. (Traducción española de Jaime de Ojeda, de: <Alice's adventures in Wonderland>, 1865).

[834] D. Vilaseca. Daniel: el ordenador, una necesidad para el discapacitado, no un capricho. En: C. Basil, E. Soro-Camats, y C. Rosell (Eds.), *Sistemas de Signos y Ayudas Técnicas para la Comunicación Aumentativa y la Escritura. Principios Teóricos y Aplicaciones*, capítulo 15, páginas 199–207. Masson, Barcelona, 1998.

[835] ONU. Declaración de los Derechos de Personas con Retraso Mental (Resolución 2856, aprobada en la Asamblea General en su XXVI Sesión, de 20 de diciembre de 1971). *General Assembly Official Records Suppl. of The United Nations (New York)*, 29(A/8429):93, 1972.

[836] ONU. Declaración de los Derechos de las Personas Discapacitadas (Resolución aprobada en la Asamblea General en su XXX Sesión, de 9 de diciembre

de 1975). *General Assembly Official Records Suppl. of The United Nations (New York)*, 34(A/10034), 1976.

[837] Á. Marchesi. *El Desarrollo Cognitivo y Lingüístico de los Niños Sordos : Perspectivas Educativas.* Alianza Psicología, vol. 17. Alianza, Madrid, España, 1987.

[838] Á. Marchesi, P. Alonso, G. Paniagua, y M. Valmaseda. *Desarrollo del Lenguaje y del Juego Simbólico en Niños Sordos Profundos.* Ministerio de Educación y Ciencia, Centro de Publicaciones, Madrid, España, 1995.

[839] J. Palacios, Á. Marchesi, y C. Coll. *Desarrollo Psicológico y Educación. Vol. 1: Psicología Evolutiva. Vol. 2: Psicología de la Educación Escolar. Vol. 3: Trastornos del Desarrollo y Necesidades Educativas Especiales.* Colección El Libro Universitario: Manuales. Alianza, Madrid, España, 1999-2001.

[840] M. P. Fernández Viader. *La Comunicación de los Niños Sordos: Interacción Comunicativa Padres-Hijos.* PPU, Barcelona, España, 1996.

[841] B. J. Feijoo y Montenegro. Discurso XVI: Defensa de las mujeres. En: *Teatro Crítico Universal (1726-1740), Tomo Primero (1726).* Joaquín Ibarra (a costa de la Real Compañía de Impresores y Libreros, en Madrid, en 1778), 1726. (Disponible en: http://www.filosofia.org/bjf/bjft116.htm).

[842] J. Iglesias De Ussel y J. J. Ruiz Rico. Mujer y Derecho. En: M. Á. Durán (Ed.), *Liberación y Utopía.* AKAL, Madrid, España, 1982.

[843] J. L. Pintos. *Las Fronteras de los Saberes.* Akal, Torrejón de Ardoz, Madrid, España, 1990.

[844] C. Fernández Villanueva. La mujer y la psicología. En: M. Á. Durán (Ed.), *Liberación y Utopía*, páginas 81–102. AKAL, Madrid, España, 1982.

[845] A. Rodríguez, B. Goñi, y G. Maguregi. *El Futuro del Trabajo. Reorganizar y Repartir desde la Perspectiva de las Mujeres.* Bakeaz - Centro de Documentación y Estudios de la Mujer (CDEM), Bilbao, España, 1996.

[846] M. Waring. *If Women Counted: A New Feminist Economics.* Macmillan, London, UK, 1989.

[847] P. Streeten. The evolution of development thought: Facing up to global interdependence. En: M. Ekins, Paul y Max-Neef (Ed.), *Real-Life Economics.* Routledge, London, UK, 1992.

[848] M. Friedman y R. Friedman. *Libertad de Elegir: Hacia un Nuevo Liberalismo Económico.* Grijalbo, Barcelona, España, 1992. (Traducido al español de: <Free to Choose>, Harcourt Brace Jovanovich, New York, NY, USA, 1980).

[849] J. García Castillo. *La Pirámide Invertida.* Espasa Calpe, Madrid, España, 1994.

[850] E. Bueno. *Organización de Empresas. Estructura, Procesos y Modelos.* Pirámide, Madrid, 1997.

[851] A. Cuervo (Ed.). *Introducción a la Administración de Empresas.* Civitas, 1996.

[852] I. Chiavenato. *Administración de Recursos Humanos.* McGraw-Hill, México, 1993.

[853] D. A. De Cenzo y S. P. Robbins. *Human Resource Management.* Wiley, New York, NY, USA, séptima edición, 2001.

[854] N. Fernández. *Dirección de Equipos de Trabajo en las Organizaciones.* Civitas, Madrid, 1999.

[855] C. H. Besseyre Des Horts. *La Gestión Estratégica de Recursos Humanos.* Deusto, Bilbao, 1989.

[856] M. Beer, B. Spector, P. R. Lawrence, D. Q. Mills, y R. E. Walton. *Gestión de Recursos Humanos. Perspectiva de un Director General.* Ministerio de Trabajo y Seguridad Social, Madrid, 1989.

[857] P. Louart. *Gestión de los Recursos Humanos.* Gestión 2000, Barcelona, 1994.

[858] C. Lattmann y S. García. *Management de los Recursos Humanos en la Empresa.* Díaz de Santos, Madrid, 1992.

[859] P. Trouvé. El management de los recursos humanos entre la gestión «hard »y la gestión «soft ». En: *Nuevas Tendencias de Gestión de Recursos Humanos*, capítulo 1, páginas 11–46. Deustuko Unibertsitatea (Universidad de Deusto), 1990.

[860] C. H. Besseyre Des Horts. Typologies des pratiques de gestion de ressources humaines. *Revue française de gestion*, páginas 149–155, novembre - décembre 1987.

[861] D. Weiss (Ed.). *La fonction Ressources-Humaines.* D'Organisation, Paris, 1988.

[862] B. Garrat. *Creating a Learning Organisation. A Guide to Leadership, Learning and Development.* Director Books, Cambridge, 1990.

[863] C. Argyris. Skilled incompetence. *Harvard Business Review*, 64(5):74–79, 1986.

[864] C. Argyris. A leadership dilemma: Skilled incompetence. *Business and Economic Review*, 1(1):4–11, 1987.

[865] P. M. Senge. *The Fifth Discipline.* Bantam Doubleday Dell, New York, 1990. (La Quinta Disciplina, Granica, Buenos Aires, 1992).

[866] E. Punset. El poder, los innovadores y la información. En: *La Sociedad de la Información. Riesgos y Oportunidades para la Empresa Española.* Ciencias de la Dirección, Madrid, España, 1988.

[867] D. Belet. Comment construire l'entreprise apprenante. *L'Expansion. Management Review*, 99, 2000. (Disponible en: http://www.lexpansion.com).

[868] I. Fast. *Europa 1995. Nuevas Tecnologías y Cambio Social.* Fundesco, Madrid, 1986.

[869] J. Naisbitt y P. Aburdene. *Reinventing the Corporation, Megatrends.* Megatrends, 1985. (Traducido al español: <Reinventar la Empresa>, Folio, Barcelona, España, 1986).

[870] B. Ernst. *El Espejo Mágico de Maurits Cornelis Escher.* Benedikt Taschen Verlag, Berlin, Germany, 1990.

[871] S. Vásquez Bronfman. Nuevas tendencias en la organización empresarial. Factores críticos de éxito en la información de las empresas. *Alta Dirección*, 142:101, 1988.

[872] J. Wang y H. D. Dewhirst. Board of directors and stakeholder orientation. *Journal of Business Ethics*, 11:115–123, 1992.

[873] R. E. Freeman y D. Reed. Stockholders and stakeholders: a new perspective on corporate governance. *California Management Review*, 25(3):88–106, 1983.

[874] R. E. Freeman. *Strategic Management. A Stakeholder Approach.* Pitman, Boston, 1984.

[875] J. F. Rockart y J. S. Short. The networked organization and the management of interdependence. En: *The Corporation of the 1990s. Information Thecnology and Organizational Transformation*, páginas 189–219. Oxford University Press, Oxford, 1991.

[876] F. Solé y A. Bramanti. El por qué de las redes de cooperación tecnológica. *Quaderns de Tecnologia. Institut Català de Tecnologia*, 4:114–117, octubre 1991.

[877] L. A. García-Ramos. Hacia nuevas formas organizativas basadas en la información, las redes. *Datamation*, páginas 38–45, 1990.

[878] J. B. Quinn. *Intelligent Enterprise*. The Free Press, New York, 1992.

[879] A. Toffler. *Power Shift*. Bantam, New York, 1990. (El Cambio del Poder, Plaza y Janés, Barcelona, 1990).

[880] J. Naisbitt. *Megatrends, Ten New Directions Transforming Our Lives*. Warner Books, London, 1983. (Traducido al español: <Macrotendencias, diez nuevas orientaciones que están transformando nuestras vidas>, Mitre, Barcelona, España).

[881] R. Likert. *New Patterns of Management*. McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1961.

[882] R. Likert. *The Human Organization: Its Management and Value*. McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1967.

[883] R. Likert y J. Likert. *New Ways of Managing Conflict*. McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1976.

[884] T. J. Peters. *Del Caos a la Excelencia : Manual para una Revolución en la Dirección y Administración de Empresas*. Folio, Barcelona, España, 1990.

[885] J. M. Suárez Del Toro. Las nuevas tecnologías, una oportunidad para la acción humanitaria. Lección inaugural del curso 2002-2003 en la UOC, 2002. (Disponible en: www.uoc.edu/inaugural02/default_esp.html).

[886] L. Nuño. El efecto Frankenstein: cuando la tecnología olvida al hombre. *Contigo*, 18:6–10, 2003.

[887] D. R. Hampton. *Administración Contemporánea*. McGraw-Hill, México, 1981.

[888] C. A. Benavides. *Tecnología, Innovación y Empresa*. Colección Empresa y Gestión. Pirámide, Madrid, España, 1998. (Director de la colección: Eduardo Bueno Campos).

[889] J. Woodward. *Management and Technology*. Her Majesty's Stationery Office, London, UK, 1958.

[890] J. Woodward. *Industrial Organizations: Theory and Practice*. Oxford University Press, London, UK, 1965. (segunda edición revisada, 1994).

[891] R. Ozanne. *A Century of Labour-Management Relations at McCormick and International Harrester*. University of Wisconsin Press, Madison, 1967.

[892] L. Winner. Do Artifacts Have Politics? En: D. A. MacKenzie y J. Wajcman (Eds.), *The Social Shaping of Technology (2nd ed.)*. Open University Press, Buckingham, England, UK, 1999. (Traducido al español por Mario Francisco Villa. También en <The Whale and the Reactor: A Search for Limits in an Age of High Technology, The University of Chicago Press, Chicago, 1986 (pp. 19-39). Disponible en: http://www.oei.org.co/cts/winner.htm).

[893] C. Perrow. *Organizational Analysis: A Sociological View*. Wadsworth Publishing Company Inc., Belmont, CA, USA, 1970.

[894] S. Aït El Hadj. *Gestión de la Tecnología. La Empresa ante la Mutación Tecnológica*. Gestión 2000, Barcelona, España, 1990.

[895] J. E. Navas López. *Organización de Empresas y Nuevas Tecnologías*. Pirámide, Madrid, España, 1994.

[896] J. M. Vegara. *Ensayos Económicos sobre Innovación Tecnológica*. Alianza, Madrid, España, 1989.

[897] C. Fernández Casado. Problemas de las Escuelas Técnicas Superiores (I). En: J. Ballesteros (Ed.), *La Universidad*, páginas 195–200. Ciencia Nueva, Madrid, España, 1969.

[898] J. Munro Fraser. *Las Entrevistas de Selección de Personal : Qué Persona Para Qué Puesto*. Deusto, Bilbao, España, 1983.

[899] A. Marzal. *Análisis Político de la Empresa. Razón Dominante y Modelos de Empresa*. Ariel, Barcelona, 1990.

[900] J. M. Gil. La gestión de recursos humanos en puestos de nuevas tecnologías. En: P. Trouvé (Ed.), *Nuevas Tendencias de Gestión de Recursos Humanos*, capítulo 11, páginas 257–282. Deustuko Unibertsitatea (Universidad de Deusto), 1990.

[901] O. Helmer. On the epistemology of inexact sciences. *Management Science*, 6(1), 1960.

[902] J. G. Mason. New way to improve your decisions. *Nation's Business*, June 1964.

[903] R. E. Stross. *El Estilo Microsoft. Ascenso y Triunfo de un Modelo Empresarial*. Grijalbo Mondadori, Barcelona, España, 1997. (Traducido al español por José Manuel Pomares de: <The Microsoft way>, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, USA, 1996).

[904] A. Bazinet. *La Evaluación del Rendimiento. Métodos para la Evaluación de los Mandos Intermedios en la Empresa*. Herder, Barcelona, España, 1984.

[905] M. D. Dunnette. *Selección y Administración de Personal*. CECSA, México, 1976. (Personnel Selection and Placement, Wadsworth Publishing, Belmont, CA, USA).

[906] C. Perkins Gilman. *Dellas, un Mundo Femenino*. Abraxas, Barcelona, España, 2000. (Traducción de Jorge A. Sánchez, Herland, publicada en la revista mensual de Charlotte Perkins Gilman, <The Forerunner>, serializada en los doce números anuales del año 1915).

[907] E. A. Arbones. *Ingeniería de Sistemas*. Marcombo, Barcelona, España, 1991.

[908] R. S. Pressman. *Ingeniería del Software. Un Enfoque Práctico*. McGraw-Hill/Interamericana de España, Aravaca, Madrid, España, quinta edición, 2002. (Software Engineering. A Practitioner's Approach. European Adaptation).

[909] B. W. Boehm. *Risk Management*. IEEE Computer Society Press, Washington, D. C., USA, 1989.

[910] H. A. Simon. A behavioral model of rational choice. *Quaterly Journal of Economics*, 69:99–118, 1955. (Reimpreso en: <Models of Man>, Wiley, New York 1957, 241-260).

[911] H. A. Simon. *The New Science of Management Decision*. Harper & Row, New York, NY, USA, 1977.

[912] C. E. Osgood, G. J. Suci, y P. H. Tannenbaum. *The measurement of meaning*. University of Illinois, Urbana, IL, USA, 1957.

[913] G. L. Huber. La evaluación de los alumnos en la Educación a Distancia. En: A. Medina Rivilla (Ed.), *Teoría y Métodos de Evaluación*. Cincel, Madrid, España, 1991.

[914] J. I. Castresana y A. Blanco. *El Directivo Impulsor de la Innovación*. Marcombo Boixareu, Barcelona, España, 1990.

[915] R. L. Thorndike. *Psicometría Aplicada*. Limusa, México, D. F., 1989. (Traducido al español por Julio Fournier González de: <Applied Psychometrics>, Houghton Mifflin Company).

[916] R. Meili. *La Estructura de la Inteligencia*. Herder, Barcelona, 1986. (Struktur der Intelligenz, Verlag Hans Huber, Berna, 1981).

[917] P. Agell Ferrer y J. A. Segarra Torres. *Escuchando la Voz del Mercado. Decisiones de Segmentación y Posicionamiento*. Ediciones Universidad de Navarra, S. A. (EUNSA), Barañáin, Navarra, España, 2001.

[918] C. A. Wilkins y W. A. Sands. A comparison of ordinary least-squares linear regression and artificial neural networks: Back-propagation models for personnel selection decisions. En: *Proceedings of the Navy Personnel Research and Development Center Neural Network Conference*. San Diego, CA, USA, 1993.

[919] C. A. Wilkins y W. A. Sands. Comparison of a Back Propagation Artificial Neural Network Model With a Linear Regression Model for Personnel Selection. Informe Técnico NPRDC-TN-94-18 (AD-A280 023), Navy Personnel Research and Development Center, May 1994.

[920] M. L. Gargano, R. A. Marose, y L. Von Kleeck. An application of artificial neural networks and genetic algorithms to personnel selection in the financial industry. En: *Proceedings of The First International Conference on Artificial Intelligence on Wall Street*, páginas 257–262. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA, 1991.

[921] M. L. Gargano, R. A. Marose, y L. Von Kleeck. An Application of Artificial Neural Networks and Genetic Algorithms to Personnel Selection in the Financial Industry. Informe Técnico 49, School of Computer Science and Information Systems. Pace University, March 1992.

[922] S. C. K. Shiu, J. K. Liu, y D. S. Yeung. An approach towards the verification of fuzzy hybrid rule/frame based expert systems. En: W. Wahlster (Ed.), *Proceedings of The 12th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'96). Workshop in Validation, Verification and Refinement of Knowledge Based Systems*, páginas 105–113. John Wiley and Sons, Budapest, 1996. 12-16 August.

[923] C. M. Moreno Pérez. La conducta del directivo y los recursos humanos. *rrhh-Magazine.com*, 2002. (Sección: RRHH ética; [http://www.rrhhmagazine.com]).

[924] M. J. Yate. *Esta Vez Contrate al Mejor*. Javier Vergara Editor, S. A., Buenos Aires, Argentina, 1991. (Traducido al español, por Aníbal Leal, de: <Hiring the Best>, Bob Adams, Inc.).

[925] P. Hauenstein. Using technology to get the best employees. *Advantage Hiring Newsletter*, June, 1 2000. [http://www.advantagehiring.com/newsletter/0600/n0600_1.htm].

[926] H. M. Fisher. Selecting the right executive the first time. *Personnel Journal (ahora Workforce Magazine)*, July 1995. [http://www.workforce.com].

[927] B. D. Smart. *Top Grading: How Leading Companies win by Hiring, Coaching, and Keeping the Best People*. Prentice Hall Press, Paramus, New Jersey, USA, 1999.

[928] J. E. Taylor. Is your leader a good fit for the organization? *Advantage Hiring Newsletter*, March 2001. [http://www.advantagehiring.com/newsletter/0301/Is-your-leader.htm].

[929] P. Hauenstein. How do I reduce turnover? Let me count the ways. *Advantage Hiring 4Q99 Newsletter*, 1999. [http://www.advantagehiring.com/newsletter/n99Q4_4.htm].

[930] C. Hirschman. Playing the high-stakes hiring game. *HR Magazine*, 1998. (marzo).

[931] S. L. Dolan, R. S. Schuler, y R. Valle Cabrera. *La Gestión de los Recursos Humanos*. Mc Graw Hill, Madrid, España, 1999.

[932] C. A. O'Reilly, J. Chatman, y D. F. Caldwell. People and organizational culture: A profile comparison approach to assessing person-organization fit. *Academy of Management Journal*, 34(3):487–516, 1991.

[933] K. Lovelace y B. Rosen. Differences in achieving person-organization fit among diverse groups of managers. *Journal of Management*, 22(5):703–722, 1996.

[934] M. Leboeuf. *El Gran Principio del Management (GPM)*. Grijalbo, Barcelona, España, 1986.

[935] B. R. Inc. How do you manage turnover? in a time of lean organizations and dwindling pools of experienced new-hires. En: *Effective Management Through Measurement. Special Reports (Volume 3)*. Bavendam Research Incorporated, Mercer Island, WA, USA, 1999.

[936] M. P. Andrés Reina y D. Tous Zamora. Internet. Una nueva herramienta para el reclutamiento. En: *Novos Desafios na Gestão: Inovação ou Renovação?* Universidade da Beira Interior, Departamento de Gestão e Economia, 2002. (Actas de las XII Jornadas Luso-Espanholas de Gestão Científica, Covilhã, 10-12 de abril de 2002).

[937] E. Navarro. Ventajas de usar Internet en la selección de personal. 2001. (<http://www.improven-consultores.com/>).

[938] I. Rico. El reclutamiento a través de Internet no se practica en España. *iWorld*, 2001. (<http://www.idg.es/iworld/>).

[939] R. Moskowitz. Get "FIT" to reduce turnover. *Advantage Hiring 4Q99 Newsletter*, 1999. [http://www.advantagehiring.com/newsletter/n99Q4_3.htm].

[940] R. Moskowitz. It pays to tell the truth: Realistic Job Previews. *Advantage Hiring 4Q99 Newsletter*, 1999. [http://www.advantagehiring.com/newsletter/n99Q4_2.htm].

[941] J. P. Wanous. *Organizational Entry: Recruitment, Selection, Orientation, and Socialization of Newcomers*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, USA, 1992.

[942] J. A. Breaugh. *Recruitment: Science and Practice*. PWS-Kent, Boston, USA, 1992.

[943] R. A. Dean y J. P. Wanous. Effects of realistic job previews on hiring bank tellers. *Journal of Applied Psychology*, 69:61–68, 1984.

[944] S. L. Premack y J. P. Wanous. A meta-analysis of realistic job preview experiments. *Journal of Applied Psychology*, 70:706–719, 1985.

[945] P. Hauenstein. Testing from a test-taker's perspective. *Advantage Hiring Newsletter*, December 5 2000. [http://www.advantagehiring.com/newsletter/1200/n1200_1.htm].

[946] J. L. Ardanza. Buscar empleo entre conocidos y amigos. *Expansión*, 2001. (<www.expansionyempleo.com>, 7-4-2001).

[947] L. Bowes. *Recursos Humanos en la Empresa: Captación y Motivación*. Plaza y Janés, 1988.

[948] L. M. Crespo Sánchez y N. Toledano Garrido. Los programas de referencia de empleados en el reclutamiento externo de personal: ¿novedad o tradición? En: *Novos Desafios na Gestão: Inovação ou Renovação?* Universidade da Beira Interior, Departamento de Gestão e Economia, 2002. (Actas de las XII Jornadas Luso-Espanholas de Gestão Científica, Covilhã, 10-12 de abril de 2002).

[949] W. L. French. *Administración de Personal. Desarrollo de Recursos Humanos.* Limusa, México, 1991.

[950] P. Drucker. *Management Challenges for 21st Century.* Harper Businnes, New York, NY, USA, 1999.

[951] D. C. McClelland. Testing for competence rather than intelligence. *American Psychologist*, 28:1–14, 1973.

[952] CCHRA. Competencies: a review of the literature and bibliography. En: *Human Resources Profession Competencies Project.* Canadian Council of Human Resource Associations (CCHRA), http://www.chrpcanada.com.

[953] C. Brewster, E. Farndale, y J. Van Ommeren. *Competencias y Estándares Profesionales para la Dirección de Personal / Recursos Humanos.* Asociación Española de Dirección de Personal (AEDIPE), Asociación Mexicana en Dirección de Recursos Humanos (AMEDIRH), Fundación para el Desarrollo de la Función de Recursos Humanos (FUNDIPE), 2000.

[954] R. E. Boyatzis. *The Competent Manager: A Model for Effective Performance.* Wiley, Europe, 1982.

[955] M. E. Porter. Clusters and the new economics of competition. *Harvard Business Review*, 76(6):77–90, 1998.

[956] P. Hauenstein. Competency modeling approaches and strategies. *Advantage Hiring Newsletter*, July 2000. [http://www.advantagehiring.com/newsletter/0700/n0700_1.htm].

[957] J. T. Kochanski. Introduction to special issue on human resource competencies. *Human Resource Management*, 35(1):3–6, 1996.

[958] W. Brockbank. HR's future on the way to a presence. *Human Resource Management*, 36(1):65–69, 1997.

[959] L. M. Holmes. Taking the lead on professional standards. *Personnel Management*, 24(11):36–39, 1992.

[960] R. S. Siegler y D. D. Richards. The development of intelligence. En: R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of Human Intelligence.* University Press, Cambridge, 1982.

[961] D. J. Wood. Teaching the young child: some relationships between social intervention, language and thought. En: D. R. Olson (Ed.), *The Social Foundations of Language and Thought.* Norton, New York, NY, USA, 1980.

[962] R. Feuerstein, Y. Rand, y M. D. Hoffman. *The Dynamic Assessment of Retarded Performers: The Learning Potential Assessment Device. Theory, Instruments and Techniques.* University Press, Baltimore, USA, 1979.

[963] L. S. Vygotski. *Mind in Society.* Harvard University Press, Cambridge, MA, USA, 1978.

[964] M. Á. Marín Gracia. *El Potencial de Aprendizaje: Aplicaciones al Diagnóstico y la Orientación.* Promociones Publicaciones Universitarias, Barcelona, España, 1987.

[965] M. Román Pérez y E. Díez López. *Inteligencia y Potencial de Aprendizaje: Evaluación y Desarrollo. Una Metodología Didáctica Centrada en los Procesos.* Educación y Futuro: Monografías para la Reforma. Cincel - Kapelusz, Madrid, España - Bogotá, Colombia, 1988.

[966] A. Rivière. *La Psicología de Vygotski.* Aprendizaje. Visor, Madrid, España, 1985.

[967] F. Galton. *Hereditary Genius: An Inquiry into Its Laws and Consequences.* Macmillan, London, England, UK, 1869. (Reimpresión, Bristol: Thoemmes Press, 1999).

[968] J. B. Watson. Psychology as the behaviorist views it. *Psychological Review*, 20:158–177, 1913.

[969] J. V. Wertsch. The zone of proximal development : some conceptual issues. En: B. Rogoff y J. V. Wertsch (Eds.), *Children's Learning in the "Zone of Proximal Development" (Vol. 23)*, páginas 7–18. Jossey-Bass Inc., Publishers, San Francisco, Washington and London, 1984.

[970] R. J. Sternberg. Toward a triarchic theory of human intelligence. *The Behavioral and Brain Sciences*, 7:269–315, 1984.

[971] R. J. Sternberg. *Las Capacidades Humanas.* Labor, Barcelona, España, 1987.

[972] R. J. Sternberg. *La Inteligencia Humana.* Paidós, Barcelona, España, 1987.

[973] J. L. Pinillos. La Mejora Científica de la Inteligencia. *Análisis y Modificación de Conducta*, 7(14-15):115–154, 1981.

[974] K. J. Weber. *Yes, They Can.* Methuen - Pu, Toronto, 1974.

[975] L. S. Vygotski. Aprendizaje y desaroollo intelectual en la edad escolar. *Infancia y Aprendizaje*, 27-28:105–116, 1984.

[976] J. P. Das, J. Kirby, y R. F. Jarman. Simultaneous and successive synthesis: an alternative model for cognitive abilities. *Psychological Bulletin*, 82(1):87–103, 1975.

[977] J. P. Das, J. Kirby, y R. F. Jarman. *Simultaneous and successive congnitive processes.* Academic Press, New York, NY, USA, 1979.

[978] J. P. Das. Structure of cognitive abilities: evidence for simultaneous and successive processing. *Journal of Educational Psychology*, 65:103–108, 1973.

[979] A. Rey. D'un procédé pour évaluer l'educabilité: quelques applications en psychopathologie. *Archives de Psychologie*, 24:297–337, 1934.

[980] R. Semler. *Contra la Corriente.* Colección <Business Class>. Javier Vergara Editor, S. A., Bogotá, Colombia, 1997. (Traducido al español por Mirta Jajam de Waitzman, de: <Maverick>, Warner Books, Inc.).

[981] P. Hauenstein. Work roles as an alternative to competencies. *Advantage Hiring Newsletters*, 2000. [http://www.advantagehiring.com/newsletter/0700/n0700_2.htm].

[982] A. Vázquez-Figueroa. *Una Universidad Alternativa.* Plaza y Janés, Esplugues de Llobregat, Barcelona, España, 1989.

[983] M. Pérez Sabat. La organización científica de la industria: Productividad. En: *Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo - Americana. Suplemento 1957-1958*, páginas 1118–1131. Espasa Calpe, Madrid, 1961.

[984] J. M. Aguirre De Mena, M. P. Andrés Reina, J. Rodríguez Rodríguez, y D. Tous Zamora. *Dirección y Gestión de Personal.* Pirámide, Madrid, 2000.

[985] P. Bourdieu. *La Distinction. Critique Social du Jugement.* Minuit, Paris, France, 1979.

[986] A. Serrano González. *Como Lobo entre Ovejas. Soberanos y Marginados en Bodin, Shakespeare, Vives.* Centro de Estudios Constitucionales, Madrid, España, 1992.

[987] R. R. Yager. Fuzzy decision making using unequal objectives. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:87–95, 1978.

[988] T. L. Saaty. *The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation.* McGraw-Hill, New York, 1980.

[989] R. R. Yager. On weighted median aggregation. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*, 1:101–113, 1994.

[990] R. R. Yager. Fuzzy screening systems. En: R. Lowen y M. Roubens (Eds.), *Fuzzy Logic: State of the Art*, páginas 251–261. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Nederland, 1993.

[991] C.-L. Hwang y K. P. Yoon. *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications.* Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1981.

[992] S. J. Chen y C.-L. Hwang. *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications.* Springer-Verlag, New York, 1992.

[993] R. Slowinski y J. Teghem (Eds.). *Stochastic versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty.* Kluwer, Boston, 1990.

[994] J. C. Fodor y M. Roubens. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support.* Kluwer, Boston, 1995.

[995] R. R. Yager. An application of fuzzy set and possibility theory (I; II). *Fuzzy Mathematics*, 2(2; 3):21–28; 7–16, 1982.

[996] J. Sarramona López. La educación como sistema de comunicación. En: J. L. Castillejo Brull y A. J. Colom Cañellas (Eds.), *Pedagogía Sistémica*, páginas 139–158. CEAC, Barcelona, España, 1987.

[997] J. Bullaude. *Enseñanza Audiovisual y Comunicación.* Librería del Colegio, Buenos Aires, Argentina, 1968.

[998] W. Weaver. The Mathematics of Communication. *Scientific American*, páginas 313–317, 1949.

[999] S. Mallas. Generalidades sobre Teoría de la Comunicación y Elementos de Semiología. *Medios Audiovisuales*, 32(julio), 1974.

[1000] D. K. Berlo, J. B. Lemert, y R. J. Mertz. Dimensions for evaluating the acceptability of message sources. *Public Opinion Quarterly*, 33(4):563–576, 1969.

[1001] R. L. Applbaum, K. Anatol, E. R. Hays, O. O. Jenson, R. E. Porter, y J. E. Mandel. *Fundamental Concepts in Human Communication.* Cufield Press, San Francisco, CA, USA, 1973.

[1002] D. K. Berlo. *El Proceso de la Comunicación. Introducción a la Teoría y a la Práctica.* El Ateneo, Buenos Aires, Argentina, 1969.

[1003] R. R. Yager. On modeling interpersonal communications. En: P. P. Wang y S. K. Chang (Eds.), *Fuzzy Sets. Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems*, páginas 309–320. Plenum Press, New York, 1980.

[1004] R. R. Yager. Toward a theory of signal response based on fuzzy sets. En: *Proceedings of the International Conference on Cybernetics and Society*, páginas 921–925, Tokyo, 1978.

[1005] R. D. Luce. Detection and recognition. En: R. D. Luce y R. R. Bush (Eds.), *Handbook of Mathematical Psychology (Vol. I)*, páginas 191–244. John Wiley and Sons, New York, 1963.

[1006] C. Cherry. *On Human Communication.* The MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1966.

[1007] F. Restle y J. G. Greeno. Introduction to Mathematical Psychology. Addisson-Wesley, Reading, Mass., 1970.

[1008] C. Castilla Del Pino. *Teoría de la Alucinación. Una Investigación de Teoría Psico(pato)lógica.* Alianza, Madrid, 1984.

[1009] M. Mizumoto. Note on the arithmetic rule by Zadeh for fuzzy conditional inference. *Cybern. Syst.*, 12:247–306, 1981.

[1010] M. Mizumoto. Comparison of various fuzzy reasoning methods. En: *Proc. 2nd IFSA Congress.* Tokyo, July 1987.

[1011] L. A. Zadeh. Probability measures of fuzzy events. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 23:421–427, 1968.

[1012] P. Makovetski. *¡Mire al Fondo de las Cosas!* Rubiños-1860 y Euro-Omega, Madrid, España, 1995. (Traducido del ruso por: Ballesteros, A., Duarte Rivera, L., Kuríndina, T. y Murzín, Yu.).

[1013] N. Copeland. *Psychology and the Soldier.* The Military Service Publishing Company, Harrisburg, Pennsylvania, USA, 1942.

[1014] M. Amelang y D. Bartussek. *Differentielle Psychologie und Persönlichkeitsforschung.* Kohlhammer, Stuttgart, 1981. (Versión española: <Psicología Diferencial e Investigación de la Personalidad>, Herder, Barcelona, España, 1986).

[1015] A. R. Buss y W. Poley. *Individual Differences: Traits and Factors.* Gardner Press, New York, NY, USA, 1976. (Trad. al español: <Diferencias Individuales>, Manual Moderno, México, 1979).

[1016] B. R. Colom Marañón. *Tests, Inteligencia y Personalidad.* Pirámide, Madrid, España, 1995.

[1017] B. R. Colom Marañón. *Orígenes de la Diversidad Humana.* Pirámide, Madrid, España, 1996.

[1018] R. M. Gagné, L. J. Briggs, y W. W. Wager. *Principles of Instructional Design.* Harcourt Brace Jovanovich, Fort Worth, Texas, USA, cuarta edición, 1992.

[1019] J. Rifkin. *The End of Work: The Decline of the Global Labor Force and the Dawn of the Post-Market Era.* G.P. Putnam's Sons, New York, NY, USA, 1995.

[1020] I. Illich. *Deschooling Society.* Harper & Row, New York, NY, USA, 1972.

[1021] H. Marcuse. *Eros et Civilisation.* Éd. de Minuit, Paris, 1963.

[1022] L. Bergson. *Les deux sources de la morale et de la religion.* Alcan, Paris, 1932.

[1023] J. Onimus. *Cuando el Trabajo se Acaba.* Acento, Madrid, 1998.

[1024] P. Thuillier. *La Grande Implosion.* Fayard, Paris, 1995.

[1025] T. De Chardin. *La place de l'homme dans la nature.* Albin Michel, Paris, 1996.

[1026] S. Butler. *Erewhon: Un Mundo Sin Máquinas.* Abraxas, Barcelona, España, 1999. (Tradudido al español por Alberto Laurent: <Erewhon, or, Over the Range>, publicado en 1872).

[1027] H. Wesselman. *Encuentros con el Espíritu. Revelaciones de un Viaje Místico*. Plaza y Janés, Barcelona, España, 1995.

[1028] A. Fernández Díaz. *Política Económica Coyuntural*. ICE, Madrid, España, 1985.

[1029] J. D. S. Appleton. *Labour Economics*. Macdonald and Evans, Ltd., London, UK, 1975.

[1030] M. F. Royo Ubieto. *Para Parar el Paro: Mil Nuevas Ideas para Currar*. Temas de Hoy, Madrid, España, 1992.

[1031] J. Hicks. *Value and Capital: an Inquiry into some Fundamental Principles of Economic Theory*. Clarendon Press, Oxford, 1946. (primera edición, 1939).

[1032] J.-P. Giran y R. Granier. *Politique de l'emploi*. Economica, 1983.

[1033] R. Buxarrais. *Cartas a Valerio*. Desclée De Brouwer, Bilbao, 1995.

[1034] W. H. Knowles. *Principios de Dirección de Personal*. RIALP, Madrid, España, 1965. (Traducido al español, por Helena Estelles, de: <Personnel Management>, American Book Company, New York, NY, USA, 1955).

[1035] H. Mintzberg. *La Estructuración de las Organizaciones*. Ariel, Barcelona, España, 1988.

[1036] J. Orasanu y E. Salas. Team decision making in complex environments. En: G. A. Klein, J. Orasanu, R. Calderwood, y C. E. Zsambok (Eds.), *Decision Making in Action: Models and Methods*. Ablex Publishing Co., Norwood, NJ, 1993.

[1037] E. Salas, T. L. Dickinson, S. A. Converse, y S. I. Tannenbaum. Toward an understanding of team performance and training. En: R. W. Swezey y E. Salas (Eds.), *Teams: Their Training and Performance*. Ablex Publishing Co., Norwood, NJ, 1992.

[1038] M. H. Burstein, A. M. Mulvehill, y S. Deutsch. An approach to mixed-initiative management of heterogeneous software agent teams. En: *Proceedings of the 32nd Hawaii International Conference on System Sciences*. IEEE, 1999.

[1039] F. Blanco Prieto. *La Evaluación en la Educación Secundaria*. Amarú Ediciones, Salamanca, España, 1996.

[1040] N. Hogg. *Decisiones Empresariales basadas en Modelos Financieros*. Colección Biblioteca de Empresa (dirigida por Víctor Pou). Folio - Pitman Publishing, Barcelona, España, 1994. (Bussiness Forecasting using Financial Models; traducido del inglés por Alejandro Pareja y revisado por Joan Mir).

[1041] J. García. *La Comunicación Interna*. Díaz de Santos, Madrid, 1998.

[1042] M. Del Pozo Lite. *Cultura empresarial y Comunicación interna*. Fragua, Madrid, España, 1997.

[1043] J. M. La Porte. *Gestión y Comunicación Interna en las Organizaciones sin Ánimo de Lucro*. EIUNSA, 2002.

[1044] C. Ongallo. Cinco claves para entender la comunicación interna. *Revista de Relaciones Laborales*, 19:114–122, octubre 1997. (http://www.geocities.com/CollegePark/Campus/8406/3.html).

[1045] C. Ongallo. *Manual de comunicación. Guía para gestionar el conocimiento, la información y las relaciones humanas en empresas y organizaciones*. Dykinson S.L., 2000.

[1046] C. Ongallo. Las comunidades virtuales en el contexto de la comunicación interna. En: *Foros de Orientación Estratégica. Quinto Foro: Competitividad y Actividades Ligadas a la Información y el Conocimiento*, páginas 17–29. Instituto para el Desarrollo de la Sociedad de la Información y el Conocimiento, 2001.

[1047] A. O. Hirschman. *Salida, Voz y Lealtad, Respuestas al Deterioro de Empresas, Organizaciones y Estados*. Fondo de Cultura Económica, México, 1970.

[1048] N. Luhmann. *Sistemas Sociales. Lineamientos para una Teoría General*. Alianza Universidad Iberoamericana, México, 1991.

[1049] F. M. Tapia Uribe. El espacio íntimo en la construcción intersubjetiva. En: E. León y H. Zemelman (Eds.), *Subjetividad: Umbrales del Pensamiento Social*. Anthropos - Centro Regional de Investigaciones Multidisciplinarias. Universidad Nacional Autónoma de México, Rubí, Barcelona, España - México, 1997.

[1050] G. W. Allport. *The Nature of Prejudice*. Addison-Wesley, Cambridge, MA, USA, 1954.

[1051] J.-S. Lee. *Thinking About Higher Order Thinking: Abstraction and Stereotype Thinking In Education*. Social Science Research Institute, Northern Illinois University, DeKalb, IL, USA, 1989.

[1052] NCREL. Stereotypic thinking. *NCREL- Online*, 2003. (North Central Regional Educational Laboratory).

[1053] R. E. Slavin. Cooperative learning and intergroup relations. En: J. A. Banks y C. A. M. Banks (Eds.), *Handbook of Research on Multicultural Education*, páginas 628–634. Jossey-Bass (a John Wiley and Sons company), San Francisco, CA, USA, 2001.

[1054] G. Freyre. *Más Allá de lo Moderno*. Espasa-Calpe, Madrid, España, 1977. (Traducido al español por María Josefa Canellada de: <Além do Apenas Moderno>, Livraria José Olympio Editora, Río de Janeiro, Brasil, 1973).

[1055] D. Noble. Social Choice in machine design; the case of automatically controlled machine tools, and a challenge for labor. *Politics and Society*, 8:313–347, 1978.

[1056] S. Lubar. Machine politics: The political construction of technological artifacts. En: S. Lubar y W. D. Kingery (Eds.), *History From Things*, páginas 197–214. Smithsonian Institution Áress, Washington, WA, USA, 1993.

[1057] B. Latour. The Prince for Machines as well as for Machinations. En: B. Elliot (Ed.), *Technology and Social Process*. Edinburgh University Press, Edinburgh, 1988.

[1058] M. L. Fuller. Multicultural concerns and classroom management. En: C. Grant y M. Gómez (Eds.), *Making Schooling Multicultural: Campus and Classroom*, páginas 134–158. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 1996.

[1059] A. Tversky y I. Gati. Studies of similarity. En: E. Rosch (Heider) y B. Lloyd (Eds.), *Cognition and Categorization*, páginas 79–98. Erlbaum, Hillsdale, NJ, USA, 1978.

[1060] S. Kitayama, H. Markus, P. Tummala, M. Kurokawa, y K. Kato. Culture and self-cognition. (citado por Medin, Goldstone y Markman, <Comparison and choice: Relations between similarity processes and decision processes>), 1990.

[1061] C. Peme De Aranega, S. V. Gerbaudo, A. Ferreira de Rubio, y E. Echevarría. El proceso de elaboración de un inventario de creencias didácticas y epistemológicas (ICDE). *Interdisciplinaria. Revista de Psicología y Ciencias Afines*, 15(2-3):1–37, 1999.

[1062] V. Mellado Jiménez, C. Peme De Aranega, C. Redondo Muñoz, y M. L. Bermejo García. Los mapas cognitivos en el análisis gráfico de las concepciones del profesorado de Ciencias Experimentales. *Campo Abierto*, 22:37–58, 2002.

[1063] D. E. Super. *Work Values Inventory*. Houghton Miffin, New York, NY, USA, 1970.

[1064] R. Likert. A technique for the measurement of attitudes. *Archives of Psychology*, 140, June 1932.

[1065] O. G. León y I. Montero. *Diseño de Investigaciones. Introducción a la Lógica de la Investigación en Psicología y Educación*. McGraw-Hill, Madrid, España, 1999.

[1066] J. L. Holland. *Making Vocational Decisions*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1985.

[1067] K. Hollweg, C. Kubota, y P. Ferrell. *Changing What We Do: Constructing a Team-Based, Problem-Centered Professional Development Experience*. North American Association for Environmental Education (NAAEE) Publications and Membership Office, Troy, OH, USA, 1998.

[1068] Bridges. *Career Finder. A Vocational Interest and Skills Modeling Approach to Interactive Occupation Research*. bridges.com, Inc., 2003. (http:// careeradvantage.com/careerfinder/cfinder.pdf).

[1069] H. A. Simon. *Administrative Behavior*. MacMillan, New York, NY, USA, 1961. (Traducido al español: <El comportamiento administrativo>, Aguilar, Buenos Aires, Argentina, 1982).

[1070] M. Zeleny. *Multiple Criteria Decision Making*. McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1982.

[1071] L. Á. Guerras Martín. *Gestión de Empresas y Programación Multicriterio*. ESIC, Madrid, España, 1989.

[1072] P.-L. Yu. Decision dynamics, with an application to persuasion and negotiation. En: M. K. Starr y M. Zeleny (Eds.), *Studies in the Management Sciences (Vol. 6)*, páginas 159–177. North-Holland, Amsterdam, Nederland, 1977.

[1073] P. G. W. Keen y M. S. Scott Morton. *Decision Support Systems. An Organizational Perspective*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA, 1978.

[1074] I. P. Levin, R. D. Johnson, y S. V. Faraone. Information integration in price-quality tradeoffs: The effect of missing information. *Memory and Cognition*, 12:96–102, 1984.

[1075] I. L. Janis y L. Mann. Coping with decisional conflict. *American Scientist*, 64:657–667, 1976.

[1076] H. R. Varian. *Intermediate Microeconomics. A Modern Approach*. W. W. Norton & Co., New York, NY, USA, quinta edición, 1999. (Cap. 1 disponible en: http://turnbull.sk.tsukuba.ac.jp/Kyouiku/MikuroKeizaigaku/Varian/Ch1.html).

[1077] A. Geoffrion. Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22:618–630, 1968.

[1078] R. Steuer. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*. Wiley, New York, NY, USA, 1986.

[1079] M. Hening. Value functions, domination cones and proper efficiency in multicriteria optimization. *Mathematical Programming*, 46:205–217, 1990.

[1080] G. Hamel y C. K. Prahalad. *Compitiendo por el Futuro*. Ariel, Barcelona, España, 1995.

[1081] S. Barba-Romero y J.-C. Pomerol. *Decisiones Multicriterio: Fundamentos Teóricos y Utilización Práctica*. Servicio de Publicaciones. Universidad de Alcalá, 1997.

[1082] S. Barba-Romero y J.-C. Pomerol. *Multicriterion Decision in Management: Principles and Practice*. International Series in Operations Research and Management Science, Volume 25. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.

[1083] A. Charnes, W. Cooper, y E. Rhodes. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2:429–444, 1978.

[1084] V. Mousseau. Analyse et classification de la littérature traitant de l'importance relative des critères en aide multicritère à la décision. *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, 26(4):367–389, 1992.

[1085] A. T. W. Chu, R. E. Kalaba, y K. Spingarn. A comparison of two methods for determining the weights of belonging to fuzzy sets. *Journal of Optimization Theory and Application*, 27:531–538, 1979.

[1086] T. L. Saaty. A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology*, 15:234–281, 1977.

[1087] C.-L. Hwang y M.-J. Lin. *Group Decision Making under Multiple Criteria: Methods and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1987.

[1088] P. Rietveld y H. Ouwersloot. Ordinal data in multicriteria decision making, a stochastic dominance approach to sitting nuclear power plants. *European Journal of Operational Research*, 56(2):249–262, 1984.

[1089] D. Von Winterfeldt y W. Edwards. *Decision Analysis and Behavioral Research*. Cambridge University Press, 1986.

[1090] A. L. Knoll y A. Engelberg. Weighting multiple objectives. The Churchman-Ackoff technique revisited. *Computers and Operations Research*, 5:165–177, 1978.

[1091] V. Srinivasan y A. D. Shocker. Linear programming techniques for multidimensional analysis of preference. *Psychometrika*, 38:337–369, 1973.

[1092] B. Srinivasan y A. D. Shocker. Estimating the weights for multiple attributes in a composite criterion using pairwise judgements. *Psychometrika*, 38:473–493, 1973.

[1093] D. Pekelman y S. K. Sen. Mathematical programming models for the determination of attribute weights. *Management Science*, 20:1217–1229, 1974.

[1094] M. R. Horsky, D. y Rao. Estimation of attribute weights from preference comparisons. *Management Science*, 30(7):801–822, 1984.

[1095] Z.-P. Fan. A new method for multiple attribute decision making. *Systems Engineering*, 12(1):15–17, 1994.

[1096] W. D. Cook y M. Kress. A multiple-criteria composite index model for quantitative and qualitative data. *European Journal of Operational Research*, 78:367–379, 1994.

[1097] G. S. Liang y M. J. J. Wang. Personnel selection using fuzzy MCDM algorithm. *European Journal of Operational Research*, 78:22–33, 1994.

[1098] J. B. Yan y M. G. Singh. An evidential reasoning approach for multiple-attribute decision making with uncertainty. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 24:1–18, 1994.

[1099] Z.-P. Fan, J. Ma, y P. Tian. A subjective and objective integrated approach for the determination of attribute weights. En: *Proceedings of The 4th Conference of the International Society for Decision Support Systems (ISDSS'97)*. Ecole des HEC, University of Lausanne, Switzerland, 1997. (July 21-22).

[1100] N. J. Mandic y E. H. Mamdani. A multi-attribute decision-making model with fuzzy rule-based modification of priorities. En: H. J. Zimmermann, L. A. Zadeh, y B. R. Gaines (Eds.), *Fuzzy Sets and Decision Analysis*, páginas 285–306. North-Holland, 1984.

[1101] J. Reyes y S. Barba-Romero. Expert systems and multicriteria decision making. En: *Proceedings of the Eight European Conference on Operational Research (EURO VIII)*. Lisbon, Portugal, 1986.

[1102] L. A. De Caro. Eidonómico vs. eidológico. En: C. Alarcón Cabrera (Ed.), *Estudios de Deóntica*, páginas 123–143. Castillejo, Sevilla, España, 1995.

[1103] G. H. Von Wright. *Norma y Acción. Una Investigación Lógica*. Colección <Estructura y función. El porvenir actual de la ciencia.> (Vol. 30). Tecnos, Madrid, España, 1979. (Traducido al español por Pedro García Ferrero de: <Norm and Action. A Logical Enquiry>, Routledge and Kegan Paul, London, England, UK, 1963).

[1104] F. J. Varela, E. Thompson, y E. Rosch (Heider). *The Embodied Mind: Cognitive Science and Human Experience*. The MIT Press, Massachusetts, USA, 2000. (Octava reimpresión; primera edición de 1991).

[1105] Heider (Eleanor Rosch). Focal color areas and the development of color names. *Developmental Psychology*, 4(3):447–455, 1971.

[1106] P. Kay y C. McDaniel. The linguistic significance of the meanings of basic color terms. *Language*, 54(3):610–646, 1978.

[1107] P. Kay y W. Kempton. What is the Sapir-Whorf hypothesis? *American Anthropologist*, 86:65–79, 1984.

[1108] D. A. Houston, S. J. Sherman, y S. M. Baker. Feature matching, unique features, and the dynamics of the choice process: Predecision conflict and postdecision satisfaction. *Journal of Experimental Social Psychology*, 27:411–430, 1991.

[1109] Y. J. Lai, T.-Y. Liu, y C.-L. Hwang. TOPSIS for MODM. *European Journal of Operational Research*, 76:486–500, 1994.

[1110] P.-L. Yu. A class of solutions for group decision problems. *Management Science*, 19(8):936–946, 1973.

[1111] F. Naumann. Data fusion and data quality. En: *Seminar on New Techniques & Technologies for Statistics*, Sorrento, Italy, 1998. URL: http://citeseer.nj.nec.com/naumann98data.html.

[1112] R. Y. Wang y D. M. Strong. Beyond accuracy: What data quality means to data consumers. *Journal on Management of Information Systems*, 12(4):5–34, 1996.

[1113] G. U. Yule. On the association of attributes in statistics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (Series A)*, 194:257–319, 1900.

[1114] G. U. Yule. On the methods of measuring the association between two attributes. *Journal of the Royal Statistical Society*, 75:579–642, 1912.

[1115] K. Pearson. Mathematical Contributions to the Theory of Evolution. III. Regression, Heredity and Panmixia. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 187:253–318, 1896.

[1116] K. Pearson. On the theory of contingency and its relation to association and normal correlation. En: *Drapers' Company Research Memoirs (Biometric Series I)*. Dulau and Co., London, England, 1904.

[1117] D. J. Hand. *Discrimination and Clasification*. John Wiley & Sons, Chichester, 1986.

[1118] L. Hubert y P. Arabie. Comparing partitions. *Journal of Classification*, páginas 193–218, 1985.

[1119] P. Martínez, N. Corral, y M. T. López. Test no paramétrico basado en una medida de proximidad entre funciones de densidad. En: *Actas del XXVI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. Universidad de Jaén, Jaén, noviembre 2001.

[1120] K. Y. Yeung y W. L. Ruzzo. Principal Component Analysis for clustering gene expression data. *Bioinformatics*, 17(9):763–774, 2001. Supplementary Web Site at http://staff.washington.edu/kayee/pca/; Supplement entitled: Detailed description of the adjusted Rand index and the clustering algorithms used.

[1121] E. W. Gifford y A. L. Kroeber. Culture elements distributions: IV, Pomo (37). En: *Publications in American Archaeology and Ethnology*, páginas 117–255. University of California, 1937.

[1122] C. K. M. Kluckhohn. On certain recent applications of association coefficients to ethnological data. *American Anthropologist*, 41(21):345–377.

[1123] R. P. Chaney y R. Ruiz-Revilla. Sampling methods and interpretation of correlation: a comparative analysis of seven cross-cultural samples. *American Anthropology*, 71:597–633, 1969.

[1124] H. E. Driver. Introduction to statistics for comparative research. En: F. W. Moore (Ed.), *Readings in Cross-Cultural Methodology*, páginas 303–331. Hraf Press, New Haven, 1961.

[1125] M. F. Dacey. Statistical tests of spatial association in the locations of tool types. *American Antiquity*, 38:320–328, 1973.

[1126] R. Whallon. Spatial analysis of occupation floors, II: The application of nearest neighbour analysis. *American Antiquity*, 39:16–34, 1974.

[1127] G. Childe. *Social Evolution*. C. A. Watts, London, 1951. (Trad. al español: La Evolución Social, Alianza, Madrid, 1973).

[1128] F. R. Hodson. Cultural grouping in the pre-Roman Iron Age. *Proceedings Prehistoric Society*, 30:99–110, 1964.

[1129] D. L. Clarke. *Analytical Archaeology*. Methuen, London, 1968. (Trad. al español: Arqueología Analítica, Ediciones Bellatera, Barcelona, 1984).

[1130] L. R. Dice. Measures of the amount of ecologic association between species. *Ecology*, 26:297–302, 1945.

[1131] J. R. Bray. A study of mutual occurrence of plant species. *Ecology*, 37:21–28, 1956.

[1132] P. Greig-Smith. *Quantitative Plant Ecology*. Methuen, London, UK, 1964.

[1133] E. C. Pielou. *An Introduction to Mathematical Ecology*. Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 1969.

[1134] C. J. Krebs. *Ecological Methodology*. Harper & Row, New York, NY, USA, 1989.

[1135] P. Legendre y L. Legendre. *Developments in Numerical Ecology*, volumen G14 de *NATO ASI*. Springer-Verlag, 1987.

[1136] P. Legendre y L. Legendre. *Numerical Ecology*. Developments in Environmental Modelling, Volume 20. Elsevier Science, B. V., Amsterdam, Holland, 1998.

[1137] S. Dolnicar, F. Leisch, A. Weingessel, C. Buchta, y E. Dimitriadou. A comparison of several cluster algorithms on artificial binary data scenarios from tourism marketing. http://www.wu-wien.ac.at/am/workpap.html, 1998. Working Paper Series 7, SFB "Adaptive Information Systems and Modeling in Economics and Management Science".

[1138] F. Leisch, A. Weingessel, y E. Dimitriadou. Competitive Learning for binary valued data. En: L. Niklasson, M. Bodén, y T. Ziemke (Eds.), *Proceedings of the 8th International Conference on Artificial Neural Networks (ICANN 98) (Vol. 2)*, páginas 779–784. Springer Verlag, London, UK, 1998. (Skövde, Sweden).

[1139] J. Q. Stewart y W. Warntz. Macrogeography and social science. *Geographical Review*, 48:167–184, 1958.

[1140] W. Warntz. *Macrogeography and Income Funds*. Monograph series, no. 3. Regional Science Research Institute, 1965.

[1141] J. Bradshaw. YAMS - Yet another measure of similarity. En: *Proceedings of the Euromug01*. Cambridge UK, 2001. (12-14 September, Cambridge, UK; proceedings available at: [http://www.daylight.com/meetings/emug01/]).

[1142] P. Willett, J. M. Barnard, y G. M. Downs. Chemical similarity searching. *Journal of Chemical Information and Computer Science*, 38:983–996, 1998.

[1143] R. D. Brown y Y. C. Martin. Use of structure-activity data to compare structure-based clustering methods and descriptors for use in compound selection. *Journal of Chemical Information and Computer Science*, 36:572–584, 1996.

[1144] W. T. Wipke y D. Rogers. Artificial intelligence in organic synthesis. SST: starting material selection strategies. An application of superstructure search. *Journal of Chemical Information and Computer Science*, 24(2):71–81, 1984.

[1145] H.-J. Bohm y G. Schneider (Eds.). *Virtual Screening for Bioactive Molecules*. Methods and Principles in Medicinal Chemistry (Series Editors: Hugo Kubinyi, Raimund Mannhold and Hendrik Timmerman). Wiley-VCH, Weinheim, Deutschland.

[1146] P. M. Dean y R. A. Lewis (Eds.). *Molecular Diversity in Drug Design*. Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, Nederland, 1999.

[1147] D. Ellis, J. Furner-Hines, y P. Willett. Measuring the degree of similarity between objects in text retrieval systems. *Perspectives in Information Management*, 3:128–149, 1994.

[1148] L. Kaufman y P. J. Rousseeuw. *Finding Groups in Data*. John Wiley & Sons Inc., New York, NY, USA, 1990.

[1149] H. Wolda. Similarity indices, sample size and diversity. *Oecologia*, 50:296–302, 1981.

[1150] I. C. Lerman. On two criteria of classification. En: A. J. Cole (Ed.), *Numerical Taxonomy*, páginas 114–128. Academic Press, New York, NY, USA, 1969.

[1151] I. C. Lerman. *Les Bases de la Classification Automatique*. Collection Programmation. Gauthier-Villar, Paris, France, 1970.

[1152] J. H. Rayner. Classification of soils by numerical methods. *Journal of Soil Science*, 17:79–92, 1966.

[1153] R. R. Sokal y P. H. A. Sneath. *Principles of Numerical Taxonomy*. W. H. Freeman & Co., London, 1963.

[1154] R. R. Sokal y C. D. Michener. A statistical method for evaluating systematic relationships. *Kansas University Science Bulletin*, 38:1409–1438, 1958.

[1155] W. M. Rand. Objective criteria for the evaluation of clustering methods. *Journal of the American Statistical Association*, 66:846–850, 1971.

[1156] J. D. Holliday, C.-Y. Hu, y P. Willett. Grouping of coefficients for the calculation of intermolecular similarity and dissimilarity using 2D fragment bit-strings. *Combinatorial Chemistry and High-Throughput Screening*, 5:155–166, 2002.

[1157] M. W. Buser, C. Baroni-Urbani, y E. Schillinger. Quantitative aspects of recruitment to new food by a seed-harvesting ant (Messor capitatus Latreille). En: J. M. Pasteels y J. L. Deneubourg (Eds.), *From individual to collective behavior in social insects : les Treilles Workshop*, páginas 139–154. Birkhäuser Verlag, 1987.

[1158] P. Jaccard. Distribution de la flore alpine dans le Bassin des Dranses et dans quelques regions voisines. *Bulletin del la Société Vaudoisedes Sciences Naturelles*, 37:241–272, 1901.

[1159] P. Jaccard. Nouvelles recherches sur la distribution florale. *Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles*, 44:223–270, 1908.

[1160] R. M. Needham. A method of using computers in information classification. En: C. Popplewell (Ed.), *Information Processing*, páginas 284–287. North Holland, Amsterdam, Nederland, 1962.

[1161] T. S. Kongelige Danske Videnskabbernes Selskab (A method of stablishing groups of equal amplitude in plant sociology based on similarity of species content and its application to analyses of the vegetation on Danish commons). *Biologiske Skrifter*, 5:1–34, 1948.

[1162] B. S. Everitt. *Cluster Analysis*. Edward Arnold, London - Melbourne - Auckland, tercera edición, 1993. (Publicado primeramente en el Reino Unido, por Heinemann Educational para el Social Science Research Council, 1974).

[1163] D. P. Faith, P. R. Minchin, y L. Belbin. Compositional dissimilarity as a robust measure of ecological distance. *Vegetatio*, 69:57–68, 1987.

[1164] S. Kulczynski. Die Pflanzenassoziationen der Pieninen. *Bulletin International de l'Academie Polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles*, páginas 57–203, 1927. Série B (Sciences Naturelles), Suplement II.

[1165] H. E. Driver y A. L. Kroeber. Quantitative Expression of Cultural Relationships. *The University of California Publications in American Archaeology and Ethnology*, 31:211–256, 1932.

[1166] A. Ochiai. Zoogeographic studies on the soleoïd fishes in Japan and its neighbouring regions. *Bulletin of the Japanese Society for Science and Fisheries*, 22:526–530, 1957.

[1167] G. G. Simpson. Mammals and the nature of continents. *American Journal of Science*, 241:1–31, 1943.

[1168] A. Webb. *Statistical Pattern Recognition*. Arnold and Oxford University Press, London and New York, 1999.

[1169] H. F. Stiles. The association factor in information retrieval. *Journal of the ACM*, 8:271–279, 1961.

[1170] S. A. Forbes. On the local distribution of certain Illinois fishes: an essay in statistical ecology. *Bulletin of the Illinois State Laboratory of Natural History*, VII:273–303, 1907.

[1171] L.-A. C. Hayek. Analysis of amphibian biodiversity data. En: W. R. Heyer, M. A. Donnelly, R. W. McDiarmid, L.-A. C. Hayek, y M. S. Foster (Eds.), *Measuring and Monitoring Biological Diversity. Standard Methods for Amphibians*, páginas 207–269. Smithsonian Institution, Washington, D. C., WA, USA, 1994.

[1172] H. C. Romesburg. *Cluster Analysis for Researchers*. Lifetime Learning Publications, Belmont, California, 1984.

[1173] F. G. J. Hayhoe, D. Quaglino, y W. R. S. Doll. *The Cytology and Cytochemistry of Acute Leukaemias*. Her Majesty's Stationery Office (H.M.S.O.), London, UK, 1964. (Special Report Series of the Medical Research Council, 304).

[1174] W. T. Williams y M. B. Dale. Fundamental problems in numerical taxonomy. En: R. D. Preston (Ed.), *Advances in Botanical Research (Vol. 2)*, páginas 35–68. Academic Press, London, 1965.

[1175] P. Ihm. Automatic classification in anthropology. En: D. Hymes (Ed.), *The Use of Computers in Anthropology*, páginas 357–376. Mouton and Co, The Hague, 1965.

[1176] J. C. Gower. Some distance properties of latent roots and vector methods used in multivariate analysis. *Biometrika*, 53:325–338, 1966.

[1177] P. H. A. Sneath. *Journal of General Microbiology*, 54:1–11, 1968.

[1178] S. 11.0. *Statistical Algorithms: Cluster*. SPSS Inc., Chicago, Illinois, USA, 2002. Available at: http://www.spss.com/tech/stat/algorithms/11.0/cluster.pdf.

[1179] V. Grishin. Cortejo. En: I. M. Vinográdov (Ed.), *Enciclopedia de las Matemáticas (Vol. 2)*, páginas 546–547. MIR - Rubiños1860, Moscú - Madrid, 1993.

[1180] M. Li, B. Ma, y L. Wang. On the closest string and substring problems. *Journal of the ACM*, 49(2):157–171, 2002.

[1181] J. K. Lanctot, M. Li, B. Ma, S. Wang, y L. Zhang. Distinguishing string selection problems. En: *Proceedings of the 10th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, páginas 633–642. ACM, New York, NY, USA, 1999.

[1182] M. Friedman, R. H. Rosenman, y V. Carroll. Changes in the serum cholesterol and blood clotting time in men subjected to cyclic variation of occupational stress. *Circulation*, 17:852–861, 1958.

[1183] M. Friedman y R. H. Rosenman. Association of specific overt behavior pattern with blood and cardiovascular findings. *Journal of the American Medical Association*, 169:1286–1296, 1959.

[1184] R. Sender, M. Valdés, N. Riesco, y M. J. Martín. *El Patrón A de Conducta y su Modificación Terapéutica*. Biblioteca de Psicología, Psiquiatría y Salud (Serie Práctica). Martínez Roca, Barcelona, España, 1993.

[1185] H. H. Gough y A. B. Heilbrun. *The Adjective Checklist*. Consulting Psychologist Press, Palo Alto, 1975.

[1186] S. Herman, J. A. Blumenthal, G. Black, y M. Chesney. Self-ratings of Type A (Coronary-prone) adults: Do Type A's know they are Type A's? *Psychosomatic Medicine*, 43:405–413, 1981.

[1187] V. A. Price. Research and clinical issues in treating Type A behavior. En: B. K. Houston y C. R. Snyder (Eds.), *Type A Behavior Pattern: Research, Theory and Intervention*. John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 1988.

[1188] E. Triantaphyllou y C.-T. Lin. Development and evaluation of five fuzzy multiattribute decision-making methods. *International Journal of Approximate Reasoning*, 14:281–310, 1996.

[1189] J. E. Short y N. Venkatraman. Beyond business process redesign: redefining Baxter's business network. *Sloan Management Review*, 34(1):7–21, 1992.

[1190] J. Honeycutt. *Knowledge Management Strategies*. Microsoft Press, Redmon, WA, USA, 2000. (Edición en español: Así es la Gestión del Conocimiento, McGraw-Hill/Interamericana, Madrid, 2001).

[1191] D. García Bravo. *Sistemas de Información en la Empresa. Conceptos y Aplicaciones*. Colección Economía y Empresa. Pirámide, Madrid, España, 2000. (Director de la colección: Miguel Santesmases Mestre).

[1192] F. Cuesta Fernández. *La Empresa Virtual*. McGraw-Hill, Madrid, España, 1998.

[1193] J. C. Gower. A general coefficient of similarity and some of its properties. *Biometrics*, 27:857–872, 1971.

[1194] Z. Hubalek. Coefficients of association and similarity, based on binary (presenceŋabsence) data: An evaluation. *Biological Reviews of the Cambridge Philosophical Society*, 57(4):669–689, 1982.

[1195] C. M. R. Ginn, P. Willett, y J. Bradshaw. Combination of molecular similarity measures using data fusion. *Perspectives in Drug Discovery and Design*, 20:1–16, 2000.

[1196] A. Leal Millán, M. Sánchez-Apellániz, J. L. Roldán Salgueiro, y A. E. Vázquez Sánchez. *Decisiones Empresariales con Criterios Múltiples. Ayudas Prácticas para la Dirección*. Biblioteca Eudema. Pirámide, Madrid, España, 1995.

[1197] A. Schärlig. *Décider sur Plusieurs Critères*. Presses Polytechniques Romandes, Laussanne, France, 1985.

[1198] C. J. C. De Borda. *Nota a la Academia de Ciencias Francesa*. Academia de Ciencias Francesa, 1781.

[1199] J.-C. Vansnick. On the problem of weights in multiple criteria decision making, the noncompensatory approach. *European Journal of Operational Research*, 24:288–294, 1986.

[1200] M. J. A. N. D. C. Condorcet. *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendues à la Pluralité des Voix*. Imprimerie Royale, Paris, 1785. (Reeditado por: Chelsea, New York, NY, USA, 1972).

[1201] W. V. Gehrlein. Condorcet's paradox. *Theory and Decision*, 15:161–197, 1983.

[1202] A. H. Copeland. A reasonable social welfare function. University of Michigan Seminar on Applications of Mathematics to the Social Sciences, 1951.

[1203] P. C. Fishburn. *The Theory of Social Choice*. Princenton University Press, Princenton, New Jersey, USA, 1973.

[1204] K. J. Arrow y H. Raynaud. *Social Choice and Multicriterion Decision Making*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1986. (Versión española de Manuel Pascual Morales: <Opciones Sociales y Toma de Decisiones mediante Criterios Múltiples>, Alianza, Madrid, 1989).

[1205] C. Romero. *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas y Aplicaciones*. Alianza, Madrid, España, 1993.

[1206] P. C. Fishburn. Lexicographic orders, utilities and decision rules: a survey. *Management Science*, 20(11):1442–1471, 1974.

[1207] V. Chankong y Y. Y. Haimes. *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*. North-Holland, New York, NY, USA, 1983.

[1208] M. T. Lamata. Aggregation in decision making with belief structures. En: B. Bouchon-Meunier (Ed.), *Aggregation and Fusion of Imperfect Information*, páginas 106–117. Physica - Verlag, Heidelberg - New York, 1998.

[1209] A. Tversky. Intransitivity of preferences. *Psychological Review*, 76(1):31–48, 1969.

[1210] M. Pirlot y P. Vincke. Lexicographic aggregation of semiorders. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 1:47–58, 1992.

[1211] B. H. Massam y I. D. Askew. Methods for comparing policies using multiple criteria: an urban example. *OMEGA*, 10(2):195–204, 1982.

[1212] E. Jacquet-Lagrèze y J. Siskos. Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making; the UTA method. *European Journal of Operational Research*, 10:151–164, 1982.

[1213] E. Jacquet-Lagrèze. Interactive assessment of preferences using holistic judgements: the PREFCALC system. En: C. A. Bana e Costa (Ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Making*, páginas 335–350. Springer, 1990.

[1214] B. Roy. Classement et choix en présence de points de vue multiples, la méthode ELECTRE. *R.I.R.O.*, 2(8):57–75, 1968.

[1215] B. Roy. The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods. En: C. A. Bana e Costa (Ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Making*, páginas 155–183. Springer, 1990.

[1216] B. Roy y P. Bertier. La méthode ELECTRE II. Working paper 142, SEMA, 1971.

[1217] B. Roy y P. Bertier. La méthode ELECTRE II, une application au média-planning. En: M. Ross (Ed.), *OR 72*, páginas 291–302. North-Holland, 1973.

[1218] B. Roy. ELECTRE III: algorithme de classement basé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples. *Cahiers du CERO*, 20(1):3–24, 1978.

[1219] J. Hugonnard y B. Roy. Ranking of suburban line extension projects for the Paris metro system by a multicriteria method. *Transportation Research*, 16A:301–312, 1982.

[1220] J. P. Brans, B. Mareschal, y P. Vincke. PROMETHEE: a new family of outranking methods in multicriteria analysis. En: J. P. Brans (Ed.), *Operational Research'84*, páginas 408–421. North-Holland, 1984.

[1221] J. P. Brans y P. Vincke. A preference ranking organization method. *Management Science*, 31(6):647–656, 1985.

[1222] J. P. Brans, P. Vincke, y B. Mareschal. How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method. *European Journal of Operational Research*, 24:228–238, 1986.

[1223] T. Briggs, P. L. Kunsch, y B. Mareschal. Nuclear waste management: an application of the multicriteria PROMETHEE methods. *European Journal of Operational Research*, 44(1):1–10, 1990.

[1224] B. Mareschal. Weight stability intervals in multicriteria decision aid. *European Journal of Operational Research*, 33:54–64, 1988.

[1225] B. Mareschal y J. P. Brans. Geometrical representations for MCDA. *European Journal of Operational Research*, 34:69–77, 1988.

[1226] T. L. Saaty. *Decision Making for Leaders: The Analytic Hierarchy Process for Decisions in a Complex World.* RWS Publications, Pittsburgh, USA, 1995.

[1227] J. H. P. Paenlick. Qualitative multiple criteria analysis, environmental protection and multiregional development. *Papers of the Regional Science Association*, 36:59–74, 1976.

[1228] R. Janssen, P. Nijkamp, y P. Rietvelt. Qualitative multicriteria methods in the Netherlands. En: C. Bana e Costa (Ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Making.* Springer, 1990.

[1229] S. K. Kearsley, S. Sallamack, E. M. Fluder, J. D. Andose, R. T. Mosley, y R. P. Sheridan. Chemical similarity using physiochemical property descriptors. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, 36:118–127, 1996.

[1230] C. M. R. Ginn, D. B. Turner, P. Willett, A. M. Ferguson, y T. W. Heritage. Similarity searching in files of three-dimensional chemical structures: evaluation of the EVA descriptor and combination of rankings using data fusion. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, 37:23–37, 1997.

[1231] P. S. Charifson, J. J. Corkery, M. A. Murcko, y W. P. Walters. Consensus scoring: a method for obtaining improved hit rates from docking databases of three-dimensional structures into proteins. *Journal of Medicinal Chemistry*, 42:5100–5109, 1999.

[1232] K. J. Schmucker. *Fuzzy Sets, Natural Language Computations, and Risk Analysis.* Computer Science Press, Inc., Rockville, Maryland, USA, 1984.

[1233] W. M. Dong y F. S. Wong. Fuzzy weighted averages and implementation of the extension principle. *Fuzzy Sets and Systems*, 21(2):183–199, 1987.

[1234] W. Poundstone. *El Dilema del Prisionero. John Von Neumann, la Teoría de Juegos y la Bomba.* Alianza, Madrid, España, 1995. (Traducido al español por Daniel Manzanares Fourcade de: <Prisioner's dilemma. John von Neumann, Game Theory and the Puzzle of the Bomb>, 1992).

[1235] J. Von Neumann. Zur theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100:295–320, 1928. (Traducido al inglés: On the theory of games of strategy>, en: A. W. Tucker y R. D. Lee (Eds.), <Contribution to the Theory of Games>, Volumen IV (Annals of Mathematics Studies, 40), Princenton University Press, Princenton, New Jersey, USA (1959), pp. 13-42).

[1236] J. Von Neumann y O. Morgenstern. *The Theory of Games and Economic Behavior.* Princenton University Press, Princenton, New Jersey, USA, 1944.

[1237] S. Nasar. *A Beautiful Mind: A Biography of John Forbes Nash, Jr.* Simon and Schuster, New York, NY, USA, 1998. (Una Mente Prodigiosa. Mondadori, Barcelona, 2001).

[1238] J. F. Nash (Jr.). *The Essential John Nash.* Princenton University Press, Princenton, New Jersey, USA, 2001.

[1239] J. C. Harsanyi y R. Selten. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games.* MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1988.

[1240] J. L. Arsuaga. *El Enigma de la Esfinge: La Causa, el Curso y el Proceso de la Evolución.* Areté, Barcelona, España, 2001.

[1241] J. L. Arsuaga y I. Martínez. *La Especie Elegida. La Larga Marcha de la Evolución Humana.* Temas de Hoy, Madrid, España, 1988.

[1242] C. Darwin. Del Origen de las Especies por Medio de la Selección Natural o la Conservación de las Razas Favorecidas en la Lucha por la Vida, 1859. (P. ej.: <El origen de las Especies>, Alba Libros, S. L., Madrid, España, 1998).

[1243] J. M. Smith. *Evolution and the Theory of Games.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001. (Octava reimpresión. Publicado por vez primera en 1982).

[1244] J. M. Bilbao Arrese, J. R. Fernández García, A. Jiménez-Losada, y J. J. López. Generating functions for computing power indices efficiently. *TOP*, 8(2):191–213, 2000.

[1245] E. Algaba, J. M. Bilbao Arrese, J. R. Fernández García, y J. López. El índice de poder de Banzhaf en la Unión Europea ampliada. *Qüestiió*, 25(1):71–90, 2001.

[1246] L. Markova. Analysis of methods for multicriterial estimation and choice for discrete problems with a finite set of alternatives. En: A. Lewandowski y I. Stanchev (Eds.), *Methodology and Software for Interactive Decision Support (LNEMS 337)*, páginas 74–80. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1989. (International Workshop Proceedings, Albena, Bulgaria, October 19-23, 1987. Copyrights: International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA)), Laxenburg/Austria).

[1247] V. M. Ozernoy. Choosign the 'best' multiple criteria decision-making method. *INFOR Canadian Journal of Operational Research*, 30:159–171, 1992.

[1248] B. F. Hobbs. Experiments in multicriterial decision making and what we can learn from them: an example. En: *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems (LNEMS, Vol. 242)*. Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - etc., 1984.

[1249] B. Bouchon-Meunier, M. Rifqi, y S. Bothorel. Towards general measures of comparison of objects. *Fuzzy Sets and Systems*, 84(2):143–153, 1996.

[1250] J. De Burgos. *Curso de Álgebra y Geometría*. Alhambra, Madrid, 1982.

[1251] F. Reinhardt y H. Soeder. *Atlas de Matemáticas. Vol. 1: Fundamentos, Álgebra y Geometría*. Alianza, Madrid, España, 1984.

[1252] R. Thom. "Modern" mathematics: an educational and philosophic error? En: T. Tymoczko (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Princenton University Press, Princenton, New Jersey, USA, 1998.

[1253] W. Rudin. *Análsis Real y Complejo*. Alhambra, Madrid, España, 1985. (Versión española de: Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1974).

[1254] R. B. Ash. *Real Analysis and Probability*. Academic Press, New York San Francisco London, 1972.

[1255] F. Reche y A. Salmerón. Operational approach to general fuzzy measures. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 8(3):369–382, 2000.

[1256] M. Sugeno. *Theory of fuzzy integral and its applications*. Tesis Doctoral, Tokio Institute of Technology, 1974.

[1257] Z. Wang y G. J. Klir. *Fuzzy Measure Theory*. Plenum Press, New York, NY, USA, 1992.

[1258] F. Reinhardt y H. Soeder. *Atlas de Matemáticas. Vol. 2: Análisis y Matemática Aplicada*. Alianza, Madrid, España, 1996.

[1259] P. Walley. *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. Chapman and Hall, London, 1991.

[1260] A. Rick, S. Bothorel, B. Bouchon-Meunier, S. Muller, y M. Rifqi. Fuzzy Techniques in Mammographic Image Processing. En: E. E. Kerre y M. Nachtegael (Eds.), *Fuzzy Techniques in Image Processing*, páginas 308–336. Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.

[1261] V. A. Efremovic. The geometry of proximity (I). *Mat. Sbornik (New Series)*, 31:189–200, 1952.

[1262] T. De Laguna. Point, line and surface as sets of solids. *The Journal of Philosophy*, 19:449–461, 1922.

[1263] A. Whitehead. *Process and Reality*. MacMillan, New York, NY, USA, 1929.

[1264] S. A. Naimpally y B. D. Warrak. *Proximity Spaces*. Cambridge University Press, Cambridge, 1970.

[1265] G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princenton University Press, Princenton, New Jersey, USA, 1976.

[1266] J. W. Guan y D. A. Bell. *Evidence Theory and Its Applications*, volumen 1. North-Holland, New York, 1991.

[1267] J. W. Guan y D. A. Bell. *Evidence Theory and Its Applications*, volumen 2. North-Holland, New York, 1992.

[1268] A. P. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals Mathematical Statistics*, 38:325–339, 1967.

[1269] V. Z. Poliakov. Espacio de proximidad. En: I. M. Vinográdov (Ed.), *Enciclopedia de las Matemáticas*. MIR - Rubiños1860, Moscú - Madrid, 1994.

[1270] A. Machado. *Nuevas Canciones*. Castalia, Madrid, España.

[1271] N. Goodman. Seven structures on similarity. En: N. Goodman (Ed.), *Problems and Projects*. The Bobbs-Merrill Co., New York, NY, USA, 1972.

[1272] I. Kant. *Logik: Ein Handbuch Zu Vorlesungen*. Nicolovius, Königsberg, 1800. (Traducido por R. S. Hartman y W. Schwartz como: <Kant's Logic>, Indianapolis & New York: Liberal Arts Press, 1974).

[1273] G. C. Oden y L. L. Lopes. On the internal structure of fuzzy subjective categories. En: R. R. Yager (Ed.), *Fuzzy Set and Possibility Theory. Recent Developments*, páginas 75–89. Pergamon Press, New York, 1982.

[1274] L. Wittgenstein. *Philosophical Investigations*. Basil Blackwell, Oxford, 1953.

[1275] L. R. Brooks. Non-analytic concept formation in memory for instances. En: E. Rosch (Heider) y B. B. Lloyd (Eds.), *Cognition and Categorization*. Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1978.

[1276] L. R. Brooks. Decentralized control of categorization: The role of prior processing episodes. En: U. Neisser (Ed.), *Concepts and Conceptual Development: The Ecological and Intellectual Factors in Categorization*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[1277] D. L. Medin y M. M. Schaffer. Context theory of classification learning. *Psychological Review*, 85:207–238, 1978.

[1278] R. M. Nosofsky. Exemplar-based approach to relating categorization, identification, and recognition. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, 15:282–304, 1992.

[1279] M. I. Posner y S. W. Keele. On the genesis of abstract idea. *Journal of Experimental Psychology*, 77:353–363, 1968.

[1280] S. K. Reed. Pattern recognition and categorization. *Cognitive Psychology*, 3:382–407, 1972.

[1281] E. Rosch (Heider) y C. B. Mervis. Family resemblances: Studies in the internal structure of categories. *Cognitive Psychology*, 7:573–605, 1975.

[1282] O. G. Selfridge. Pandemonium: a Paradigm for Learning. En: *Symposium on the Mechanization of Thought Processes*. HM Stationary Office, London, 1959.

[1283] L. A. Zadeh. A note on prototype theory and fuzzy sets. *Cognition*, 12:291–297, 1982.

[1284] E. Rosch (Heider). Human categorization. En: N. Warren (Ed.), *Advances in Cross-Cultural Psychology*. Academic Press, New York, 1977.

[1285] D. L. Medin. Concepts and conceptual structure. *American Psychologist*, 44(12):1469–1481, 1989.

[1286] L. K. Komatsu. Recent views of conceptual structure. *Psychological Bulletin*, 112(3):500–526, 1992.

[1287] P. Johnson-Laird. *Mental Models*. Harvard University Press, Cambridge, MA, USA, 1983.

[1288] G. L. Murphy y D. L. Medin. The role of theories in conceptual coherence. *Psychological Review*, 92:289–316, 1985.

[1289] F. C. Keil. *Concept, Kinds and Cognitive Development*. MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

[1290] T. P. McNamara y D. L. Miller. Attributes of theories of meaning. *Psychological Bulletin*, 106:355–376, 1989.

[1291] J. A. Fodor, M. Garrett, E. Walker, y C. M. Parkes. Against definitions. *Cognition*, 8:263–367, 1980.

[1292] R. L. Goldstone. Isolated and interrelated concepts. *Memory and Cognition*, 24:608–628, 1996.

[1293] A. M. Collins y M. R. Quillian. Retrieval time from semantic memory. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 8:240–247, 1969.

[1294] A. V. Shubnikov y V. A. Koptsik. *Symmetry in Science and Art*. Plenum Press, New York, NY, USA, 1974.

[1295] L. W. Porter, E. E. Lawler, y J. R. Hackman. *Behavior in Organizations*. McGraw-Hill, New York, 1975.

[1296] M. Sugrañes. Entrevistar al puesto de trabajo antes de entrevistar a los candidatos. *rrhh-Magazine.com (Recursos Humanos y Management Empresarial)*, 2003. (Sección: Software RRHH management; Subsección: Predictive Index - España).

[1297] R. S. Uhrbrock. Mental alertness tests as aids in selecting employees. *Personnel*, 12:231, 1936.

[1298] L. Godó. *Contribució a l'Estudi dels Models d'Inferencia en els Sistemes Possibilistics*. Tesis Doctoral, Universitat Politécnica de Catalunya, 1990.

[1299] J. Á. Olivas y A. Sobrino. Aproximación lingüística y teoría de prototipos de Zadeh. En: *Primer Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*. Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial. Facultad de Ciencias. Universidad de Granada, 1991.

[1300] M. A. Albin. *Fuzzy Sets and Their Application to Medical Diagnosis and Patterns Recognition*. Tesis Doctoral, University of California, Berkeley, 1975.

[1301] W. A. Fordon y J. C. Bezdek. The application of fuzzy set theory to medical diagnosis. En: M. M. Gupta, R. K. Ragade, y R. R. Yager (Eds.), *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, páginas 445–461. North-Holland, New York, 1979.

[1302] A. O. Esogbue y R. C. Elder. Fuzzy sets and the modelling of physician decision processes: Part I: The initial interview-information gathering process. *Fuzzy Sets and Systems*, 2:279–291, 1979.

[1303] A. O. Esogbue y R. C. Elder. Fuzzy sets and the modelling of physician decision processes: Part II: Fuzzy diagnosis decision models. *Fuzzy Sets and Systems*, 3(1):1–9, 1980.

[1304] A. O. Esogbue y R. C. Elder. Measurement and valuation of a fuzzy mathematical model for medical diagnosis. *Fuzzy Sets and Systems*, 10:223–242, 1983.

[1305] B. Bouchon-Meunier. Fuzzy questionnaires. *Fuzzy Sets and Systems*, 6(1):1–9, 1981.

[1306] H. Akdag y B. Bouchon-Meunier. Using fuzzy set theory in the analysis of structures of information. *Fuzzy Sets and Systems*, 28(3):263–271, 1988.

[1307] C. F. Picard. *Graphs and Questionnaires*. North-Holland, Amsterdam, Nederland, 1980. (Traducido de: <Theorie des questionnaires>, Gauthiers-Villars, 1965).

[1308] R. Monteserín. Demencia en la asistencia primaria. En: R. Alberca (Ed.), *Demencias: Diagnóstico y Tratamiento*, páginas 23–43. Masson, Barcelona, 1999.

[1309] M. F. Folstein, S. E. Folstein, y P. R. McHugh. Mini-Mental State: A practical method for grading the cognitive state of patients for the clinician. *J. Psychiatr. Res.*, 12:189–198, 1975.

[1310] E. Pfeiffer. A short portable mental status questionnaire for the assessment of organic brain deficit in elderly patients. *J. Am. Geriatr. Soc.*, 23:433–441, 1975.

[1311] B. Isaacs y A. J. Akhtar. The set test: A rapid test of mental function in old people. *Age Ageing*, 1:22–26, 1972.

[1312] G. Blessed, B. E. Tomlinson, y M. Roth. The association between quantitative measures of dementia and senile change in the cerebral grey matter of elderly subjects. *Br. J. Psychiatr.*, 114:797–811, 1968.

[1313] A. F. Jorm, R. Scott, y P. A. Jacomb. Assessment of cognitive decline in dementia by informant questionnaire. *Int. J. Geriatr. Psychiatr.*, 4:35–39, 1989.

[1314] J. M. Morales, J. I. González-Montalvo, F. Bermejo, y T. Del Ser. The screening of mild dementia with a shortened Spanish version of the Informant Questionnaire on Cognitive Decline in the Elderly. *Alzheimer Dis. Assoc. Disord.*, 9:105–111, 1995.

[1315] T. Del Ser, J. M. Morales, M. S. Barquero, R. Cantón, y F. Bermejo. Application of a Spanish version of the Informant Questionnaire on Cognitive Decline in the Elderly in the clinical assessment of dementia. *Alzheimer Dis. Assoc. Disord.*, 11:3–8, 1997.

[1316] A. F. Jorm y P. A. Jacomb. The Informant Questionnaire on Cognitive Decline in the Elderly (IQ-CODE): Development and cross-validation. *Psychol. Med.*, 24:145–153, 1994.

[1317] A. Lobo, J. Ezquerra, y F. B. Gómez (et al.). El Mini-Mental Cognoscitivo. Un test sencillo y práctico para detectar alteraciones intelectuales en pacientes médicos. *Actas Luso-Esp. Psiquiatr. Psico. Med.*, 3:189–202, 1979.

[1318] M. J. Yaffe, J. W. Byng, y N. F. Boyd. Quantitative Image Analysis for Estimation of Breast Cancer Risk. En: I. Bankman (Ed.), *Handbook of Medical Imaging. Processing and Analysis*, páginas 323–340. Academic Press, San Diego, CA, USA, 2000.

[1319] J. L. Kelsey y M. D. Gammon. The epidemiology of breast cancer. *CA: A Cancer Journal for Clinicians*, 41(3):146–165, 1991.

[1320] E. C. Lazcano-Ponce, V. Tovar-Guzmán, P. Alonso De Ruiz, I. Romieu, y L. López-Carrillo. Cáncer de mama. Un hilo conductor histórico, presente y futuro. *Salud Pública de México*, 38(2):139–152, 1996.

[1321] S. K. Pal y R. A. King. Image enhancement using smoothing with fuzzy sets. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 11(7):494–501, 1981.

[1322] R. W. G. Hunt. *The Production of Color.* John Wiley, New York, 1975.

[1323] J. Foley, A. Van Dam, S. Feiner, y J. Hughes. *Computer Graphics. Principles and Practice.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1992.

[1324] L. Hildebrand y B. Reusch. Fuzzy color processing. En: *Fuzzy Techniques in Image Processing*, páginas 267–286. Physica Verlag, Heidelberg - New York, 2000.

[1325] B. Jähne. *Digital Image Processing: Concepts, Algorithms, and Scientific Applications.* Springer-Verlag, Berling-Heidelberg, Germany, 1995.

[1326] J. Pomés Talló. Tomografía axial computerizada. En: R. Sanmartí Sala, A. Collado Cruz, y J. Muñoz Gómez (Eds.), *Procedimientos Diagnósticos en Reumatología*, páginas 50–54. Mosby-Doyma Libros (Times Mirror International Publishers - División Iberoamericana), Madrid, España, 1995.

[1327] J. Pomés Talló. Resonancia magnética nuclear. En: R. Sanmartí Sala, A. Collado Cruz, y J. Muñoz Gómez (Eds.), *Procedimientos Diagnósticos en Reumatología*, páginas 55–59. Mosby-Doyma Libros (Times Mirror International Publishers - División Iberoamericana), Madrid, España, 1995.

[1328] A. F. Thornton, H. M. Sandler, R. K. Ten Haken, D. L. McShan, B. A. Fraass, M. L. LaVigne, y B. R. Yanke. The clinical utility of magnetic resonance imaging in three-dimensional treatment planning of brain neoplasms. *International Journal Radiation Oncology, Biology, Physics*, 24(4):767–776, 1992.

[1329] M. Van Herk. Image registration using chamfer matching. En: I. Bankman (Ed.), *Handbook of Medical Imaging. Processing and Analysis*, páginas 515–527. Academic Press, San Diego, CA, USA, 2000.

[1330] L. Whaley y D. L. Wong. *Nursing Care of Infants and Children.* C. V. Mosby Company, cuarta edición, 1991.

[1331] D. L. Wong, M. Hockenberry-Eaton, D. Wilson, M. L. Winkelstein, y P. Schwartz. *Wong's Essentials of Pediatric Nursing.* Mosby, Inc., St. Louis, sexta edición, 2001.

[1332] P. Tenzer y H. Stanley. Helping patients get off the wheel of chronic pain. *Home Health Care Consultant*, 7(11):35–39, 2000.

[1333] R. Rucker. *Mind Tools: The Five Levels of Mathematical Reality.* Houghton Mifflin, Boston, Massachusetts, USA, 1987.

[1334] P. Serven. Azar y matemáticas. En: F. Le Lionnais (Ed.), *Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático.* EUDEBA, Buenos Aires, Argentina, 1962.

[1335] S. Itoh y H. Itagaki. Applications of Fuzzy-Bayesian analysis to structural reliability. En: *Proceedings of ICOSSAR'89, the 5th International Conference on Structural Safety and Reliability*, San Francisco, CA, August 7-11 1989.

[1336] K. C. Chou y J. Yuan. Fuzzy-Bayesian approach to reliability of existing structures. *Journal of Structural Engineering*, 119(11), 1993.

[1337] S. Furthsirth-Schnater. On Fuzzy Bayesian inferences. *Fuzzy Sets and Systems*, 60, 1993.

[1338] C. C. Yang. Fuzzy Bayesian Inference. En: *Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, páginas 2707–2712. Orlando, FL, October 1997.

[1339] C. C. Yang y K. M. Cheung. Fuzzy Bayesian analysis with contiuous-valued evidence. En: *Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, páginas 441–446. Vancouver, British Columbia, Canada, October 22-25 1995.

[1340] C.-L. Chan y C.-H. Lan. A data mining technique combining fuzzy sets theory and Bayesian classifier. An application of auditing the health insurance fee. En: H. R. Arabnia (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence IC-AI'2001 (Vol. 1)*, páginas 402–408. Computer Science Research, Education, and Applications Press (CSREA), Las Vegas, Nevada, USA, 2001.

[1341] E. H. Ruspini. A new approach to clustering. *Information and Control*, 15:22–32, 1969.

[1342] O. Cordón, F. Herrera, F. Hoffmann, y L. Magdalena. *Genetic Fuzzy Systems: Evolutionary Tuning and Learning of Fuzzy Knowledge Bases.* Advances in Fuzzy Systems - Applications and Theory (Vol. 19). World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore - New Jersey - London - Hong Kong, 2001.

[1343] J. Nisbet y J. Schucksmith. *Estrategias de Aprendizaje.* Santillana/Aula XXI, Madrid, España, 1987.

[1344] D. Ríos, S. Ríos, y J. Martín. *Simulación. Métodos y Aplicaciones.* RA-MA, Madrid, España, 1997.

[1345] S. M. Markov. On directed interval arithmetic and its applications. *Journal of Universal Computer Science*, 1(7):514–526, 1995.

[1346] N. Dimitrova, S. M. Markov, y E. Popova. Extended interval arithmetics: new results and applications. En: L. Atanassova y J. Herzberger (Eds.), *Computer Arithmetic and Enclosure Methods*, páginas 225–232. North-Holland, Amsterdam, Holland, 1992.

[1347] H. Zemelman. Sujetos y subjetividad en la construcción metodológica. En: E. León y H. Zemelman (Eds.), *Subjetividad: Umbrales Del Pensamiento Social*, páginas 21–35. Anthropos - Centro Regional de Investigaciones Multidisciplinarias. Universidad Nacional Autónoma de México, Rubí, Barcelona, España - México, 1997.

[1348] M. Max-Neef, A. Elizalde, y M. Hopenhayn. *Human Scale Development: an Option for the Future.* EPAUR, Fundación Dag Hammarskjöld, Uppsala, Suecia, 1990.

[1349] S. Ríos. *Métodos Estadísticos.* Del Castillo, Madrid, Europa, 1983.

[1350] L. J. Savage. Subjective Probability and Statistical Practice. En: L. J. Savage (et Otros) (Ed.), *The Foundations of Statistical Inference.* Methuen and Wiley, London - New York, 1962.

[1351] A. Birnbaum. On the foundations of statistical inference (with discussion). *Journal of the American Statistical Association*, 57:269–326, 1962.

[1352] J. O. Berger y R. Wolpert. *The Likelihood Principle.* IMS Lecture Notes (Volume 6). Institute of Mathematical Statistics (IMS), Hayward, CA, USA, 1984.

[1353] L. R. Perichi y P. Walley. Robust Bayesian credible intervals and prior ignorance. *Int. Statist. Rev.*, 58:1–23, 1991.

[1354] J. O. Berger. The robust Bayesian viewpoint (with discussion). En: J. B. Kadane (Ed.), *Robustness of Bayesian Analyses*, páginas 63–144. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[1355] L. A. Wassermann. Recent Methodological Advances in Robust Bayesian Inference (with Discussion). En: J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid, y A. F. M. Smith (Eds.), *Bayesian Statistics, Vol.:*, páginas 483–502. Oxford University Press, Oxford, 1992.

[1356] P. Walley. *The Imprecise Probabilities Project.* http://ensmain.rug.ac.be/ ipp, from 1997.

[1357] J. M. Keynes. *A Treatise on Probability.* Macmillan, London, 1921.

[1358] C. A. B. Smith. Consistency in statistical inference and decision (with discussion). *J. R. Statist. Soc. B*, 23:1–37, 1961.

[1359] I. J. Good. Subjective probability as the measure of a non-measurable set. En: E. E. Nagel, P. Suppes, y A. Tarski (Eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, páginas 319–329. Stanford University Press, Stanford, 1962.

[1360] P. Walley, L. Gurrin, y P. Burton. Analysis of clinical data using imprecise prior probabilities. *The Statistician*, 45(4):457–485, 1996.

[1361] L. DeRobertis y J. A. Hartigan. Bayesian inference using intervals of measures. *Annals of Statistics*, 9:235–244, 1981.

[1362] E. L. Lehmann. Statistics, an overview. En: *Encyclopedia of Statistical Science (8)*, páginas 683–702. 1988.

[1363] M. A. Santos Guerra. *Hacer Visible lo Cotidiano. Teoría y Práctica de la Evaluación Cualitativa de los Centros Escolares.* Akal, Madrid, España, 1990.

[1364] M. Andrade Campos. *Uma Extensao Intervalar Para a Probabilidade Real.* Tesis Doctoral, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil. [http://www.di.ufpe.br/ mac/probInterv/ publicacoes.html].

[1365] Y. Rottenstreich y A. Tversky. Unpacking, repacking and anchoring: Advances in support theory. *Psychological Review*, 104:406–415, 1997.

[1366] J. Bearden y T. S. Wallsten. MINERVA-DM and subadditive frequency judgments. (Disponible en: http://www.unc.edu/ñbearden/Papers/MDM.pdf).

[1367] L. Macchi, D. Osherson, y D. H. Krantz. Superadditive probability judgment. *Psychological Review*, 106:210–214, 1999.

[1368] C. Hadjichristidis, S. A. Sloman, y E. J. Wisniewski. Judging the probability of representative and unrepresentative unpackings. En: *Proceedings of The 23rd Annual Conference of the Cognitive Science Society.* Cognitive Science Society, 2001. (1-4 August, 2001, Edinburgh, Scotland, UK) (Disponible en: http://www.hcrc.ed.ac.uk/cogsci2001/pdf-files/0376.pdf).

[1369] A. M. Small (Jr.) y R. S. Gales. Características de la audición. En: C. M. Harris (Ed.), *Manual de Medidas Acústicas y Control del Ruido*, páginas 17.1–17.29. McGraw-Hill, Aravaca, Madrid, España, 1995. (Traducido de la tercera edición en inglés de: <Handbook of Acoustical Measurements and Noise Control>, McGraw-Hill, 1991).

[1370] F. Miyara. Paradigmas para la investigación de las molestias por ruido. En: *Primeras Jornadas sobre el Ruido y sus Consecuencias en la Salud de la Población*, Buenos Aires, Argentina, 2001.

[1371] E. E. Free. Measurements of the Street Noise in New York City. *Physical Review*, 27:507, 1926.

[1372] E. E. Free. Practical Methods of Noise Measurement. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2(1):18–19, 1930.

[1373] R. H. Galt. Results of Noise Surveys. Part I. Noise out-of-doors. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2(1):30–58, 1930.

[1374] J. M. Barrigón Morillas. *El ruido urbano en Extremadura*, 2002. [http://www.ruidos.org/Documentos/ RuidosExtremadura.html].

[1375] J. M. Barrigón Morillas, R. Vílchez Gómez, V. Gómez Escobar, J. A. Méndez Sierra, y C. Tejeiro Vidal. Formalización de una encuesta sobre los efectos del ruido urbano. En: *II Congreso Iberoamericano de Acústica (Tecniacústica).* Madrid, España, 2000.

[1376] J. A. Méndez Sierra y J. M. Barrigón Morillas. Encuesta. Comunicación personal.

[1377] C. M. Harris (Ed.). *Manual de Medidas Acústicas y Control del Ruido.* McGraw-Hill, Aravaca, Madrid, España, 1995. (Traducido de la tercera edición en inglés de: <Handbook of Acoustical Measurements and Noise Control>, McGraw-Hill, 1991).

[1378] R. A. Dieghton y W. D. O. Paterson. Road data storage: A guide to allowing upgrading and expansion. En: *Route et Informatique*, páginas 468–477. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France, March 1990. (Actas de un coloquio organizado por l'École Nationale des Ponts et Chaussées, París 13-15 marzo).

[1379] T. Haugodegard. Pavement management system uses new road data bank with surfacing condition data based on automatic ultrasound measurements. En: *Route et Informatique*, páginas 567–576. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France, March 1990. (Actas de un coloquio organizado por l'École Nationale des Ponts et Chaussées, París 13-15 marzo).

[1380] W. D. O. Paterson y T. Scullion. An integrated classification of data needs and acquisition methods for road information systems. En: *Route et Informatique*, páginas 676–685. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France, March 1990. (Actas de un coloquio organizado por l'École Nationale des Ponts et Chaussées, París 13-15 marzo).

[1381] J. Cuena. Artificial intelligence and traffic control: some modeling techniques. En: *Route et Informatique*, páginas 822–831. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France, March 1990. (Actas de un coloquio organizado por l'École Nationale des Ponts et Chaussées, París 13-15 marzo).

[1382] D. J. Kershaw. The network information system (NIS). En: *Route et Informatique*, páginas 619–625. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France, March 1990. (Actas de un coloquio organizado por l'École Nationale des Ponts et Chaussées, París 13-15 marzo).

[1383] ECGP. *Future Noise Policy.* European Commission Green Paper, COM(96)540. November 1996.

[1384] S. Stansfeld. *The Non-Auditory Effects of Noise.* Institute for Environment and Health, University of Leicester, Leicester, 1997. IEH-Report No. 10.

[1385] S. Fidell y D. M. Green. Molestias inducidas por el ruido en individuos y comunidades. En: C. M. Harris (Ed.), *Manual de Medidas Acústicas y Control del Ruido*, páginas 23.1–23.16. McGraw-Hill, Aravaca, Madrid, España, 1995. (Traducido de la

tercera edición en inglés de: <Handbook of Acoustical Measurements and Noise Control>, McGraw-Hill, 1991).

[1386] H. E. Von Gierke, K. M. Eldred, y R. K. Break. Estudios de impacto ambiental. En: C. M. Harris (Ed.), *Manual de Medidas Acústicas y Control de Ruido*, páginas 54.1–54.24. McGraw-Hill, Aravaca, Madrid, España, 1995. (Traducido de la tercera edición en inglés de: <Handbook of Acoustical Measurements and Noise Control>, McGraw-Hill, 1991).

[1387] NI. Sound pressure. En: *Measurement Encyclopedia*. National Instruments Corporation, 2002. Available at http://zone.ni.com/devzone/nidzgloss.nsf/glossary.

[1388] D. M. Jones y D. E. Broadbent. Rendimiento humano y ruido. En: C. M. Harris (Ed.), *Manual de Medidas Acústicas y Control del Ruido*, páginas 24.1–24.28. McGraw-Hill, Aravaca, Madrid, España, 1995. (Traducido de la tercera edición en inglés de: <Handbook of Acoustical Measurements and Noise Control>, McGraw-Hill, 1991).

[1389] C. Levy-Leboyer y G. Moser. Noise effects on two industrial tasks. En: B. Berglund, U. Berglund, J. Karlsson, y T. Lindvall (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Noise as a Public Health Problem (Vol. 3)*, páginas 43–48. Swedish Council for Building Research, Stockholm, 1988.

[1390] G. R. J. Hockey. Signal probability and spatial location as possible bases for increased selectivity in noise. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 22:37–42, 1970.

[1391] M. J. F. Blake. Temperament and time of day. En: W. P. Colquhoun (Ed.), *Biological Rhythms and Human Performance*. Academic Press, London, England, UK - New York, NY, USA, 1971.

[1392] D. Pope, R. J. Houghton, D. M. Jones, F. Parmentier, y E. Farmer. Report on Work Package 1: Possible Usefulness of Irrelevant Sound, 2002. (Care Innovative Action: Cognitive Streaming Project: Version 1.2: 27 de noviembre).

[1393] S. Daee y J. M. Wilding. Effects of high intensity while noise on short-term memory for position in a list and sequence. *British Journal of Psychology*, 68:335–349, 1977.

[1394] C. Miles y A. P. Smith. Combined effects of noise and nightwork on running memory. En: M. Gruneberg, P. E. Morris, y R. Sykes (Eds.), *Practical Aspects of Memory: Current Research and Issues (2)*, páginas 224–229. Wiley, Chichester, 1988.

[1395] A. P. Smith. The effects of noise on the processing of global shape and local detail. *Psychol. Res.*, 47:103–108, 1985.

[1396] J. Sametinger. *Software Engineering with Reusable Components*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1997.

[1397] G. T. Heineman y W. T. Councill (Eds.). *Component-Based Software Engineering: Putting the Pieces Together*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA, 2001.

[1398] D. S. Platt. *Introducing Microsoft Dot-Net*. Microsoft, Redmond, WA, USA, 2001.

[1399] V. Matena y M. Hapner. Enterprise Java Beans Specification (v1.1). ftp://ftp.java.sun.com/pub/ejb/11final-12822/ejb1_1-spec.pdf, 2000.

[1400] R. Van Ommering, F. Van Der Linden, J. Kramer, y J. Magee. The Koala component model for consumer electronics software. *IEEE Computer*, 33(3):78–85, 2000.

[1401] K.-K. Lau. Component certification and system prediction: Is there a role for formality? En: I. Crnkovic, H. Schmidt, J. Stafford, y K. Wallnau (Eds.), *Proceedings of the Fourth ICSE Workshop on Component-based Software Engineering*, páginas 80–83. IEEE Computer Society Press, 2001.

[1402] K.-K. Lau y M. Ornaghi. A formal approach to software component specification. En: D. Giannakopoulou, G. T. Leavens, y M. Sitaraman (Eds.), *SAVCBS Proceedings. Specification and Verification of Component-based Systems Workshop at OOPSLA2001*, páginas 88–96. Department of Computer Science. Iowa State University, Ames, Iowa, USA, 2001. [http://www.cs.iastate.edu/ leavens/SAVCBS/papers-2001/].

[1403] J. Aldrich, C. Chambers, y D. Notkin. ArchJava: Connecting software architecture to implementation. En: *Proceedings Twenty-fourth International Conference on Software Engineering*, páginas 187–197. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA, 2002.

[1404] V. C. Sreedhar. Mixin'Up components. En: *Proceedings 24th International Conference on Software Engineering*, páginas 198–207. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA, 2002.

[1405] G. T. Leavens. Modular specification and verification of object-oriented programs. *IEEE Software*, 8(4):72–80, 1991.

[1406] M. Sitaraman y B. W. Weide (Eds.). Component-based software using RESOLVE. *Special Feature: ACM Sigsoft Software Engineering Notes*, 19(4):21–65, 1994.

[1407] P. C. Clemens. From subroutines to subsystems: component-based software development. *American Programmer*, 8(11), 1995.

[1408] R. Prieto-Díaz. Domain analysis for reusability. En: *Proceedings of the COMPSAC'87*, páginas 23–29. Tokyo, Japan, October 1987.

[1409] V. Basili, L. Briand, y W. Thomas. Domain analysis for the reuse of software development experiences. En: *Proceedings of the 19th Annual Software Engineering Workshop*. NASA/GSFC, Greenbelt, MD, (December) 1994.

[1410] W. Tracz. Where does reuse start? En: *Proceedings of the Realities of Reuse Workshop*. Syracuse University CASE Center, 1990.

[1411] J. W. Hooper y R. O. Chester. *Software Reuse: Guidelines and Methods*. Plenum Press, 1991.

[1412] D. S. Linthicum. Component development (a special feature). *Application Development Trends*, páginas 57–78, June 1995.

[1413] I. Jacobson, G. Booch, y J. Rumbaugh. *The Unified Software Development Process*. Addison-Wesley, 1999.

[1414] G. Booch, J. Rumbaugh, y I. Jacobson. *El Lenguaje Unificado de Modelado*. Addison Wesley Iberoamericana, Madrid, España, 1999. (Traducido por José Sáez Martínez de: <The Unified Modeling Language User Guide>, Addison Wesley Longman Inc., 1999).

[1415] A. W. Brown y K. C. Wallnau. Engineering of component based systems. En: *Component-Based Software Engineering*, páginas 7–15. IEEE Computer Society Press, 1996.

[1416] A. Lozano-Tello y A. Gómez-Pérez. Factores de decisión para la reutilización de componentes software. En: *Actas de las III Jornadas de Ingeniería del Software*. Murcia, España, November 1998.

[1417] A. Lozano-Tello y A. Gómez-Pérez. Aplicación del método de las jerarquías analíticas en la elección de componentes software. En: P. Botella, J. Hernández, y F. Saltor (Eds.), *Actas de las IV Jornadas de Ingeniería del Software y Bases de Datos (JISBD'99)*. Universidad de Extremadura. Departamento de Informática, 1999.

[1418] T. V. Rasinski. Effects of repeated reading and listening-while-reading on reading fluency. *Journal of Educational Research*, 83(3):147–150, 1990.

[1419] C. B. Boyer. *Historia de la Matemática*. Alianza, Madrid, España, 1987. (Traducido por Mariano Martínez Pérez de: <A History of Mathematics>, John Wiley and Sons, 1968).

[1420] G. Ifrah. *Historia Universal de las Cifras. La Inteligencia de la Humanidad Contada por los Números y el Cálculo*. Espasa Calpe, Madrid, España, 1997. (Traducido por Juan María López de Sa y de Madariaga, José Luis Prieto Pérez, José Manuel Rodríguez Sanjurjo, Juan Tarres Freixenet y Sergio Toledo Prats, de: <Histoire universelle des chiffres>, Éditions Robert Laffont S. A., París, 1994).

[1421] W. Brun y K. H. Teigen. Verbal probabilities: Ambiguous, context-dependent, or both? *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 41(3):390–404, 1988.

[1422] D. V. Budescu, S. Weinberg, y T. S. Wallsten. Decisions based on numerically and verbally expressed uncertainties. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 14(2):281–294, 1988.

[1423] M. J. Druzdzel. Verbal uncertainty expressions: Literature review. Informe Técnico CMU-EPP-1990-03-02, Department of Engineering and Public Policy, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, USA, 1990.

[1424] T. S. Wallsten. Forecaster communication and decision maker use of uncertain judgments. University of North Carolina at Chapel Hill, 1988.

[1425] B. Kipper y A. Jameson. Semantics and pragmatics of vague probability expressions. En: *Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society*. The Cognitive Science Society, Atlanta, Georgia, USA, 1994.

[1426] R. Carnap. *Logical Foundations of Probability*. University of Chicago Press, Chicago, USA, 1950.

[1427] R. Carnap. Intellectual Autobiography. En: P. A. Schilpp (Ed.), *The Philosophy of Rudolf Carnap*. Open Court, La Salle, 1963.

[1428] R. Carnap. *The Continuum of Inductive Methods*. University of Chicago Press, Chicago, USA, 1952.

[1429] R. H. Thoules. The tendency to certainty in religious beliefs. *British Journal of Psychology*, 26(1):16–31, 1935.

[1430] N. Senzaki y P. Reps. *Carne Zen. Huesos Zen. 101 Historias Zen*. Troquel, Buenos Aires, Argentina, 1994.

[1431] G. Gigerenzer. Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is relevant for psychology (and vice versa). En: G. Wright y P. Ayton (Eds.), *Subjective Probability*, páginas 129–162. Wiley, New York, New York, USA, 1994.

[1432] D. Skulj. Non-additive probabilitiy. En: *Proceedings of the Sixth Austrian, Hungarian, Italian and Slovenian Meeting of Young Statisticians*. 2001. (Celebrado en Ossiach, Carinthia, Austria, del 5 al 7 de octubre de 2001. Disponible en Internet: http://www-stat.uni-klu.ac.at/Tagungen/Ossiach/proceedings.html).

[1433] K. Menger. Ensembles flous et fonctions aleatoires. En: *Comptes Rendus (232)*, páginas 2001–2003. Académie des Sciences, Paris, France, 1951.

[1434] M. Delgado y S. Moral. On the concept of possibility-probability consistency. *Fuzzy Sets and Systems*, 21(3):311–318, 1987.

[1435] B. De Baets y R. Mesiar. A possibilistic analogon of Bayes' theorem. En: *Proceedings of the International Workshop on Soft Computing*, páginas 101–106. 1996. (Kazan, Tatarstan).

[1436] D. Dubois y H. Prade. The logical view of conditioning and its application to possibility and evidence theories. *International Journal of Approximate Reasoning*, 4(1):23–46, 1990.

[1437] E. Hisdal. Conditional possibilities, independence and noninteraction. *Fuzzy Sets adn Systems*, 1(4):283–297, 1978.

[1438] D. Dubois y H. Prade. Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1: Inference with possibility distributions. *Fuzzy Sets and Systems*, 40(1):143–202, 1991.

[1439] D. Ellsberg. Risk, ambiguity and the Savage axioms. *Quarterly Journal of Economics*, 75:643–669, 1961.

[1440] I. Gilboa. Expected utility with purely subjective non-additive probabilities. *Journal of Mathematical Economics*, 16:65–88, 1987.

[1441] D. Schmeidler. Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica*, 57:571–587, 1989.

[1442] E. Packel. *Las Matemáticas de los Juegos de Apuestas*. DLS-EULER, Madrid, España, 1995. (Traducido al español por Miguel Ángel Hernández Medina de: <The Mathematics of Games and Gambling>, Mathematical Association of America, 1981).

[1443] J. L. Anderson. Embracing uncertainty: The interface of Bayesian statistics and cognitive psychology. *Conservation Ecology [online]*, 2(1), 1998. (Disponible en Internet: http://www.consecol.org/vol2/iss1/art2).

[1444] G. Gigerenzer y U. Hoffrage. How to improve Bayesian reasoning without instruction: frequency formats. *Psychological Review*, 102(4):684–704, 1995.

[1445] P. Ayton y G. Wright. Subjective probability: what should we believe? En: G. Wright y P. Ayton (Eds.), *Subjective Probability*, páginas 163–184. Wiley, New York, New York, USA, 1994.

[1446] L. Cosmides y J. Tooby. Are humans good intuitive statisticians after all? Rethinking some conclusions from the literature on judgment under uncertainty. *Cognition*, 58:1–73, 1996.

[1447] S. Dehaene. *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1997.

[1448] G. L. Brase, L. Cosmides, y J. Tooby. Individuation, counting, and statistical inference: the role of frequency and whole-object representations in judgment under uncertainty. *Journal of Experimental Psychology: General*, 127(1):3–21, 1998.

[1449] K. H. Teigen. Variants of subjective probabilities: concepts, norms, and biases. En: G. Wright y P. Ayton (Eds.), *Subjective Probability*, páginas 211–238. Wiley, New York, New York, USA, 1994.

[1450] A. D. Sokal. Transgressing the boundaries: Towards a transformative hermeneutics of quantum gravity. *Social Text*, 46/47:217–252, 1996.

[1451] A. D. Sokal y J. Bricmont. *Imposturas Intelectuales*. Paidós Ibérica, Barcelona, España, 1999. (Traducido por Joan Carles Guix Vilaplana de: <Intellectual Impostures>, Profile Books, London, England, UK, 1998).

[1452] F. Dostoievski. El Jugador. (Edición electrónica libre. Texto español revisado por Pablo Guevara: http://www.magister.msk.ru/library/dostoevs/dostf02s.htm).

[1453] G. Gigerenzer, U. Hoffrage, y H. Kleinboelting. Probabilistic mental models: a Brunswikian theory of confidence. *Psychological Review*, 98:506–528, 1991.

[1454] H. Zukier y A. Pepitone. Social roles and strategies in prediction: Some determinants of the use of base rate information. *Journal of Personality and Social Psychology*, 47(2):349–360, 1984.

[1455] J. McHale. *The Future of the Future*. George Braziller, New York, New York, USA, 1969.

[1456] E. León. El magma constitutivo de la historicidad. En: E. León y H. Zemelman (Eds.), *Subjetividad: Umbrales Del Pensamiento Social*, páginas 36–72. Anthropos - Centro Regional de Investigaciones Multidisciplinarias. Universidad Nacional Autónoma de México, Rubí, Barcelona, España - México, 1997.

[1457] M. Klein y J. Mitchell (Eds.). *The Selected Melanie Klein*. The Free Press, 1987.

[1458] W. R. D. Fairbairn. *An Object Relations Theory of the Personality*. Basic Books, New York, NY, USA, 1952.

[1459] J. Abram y H. Karnac. *The Language of Winnicott: A Dictionary and Guide to Understand His Work*. Jason Aronson, 1997.

[1460] H. Stewart, A. Elder, y R. Gosling. *Michael Balint: Object Relations Pure and Applied*. The New Library of Psychoanalysis, No. 25. Routledge, 1996.

[1461] K. M. Newman y H. A. Bacal. *Theories of Object Relations Bridges to Self Psychology*. Columbia University Press, New York, NY, USA, 1990.

[1462] L. Landa. La capacidad de pensar: ¿Cómo puede enseñarse? En: Á. I. Pérez Gómez y J. Almaraz (Eds.), *Lecturas de Aprendizaje y Eseñanza*, páginas 370–405. Fondo de Cultura Económica, México, 1988. (Traducido al español por Ángel Fernández Ramos de: <The ability to think - How can it be taught?>, Soviet Education, 28(5), pp. 4-66, 1976).

[1463] Osteba. Editorial. *Osteba Erriak*, 27, 2000. (Publicaciones del Servicio de Evaluación de Tecnologías Sanitarias, Gobierno Vasco, Departamento de Sanidad, Viceconsejería de Planificación y Ordenación Sanitaria. San Sebastián, http://www1.euskadi.net/buscadorsan/osteba_c.asp).

[1464] E. C. Webster. *Decision Making in the Employment Interview*. Eagle, Montreal, 1964.

[1465] J. S. Armstrong y F. Collopy. How serious are methodologicas issues in surveys? A reexamination of the Clarence Thomas polls, 1994. (Disponible en: http://www-marketing.wharton.upenn.edu/ideas/pdf/armstrong-thomasaffair.pdf).

[1466] C. D. Batson. Rational processing of rationalization? The effect of disconforming information on a stated religious belief. *Journal of Personality and Social Psychology*, 32:176–184, 1975.

[1467] T. Sachs y G. McClain. *Back to the User: Creating User-Focused Web Sites*. New Riders Publishing, 2002. (Trad.: Sitios Web Orientados al Usuario, Pearson Educación, Madrid, España, 2002).

[1468] M. M. Bajtin. De los borradores. En: M. M. Bajtin (Ed.), *Hacia Una Filosofía Del Acto Ético. De Los Borradores. Y Otros Escritos*, páginas 138–180. Anthropos - Editorial de la Universidad de Puerto Rico, Rubí, Barcelona, España - San Juan, Puerto Rico, 1997. (Traducción del ruso de Tatiana Bubnova).

[1469] N. C. Churchill. *Frontiers of Entrepreneurship Research*. Center for Entrepreneurial Studies, Babson College, Wellesley, MA, 1987.

[1470] J. Cabanelas y A. Vaamonde. *Las Empresas Gacela de Galicia*. Consorcio de la Zona Franca de Vigo, 1995.

[1471] J. Cabanelas y A. Vaamonde. *Las Empresas Gacelas de Euskadi*. 1996. Paper presented at SPRI 1996.

[1472] R. Hernández. *Empresas gacela en Extremadura. Referencias estratégicas para competir*. Estudios Económicos Extremeños. La Coria. Fundación Xavier de Salas, Convento de La Coria, Trujillo, Cáceres, 2000.

[1473] E. Morin. *Science avec Conscience*. Fayard, Paris, France, 1982.

[1474] E. Morin y A. B. Kern. *Terra- Patria*. R. Cortina, Milano, Italia, 1994.

[1475] E. Barbieri Masini. The roles of future studies in a global society. *Society and Economy in Central and Eastern Europe*, 20(3), 1998. (Quarterly Journal of Budapest University of Economic Sciences).

[1476] K. R. Popper. *Conjectures and Refutations*. Routledge and Kegan Paul, London, UK, 1969.

[1477] J. R. Echevarría. *El Criterio de Falsabilidad en la Epistemología de Karl Popper*. Colección Molino de Ideas. G. del Toro, Madrid, España, 1970.

[1478] H. J. Zimmermann. Testability and meaning of mathematical models in social sciences. *Math Modeling*, 1:123–139, 1980.

[1479] S. J. Taylor y R. Bogdan. *Introducción a los Métodos Cualitativos de Investigación. La Búsqueda de Significados*. Paidós, Barcelona, España, 1992. (Traducido por Jorge Piatigorsky, e. o. de 1984).

[1480] S. Feferman. Does Mathematics need new axioms? *American Mathematical Monthly*, 106:99–111, 1999.

[1481] R. Bauer (Agrícola). *De Inventione Dialectica*. París, France, 1538.

[1482] S. Torres, J. M. Rodríguez, R. Santana, y A. M. González. *Deficiencia Auditiva. Aspectos Psicoevolutivos y Educativos*. Aljibe, Málaga, España, 1995.

[1483] A. Agustín. *Obras filosóficas, Vol. III*. Autores Cristianos, Madrid, España, 1982.

[1484] G. Cardano. *Quo continentur Opuscula Miscellanea ex Fragmentis et Paralipomensis*. Huguetan-Ravaud, Lugduni, 1663.

[1485] M. Yebra. *Refugium Infirmorum*. Sánchez, Madrid, España, 1593.

[1486] J. P. Bonet. *Reduction de las Letras y Arte para Enseñar a Ablar los Mudos*. Abarca, Madrid, España, 1620.

[1487] M. Ramírez De Carrión. *Maravillas de la Naturaleza*. Montilla, España, 1629.

[1488] C. M. Abée De l'Epée. *Institution des Sourds et Muets par la Voie des Signes Méthodiques: Ouvrage qui contient le Projet d'une Langue Universelle, par l'Entremise des Signes Naturels Assujettis à une Méthode*. Nyon, París, Francia, 1776.

[1489] C. M. Abée De l'Epée. *La Véritable Manière d'Instruire les Sourds en Muets*. Nyon, París, Francia, 1784.

[1490] C. M. Abée De l'Epée. The true method of educating the deaf and dumb. *American Annals of the Deaf*, 12:61–132, 1860.

[1491] S. Von Tetzchner y H. Martinsen. *Introducción a la Enseñanza de Signos y al Uso de Ayudas Técnicas para la Comunicación.* Visor, Madrid, 1993. (Traducido al español por Anne Marie Mögster y adaptado al español por Carme Basil, de: <Språk og funksjons-hemning>, Gyldendal Norsk Forlag A/S , 1991).

[1492] E. S. Klima y U. Bellugi. *The Signs of Language.* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 1979.

[1493] U. Bellugi y D. Newkirk. Formal devices for creating new signs in American Sign Language. En: W. C. Stokoe (Ed.), *Proccedings of the National Symposium on Sign Language Research and Teaching. National Association for the Deaf*, páginas 39–80. Silver Spring, 1980.

[1494] R. Wilbur. *American Sign Language and Sign Systems.* University Press, Baltimore, USA, 1979.

[1495] A. Mulder. Hand Gestures for HCI. Informe Técnico 96-1, Hand Centered Studies of Human Movement Project. School of Kinesiology, Simon Fraser University, February 1996.

[1496] C. Cadoz. *Les Realites Virtuelles.* Dominos, Flammarion, 1994.

[1497] R. Malek, S. Harrison, y S. Thieffry. Prehension and gestures. En: R. Tubiana (Ed.), *The Hand.* Saunders, Philadelphia, USA, 1981.

[1498] A. Kendon. How gestures can become like words. En: *Cross-Cultural Perspectives in Nonverbal Communication.* C. J. Hogrefe, Lewiston, New York/Toronto, 1988.

[1499] D. McNeill. *Hand and Mind: What Gestures Reveal about Thought.* University of Chicago Press, Chicago, USA, 1992.

[1500] J. L. Nespoulos y A. Roch Lecours. Gestures: nature and function. En: J. L. Nespoulos, P. Perron, y A. Roch Lecours (Eds.), *The Biological Foundations of Gestures: Motor and Semiotic Aspects*, páginas 49–62. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey, USA, 1986.

[1501] J. R. Napier. *Hands.* Princenton University Press, Princenton, New Jersey, USA, 1993.

[1502] J. Pressing. *Synthesizer Performance and Real-Time Techniques.* A-R Editions, Madison, WI, USA, 1991.

[1503] Y. Nam y K. Y. Wohn. Recognition of Space-Time Hand-Gestures using Hidden Markov Model. En: *Proceedings of the ACM Symposium on Virtual Reality Software and Technology.* 1996. (Hong Kong, Julio, 1996).

[1504] D. B. Givens. *The Nonverbal Dictionary of Gestures, Signs and Body Language Cues. From Adam's-Apple-Jump to Zygomatic Smile.* Center for Nonverbal Studies Press, Spokane, Washington, USA, 2002.

[1505] D. Kimura. *Neuromotor Mechanisms in Human Communication.* Oxford University Press, Oxford, 1993.

[1506] G. I. Nierenberg y H. H. Calero. *El Lenguaje de los Gestos.* Hispano-Europea, Barcelona, España, 1976.

[1507] A. Stove. Non-emblematic gestures for estimating mood. En: P. A. Harling y A. D. Edwards (Eds.), *Progress in Gestural Interaction. Proceedings of Gesture Workshop'96*, páginas 165–171. 1997.

[1508] C. E. Osgood y T. A. Sebeok. *Psicolingüística*, capítulo Problemas teóricos y de investigación. Planeta, Barcelona, 1974. (trad. esp. de la edición de 1965).

[1509] W. LaBarre. The cultural basis of emotion and gestures. *Journal of Personality*, 16:49–68, 1947. (also in: Laver, J. and Hutcheson (Eds.), Communication in Face-toFace Interaction, Penguin, Harmondsworth, pp. 207-224).

[1510] R. L. Birdwhistell. *Introduction to Kinesics: An Annotation System for Analysis of Body Motion and Gesture.* University of Louisville Press, Louisville, 1952.

[1511] F. Poyatos. *La Comunicación No Verbal I: Cultura, Lenguaje Y Conversación.* Istmo, Madrid, España, 1994.

[1512] F. Poyatos. *La Comunicación No Verbal II: Paralenguaje, Kinésica e Interacción.* Istmo, Madrid, España, 1994.

[1513] F. Poyatos. *La Comunicación No Verbal III: Nuevas Perspectivas En Novela Y Teatro Y En Su Traducción.* Istmo, Madrid, España, 1994.

[1514] M. J. Pappert y M. A. Gigante. Using gestures to control a virtual arm. En: M. A. Gigante y H. Jones (Eds.), *Virtual Reality Systems*, páginas 237–246. Academic Press, London, UK, 1993.

[1515] A. Katkere, E. Hunter, D. Kuramura, J. Schlenzig, S. Moezzi, y R. Jain. *ROBOGEST: Telepresence using Hand Gestures.* Visual Computing Laboratory, University of California, San Diego, CA, USA, 1994. (Technical Report VCL-94-104, December).

[1516] R. M. Sanso y D. Thalmann. A hand control and automatic grasping system for system actors. *Eurographics*, 13(3):C168–C177, 1994.

[1517] F. Brooks. Grasping reality through illusion: Interactive graphics serving science. En: *Proceedings CHI '88 Conferencee-Human Factors in Computing Systems*, páginas 1–11. ACM, New York, NY, USA, 1988.

[1518] K. Böhm, W. Hübner, y K. Väänänen. GIVEN: Gesture driven interactions in virtual environments - A toolkit approach to 3D interactions. En: *Proceedings of Interfaces to Real and Virtual Worlds*, páginas 243–254. Montpellier, France, 1992.

[1519] T. Baudel y M. Beaudouin-Lafon. Charade: remote control of objects using free-hand gestures. *Communications of the ACM*, 36(7):28–35, 1993.

[1520] C. Codella, R. Jalili, L. Koved, J. B. Lewis, D. T. Ling, J. S. Lipscomb, D. A. Rabenhorst, C. P. Wang, A. Norton, P. Sweeney, y G. Turk. Interactive simulation in a multi-person virtual world. 1991. IBM Personal Communication, Association for Computing Machinery (ACM).

[1521] A. Norton, G. Turk, B. Bacon, J. Gerth, y P. Sweeney. Animation of fracture by physical modeling. *The Visual Computer*, 7:210–219, 1991.

[1522] P. Sweeney, A. Norton, R. Bacon, D. Haumann, y G. Turk. Modelling physical objects for simulation. En: *Proceedings Winter Simulation Conference.* Phoenix, Arizona, USA, 1991.

[1523] W. C. Stokoe. *Sign Language Structure.* Lintok Press, Silver Spring, MD, 1978. Originally appeared as Occasional Paper 8 in: Trager, G. L. (Ed.): Studies in Linguistics. Occasional Paper 8. University of Buffalo (1960).

[1524] O. Sacks. *Seeing Voices.* California University Press, 1989. (Traducido al español por José Manuel Álvarez Flores: <Veo una Voz: Viaje al Mundo de los Sordos>, Anaya y Mario Muchnik, Madrid, España, 1991).

[1525] W. C. Stokoe, D. Casterline, y C. Croneberg. *A Dictionary of American Sign Language on Linguistic Principles*. Gallaudet College Press, Washington, DC, 1965. (2nd ed. revised, Linstok Press, Silver Spring, MD (1976)).

[1526] R. Battison. *Lexical Borrowing in American Sign Language*. Linstok Press, Silver Spring, MD, 1978.

[1527] S. Liddell y R. Johnson. American Sign Language: The Phonological Base. *Sign Language Studies*, 64:195–277, 1989.

[1528] T. Suppala. *Structure and Acquisition of Verbs of Motion and Location in American Sign Language*. Tesis Doctoral, University of California, San Diego, California, USA, 1982.

[1529] C. Padden. *Interaction of Morphology and Syntax in American Sign Language*. Tesis Doctoral, University of California, San Diego, California, USA, 1983.

[1530] J. Perelló y J. Frigola. *Lenguaje de Signos Manuales*. Editorial Científico-Médica, Barcelona, España, 1987.

[1531] U. Bellugi y S. Fischer. A comparison of sign language and spoken language: Rate and grammatical mechanisms. *Cognition*, 1:173–200, 1972.

[1532] U. Bellugi y E. Klima. The roots of language in the sign talk of the deaf. *Psychology Today*, 6:661–676, 1972.

[1533] U. Bellugi, H. Poizner, y E. S. Klima. Language, modality and the brain. *Trends in Neurosciences*, 10:380–388, 1989.

[1534] U. Bellugi, H. Poizner, y E. S. Klima. Mapping brain function for language: Evidence form sign language. En: G. M. Edelman, W. E. Gall, y W. M. Cowan (Eds.), *Signal and Sense: Local and Global Order in Perceptual Maps*, páginas 521–543. Wiley-Liss, New York, 1990.

[1535] D. Corina, H. Poizner, U. Bellugi, T. Feinberg, D. Dowd, y L. O'Grady-Batch. Dissociation Between Linguistic and Nonlinguistic Gestural Systems: A Case for Compositionality. *Brain and Language*, 43:414–447, 1992.

[1536] H. Poizner, U. Bellugi, y V. Iraqui. Apraxia and aphasia in a visual-gestural language. *American Journal of Physiology*, 246:r868–r883, 1984.

[1537] H. Poizner, U. Bellugi, y E. S. Klima. Sign language aphasia. En: F. Boller y J. Grafman (Eds.), *Handbook of Neuropsychology*, páginas 157–172. Elsevier, Amsterdam, Holland, 1989.

[1538] H. Poizner, E. Klima, y U. Bellugi. *What the hands reveal about the brain.* MIT Press/Bradfor Books, Cambridge, MA, USA, 1987.

[1539] S. Liddell. THINK and BELIEVE: Sequentiality in American Sign Language. *Language*, 60:372–399, 1984.

[1540] D. Corina. ASL Phonology: A CV Perspective. En: *Linguistic Society of America, Annual Meeting.* New York, 1986.

[1541] D. Corina. To Branch or Not to Branch: Underspecification in ASL Hadshape Contours. En: *ASL Phonology Workshop.* LSA Linguistic Institute, Tucson, AZ, 1989.

[1542] D. Corina. Handshape Assimilation in Hierarchical Phonological Representations. En: C. Lucas (Ed.), *Sign Language Research, Theoretical Issues.* Gallaudet College Press, Washington, DC, 1990.

[1543] D. Perlmutter. A Moraic Theory of ASL Syllable Structure. En: *Conference on Theoretical Issues in Sign Language Research.* Gallaudet University, Washington, DC, 1988.

[1544] W. Sandler. *Phonological Representation of the Sign: Linearity and Nonlinearity in American Sign Language.* Foris, Dordrecht, Nederland, 1989.

[1545] D. Brentari. Partial Predictability in ASL Handshape Change. En: *Conference on Theoretical Issues in Sign Language Research.* Gallaudet University, Washington, DC, 1988.

[1546] D. Corina y E. Sagey. Predictability in ASL Handshapes and Handshape Sequences, with Implications for Features and Feature Geometry. Unpublished manuscript: The Salk Institute, La Jolla, CA, USA, 1989.

[1547] U. Bellugi. The structuring of language: Clues from the similarities between signed and spoken language. En: U. Bellugi y M. Studdert-Kennedy (Eds.), *Signed and Spoken Language: Biological Constraints on Linguistic Form*, páginas 115–140. Dahlem Konferenzen. Verlag Chemie, Weinheim/Deerfield Beach, FL, 1980.

[1548] R. Wilbur. *American Sign Language: Linguistic and Applied Dimensions.* College Hill Publ., Boston, MA, 1987.

[1549] E. Torrego. Lingüística y Cinésica. *Revista de Filología Española*, 54, 1971.

[1550] S. Serrano. *Signos, Lengua y Cultura.* Anagrama, Barcelona, España, 1981.

[1551] S. Serrano. *La Semiótica: Una Introducción a la Teoría de los Signos.* Montesinos, Barcelona, España, 1981.

[1552] F. Poyatos. Paralingüística y kinésica: para una teoría del sistema comunicativo del hablante español. En: *Actas Del Tercer Congreso Internacional de Hispanistas*, páginas 725–738. El Colegio de México, México, 1970.

[1553] F. Poyatos. Kinésica del Español actual. *Hispania*, 53(3):444–452, 1970.

[1554] F. Poyatos. Paralenguaje y kinésica del personaje novelesco: nueva perspectiva en el análisis de la narración. *Revista de Occidente*, 113/114:148–170, 1972. Prohemio **3** (2) 291-307.

[1555] M. Á. Rodríguez. Élements Syntaxiques et Sémantiques de la Langue Des Signes. *Révue de Laryngologie*, 104:331–335, 1983.

[1556] M. A. Rodríguez. *Cuentos para ver y tocar.* M.E.C., Madrid, España, 1985. (Serie Totó).

[1557] I. Muñoz. *Aportación al estudio de la articulación de la Lengua de Signos Española (L.S.E.) en la Comunidad Valenciana.* Universidad de Alicante, Alicante, España, 1996. (Memoria de Licenciatura).

[1558] S. Frutos, A. L. González, A. Minchero, y M. J. Nieto. Diccionario de la Lengua de Signos Española (DILSE). En: R. y. C. O. Ceres (Ed.), *Iberdiscap2000. Actas del Congreso Iberoamericano; Tercero de Comunicación Alternativa y aumentativa. Primero de Tecnología de Apoyo para la Discapacidad*, páginas 55–58. CSIC - Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales - IMSERSO - CYTED, Madrid, 2000.

[1559] S. Prillwitz, R. Leven, H. Zienert, T. Hanke, y J. Henning. *Hamburg Notation System for Sign Languages.* Signum Press, Hamburg, 1989.

[1560] A. W. Young y H. D. Ellis. *Handbook of Research on Face Processing.* Elsevier Science Publishers, Amsterdam, Holland, 1989.

[1561] M. Ruiz Soler. El problema de la especificidad neurofisiológica en el reconocimiento de rostros. En: J. A. Mora (Ed.), *Neuropsicología Cognitiva: Algunos Problemas Actuales*, páginas 83–92. Aljibe, Archidona, Málaga, España, 2001.

[1562] C. G. Gross, C. E. Rocha-Miranda, y D. B. Bender. Visual properties of neurons in inferotemporal cortex of the macque. *Journal of Neuropshysiology*, 35:96–111, 1972.

[1563] D. I. Perrett, A. J. Misstlin, y A. J. Chitty. Visual neurons responsive to faces. *Trends in Neuroscience*, 10:358–364, 1987.

[1564] R. Desimone, T. D. Albright, C. G. Gross, y C. Bruce. Stimulus selective properties of inferior temporal neurons in the macaque. *Journal of Neuroscience*, 4:2051–2062, 1984.

[1565] R. Desimone. Face-selective cells in the temporal cortex of monkeys. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 3:1–18, 1991.

[1566] D. H. Hubel y T. Wiesel. Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex. *Journal of Physiology*, 160:106–154, 1962.

[1567] Y. Essa, T. Darrell, y A. Pentland. Tracking facial motion. En: *Proceedings of the IEEE Workshop on Non-Rigid and Articulated Motion*. Austin, Texas, USA, 1994. (November).

[1568] A. Joslin. Interactive dinosaur welcomes visitors to Tokyo hotel. *Virtual Reality Systems*, 1(1):14–15, 1993.

[1569] R. J. K. Jacob. Input devices and techniques. En: A. B. Tucker (Jr.) (Ed.), *The Computer Science and Engineering Handbook*, páginas 1494–1511. CRC Press (in cooperation with ACM, The Association for Computing), Boca Raton, Florida, USA, 1997.

[1570] M. Vogt-Svendsen. Mouth position and mouth movement in Norwegian Sign Language. *Sign Language Studies*, 33:363–376, 1981.

[1571] A. Roulstone. *Enabling technology: disabled people, work and new technology*. Open University, Buckingham, 1998.

[1572] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications (Vol. 2)*. Wiley, New York, NY, USA, 1966.

[1573] J. M. Hammersley. Postulates for subadditive processes. *Annals of Probability*, 2:652–680, 1974.

[1574] P. J. Huber. *Robust Statistics*. Wiley, New York, NY, USA, 1981.

[1575] H. Rieder. *Robust Asymptotic Statistic*. Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1994.

[1576] R. M. Fréchet. *Recherches Théoriques Modernes sur le Calcul des Probabilités. Premier Livre: Généralités sur les Probabilités; Eléments Aléatoires*. Gauthier-Villars, Paris, France, 1936.

[1577] F. Sales Valles. *Cálculo de Probabilidades II*. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid, España, 1984.

[1578] D. A. Sibley. A metric for weak convergence of distribution functions. *Rocky Mountain J. Math.*, 1:427–430, 1971.

[1579] A. Bhattacharyya. On a measure of divergence between two statistical populations defined by their probability distributions. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 35:99–109, 1943.

[1580] G. J. McLachlan. *Discrimination Analysis and Statistical Pattern Recognition*. John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 1992.

[1581] A. Bhattacharyya. On a measure of divergence between two multinomial populations. *Sankhyā*, A(7):401–406, 1946.

[1582] H. Chernoff. A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. *Annals of Mathematical Statistics*, 23:493–507, 1952.

[1583] K. Matusita. Decision rule, based on distance, for the classification problem. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 16:305–315, 1956.

[1584] R. Beran. Minimum Hellinger distance estimates for parametric models. *Annals of Statistics*, 5:445–463, 1977.

[1585] L. Le Cam. On the assumptions used to prove asymptotic normality of maximum likelihood estimates. *Annals of Mathematical Statistics*, 41:802–828, 1970.

[1586] T. Lissack y K. S. Fu. Error estimation in pattern recognition via L^{α}-distance between posterior density functions. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-22:34–45, 1976.

[1587] L. Boltzmann. *Vorlesungen über Gastheorie*. J. A. Barth, Leipzig, 1896.

[1588] S. Kullback y A. Leibler. On information and sufficiency. *Annals of Mathematical Statistics*, 22:79–86, 1951.

[1589] R. Clausius. *Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie*. Braunschweig, 1864.

[1590] R. V. L. Hartley. Transmission of information. *The Bell System Technical Journal*, 7:535–563, 1928.

[1591] O. Onicescu. Energie Informationelle. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A*, 263:841–842, 1966.

[1592] S. Kullback. *Information Theory and Statistics*. John Wiley, New York, NY, USA, 1959.

[1593] J. E. Shore. Relative entropy, probabilistic inference and AI. En: L. Kanal y J. F. Lemmer (Eds.), *Uncertainty in Artificial Intelligence*, páginas 211–215. North-Holland, Amsterdam, Holland, 1986.

[1594] H. Jeffreys. An invariant form for the prior probability in estimation problems. *Proceedings of the Royal Society, Ser A*, 186:453–561, 1946.

[1595] R. E. McCulloch. Local model influence. *Journal of the American Statistical Association*, (84):473–478, 1989.

[1596] A. Rényi. On measures of entropy and information. En: *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Vol. 1)*, páginas 547–561. University of California Press, Berkeley, California, USA, 1961.

[1597] I. Csiszár. Eine Informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Bewis der Ergodizität on Markhoffschen Ketten. *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, 8:84–108, 1963.

[1598] S. M. Ali y S. D. Silvey. A general class of coefficient of divergence of one distribution from another. *Journal of the Royal Statistical Society*, 286:131–142, 1966.

[1599] A. M. Kagan. On the theory of Fisher's amount of information. *Sov. Mathemat. Dokl.*, 4:991–993, 1963.

[1600] K. Matusita. Decision rules, based on the distance-for problems of fit, two samples and estimation. *Annals of Mathematical Statistics*, 26:631–640, 1964.

[1601] V. Balakrishman y L. D. Sanghvi. Distance between populations on the basis of attribute data. *Biometrics*, 24:859ŋ865, 1986.

[1602] P. Rathie y P. L. Kannappan. A directed-divergence function of type β. *Information and Control*, 20(1):38–45, 1972.

[1603] P. L. Kannappan y P. Rathie. On a characterization of directed divergence. *Information and Control*, 22(2):163–171, 1973.

[1604] N. A. C. Cressie y T. R. C. Read. Multinomial good-ness of fit tests. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 46:440–464, 1984.

[1605] A. L. Rukhin. Optimal estimator of the mixture parameter by the method of moments and information affinity. En: J. A. Visek y P. Lachont (Eds.), *Trans. 12 th Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes*, páginas 214–219. Czech Acad. Sci., Prague, 1994.

[1606] M. L. Menéndez, D. Morales, L. Pardo, y I. Vajda. Asymptotic behaviour and statistical applications of divergence measures in multinomial populations. *Statistical Papers*, 36:1–29, 1995.

[1607] J. Kapur. A comparative assessment of various measures of directed divergence. *Advances in Management Studies*, 3:1–16, 1984.

[1608] I. J. Taneja. *Generalised Information Measures and their Applications*. (http://www.mtm.ufsc.br/~taneja/bhtml/bhtml.html), Florianópolis, SC, Brazil, 2001.

[1609] M. Belis y S. Guiasu. A quantitative-qualitative measure of information in cybernetics systems. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-4:593–594, 1968.

[1610] P. Gil. Medidas de incertidumbre e información en problemas de decisión estadística. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid*, LXIX:549–610, 1975.

[1611] H. C. Taneja y R. K. Tuteja. Characterization of a quantitative-qualitative measure of inaccuracy. *Kybernetika*, 22:393–402, 1984.

[1612] L. Pardo Llorente. Generalized divergence measures: Statistical applications. En: A. Kent, J. G. Williams, y N. L. Johnson (Eds.), *Encyclopedia of Microcomputers*. Marcel Dekker, 1997.

[1613] M. Lindauer. *Communication Among Social Bees*. Harvard University Press, 1961.

[1614] K. Von Frisch. Dialects in the language of the bees. *Scientific American*, 207:78–87, 1962.

[1615] J. C. Lilly. *Man and Dolphin*. Doubleday, New York, NY, USA, 1961.

[1616] J. C. Lilly. *Communication Between Man and Dolphin: The Possibilities of Talking With Other Species*. Crown Publishers, Inc., New York, NY, USA, 1976.

[1617] W. Kellogg. *Porpoises and Sonar*. University of Chicago Press, Chicago, USA, 1961.

[1618] J. Goodall. My life among wild chimpanzees. *National Geographic Magazine*, 124:278–308, 1963.

[1619] J. Goodall. *A Través de la Ventana : Treinta Años Estudiando a los Chimpancés*. Salvat, Barcelona, España, 1994. (Traducido por Jacint Nadal de: <Through a Window: My Thirty Years with the Chimpanzees of Gombe>, Houghton Mifflin, 1991).

[1620] J. Goodall y P. Berman. *Gracias a la Vida*. Mondadori, Barcelona, España, 2002. (Traducido por María José Aubet Semmler de: <Reason for Hope: A Spiritual Journey>, Warner Books, 1999).

[1621] T. A. Sebeok. *Perspectives in Zoosemiotics*. Mouton, The Hague-Paris, 1972.

[1622] P. Marler. Developments in the study of animal communication. En: P. R. Bell (Ed.), *Darwin's Biological Work: Some Aspects Reconsidered*, páginas 150–206. Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

[1623] P. Marler. The logical analysis of animal communication. *Journal of Theoretical Biology*, 1:408–421, 1961.

[1624] C. F. Hockett. Logical considerations in the study of animal communication. En: W. E. Lanyon y W. Tavolga (Eds.), *Animal Sounds and Communication*, páginas 392–430. American Institute of Biological Science, Washington, 1960.

[1625] T. A. Sebeok. Coding in the evolution of signalling behaviour. *Behavioral Science*, 7:430–442, 1962.

[1626] L. A. White. The symbol: the origin and basis of human behavior. En: *The Science of Culture: A Study of Man and Civilization*. Grove Press, New York, NY, USA, 1949.

[1627] E. H. Lenneberg. Language, evolution, and purposive behavior. En: S. Diamond (Ed.), *Culture in History: Essays in Honor of Paul Radin*, páginas 869–893. Columbia University Press, New York, NY, USA, 1960.

[1628] C. F. Hocket y R. Ascher. The human revolution. *Current Anthropology*, 5:135–168, 1964.

[1629] C. Masson y R. Brossut. La comunicación química en los insectos. *Mundo Científico*, 4(1):360–371, 1981.

[1630] U. Leroy. Etho-écologie des communications chez les amphibiens. En: M. Pailette (Ed.), *Bulletin de la Societé Zoologique de France (Supl. 2)*, capítulo 2.95. Societé Zoologique de France, 1977.

[1631] B. Würsig. Delfines. *Investigación y Ciencia*, 32:82–91, 1979.

[1632] E. W. Menzel. Cognitive mapping in chimpanzees. En: S. H. Hulse, H. Fowler, y W. K. Honig (Eds.), *Cognitive processes in animal behaviour*, páginas 375–421. Erlbaum, Hillsdale, New Jersey, USA, 1978.

[1633] L. Bloomfield. *Language*. George Allen and Unwin, London, 1933.

[1634] C. Riba i Campos. La comunicación en el reino animal. En: M. Martín y M. Siguán (Eds.), *Comunicación y lenguaje*, páginas 349–390. Alhambra, Madrid, 1991. (Tratado de Psicología General, 6, Mayor, J. and Pinillos, J. L., Eds.).

[1635] T. A. Sebeok. *The Sign and its Masters*. University of Texas Press, 1979.

[1636] D. McNeill. So you think gestures are non-verbal? *Psychological Review*, 92(3):350–371, 1985.

[1637] R. L. Birdwhistle. *El Lenguaje de la Expresión Corporal*. Gustavo Gili, Barcelona, España, 1979.

[1638] R. A. Spitz. *De la Naissance à la Parole. La Première Année de la Vie de L'enfant*. Presses Universitaires de France, Paris, France, 1968.

[1639] Y. Guyot. Les échanges non verbaux chez l'animal. *Bulletin de Psychologie*, XXVII(312/13-14):778–786, 1974.

[1640] J. Bruner. Early social interaction and language acquisition. En: R. H. Schaffer (Ed.), *Studies in Mother-Infant interaction*. Academic Press, London, 1977.

[1641] M. Caselli. Communicative gestures and first words. *Eta Evolutiva*, 16:36–51, 1983.

[1642] E. Bates, B. O'Connel, y C. Shore. Language and communication in infancy. En: J. D. Osofsky (Ed.), *Handbook of Infant Development*. Wiley, New York, NY, USA, 1987.

[1643] H. S. Schlesinger y K. P. Meadow. *Sound and Sign: Childhood Deafness and Mental Health*. University of California Press, Berkeley, 1972.

[1644] J. Bonvillian. Early sign language acquisition and its relation to cognitive and motor development. En: J. G. Kyle y B. Woll (Eds.), *Language in Sign: An International Perspective on Sign Language*. Croom Helm, London, 1983.

[1645] D. Morris. *El Mono Desnudo: Un Estudio del Animal Humano.* DeBolsillo, Barcelona, España, 2000. (Traducido por J. Ferrer Aleu de: <The Naked Ape: A Zoologist's Study of the Human Animal>, 1967).

[1646] R. S. Fouts, G. Shapiro, y C. O'Neil. Studies of linguistic behaviour in apes and children. En: *Understanding Language through Sign Language Research*, páginas 163–185. Academic Press, 1978.

[1647] J. T. Laitman. El origen del lenguaje articulado. *Mundo Científico*, 64:1182–1191, 1986.

[1648] J. Charline. *Del Simio al Hombre. Una Familia Poco Común.* Akal, Madrid, España, 1997.

[1649] A. J. Premack. *Why Chimps Can Read.* Harper, New York, NY, USA, 1975.

[1650] D. Premack. Language in a chimpanzee? *Science*, 172:808–822, 1971.

[1651] D. Premack. Algunas características generales de un método para enseñar el lenguaje a organismos que normalmente no lo adquieren. En: V. Sánchez De Zavala (Ed.), *Sobre el Lenguaje de los Antropoides*, páginas 76–136. Siglo XXI, Madrid, España, 1976.

[1652] D. Premack. *Intelligence in Ape and Man.* Erlbaum, Hillsdale, New Jersey, USA, 1976.

[1653] D. Premack y A. J. Premack. Teaching language to an ape. *Scientific American*, páginas 92–98, 1972. (October).

[1654] D. Premack y A. J. Premack. *The Mind of an Ape.* Norton, New York, NY, USA, 1983. (Trad.: La Mente del Simio, Debate, Madrid, 1988; versión de Juan Carlos Gómez y Paloma Linares).

[1655] G. Woodruff y D. Premack. Intentional communication in the cimpanzees: the development of deception. *Cognition*, 7:333–362, 1979.

[1656] T. A. Sebeok. Comentarios sobre (Lindauer, 1961), (Kellogg, 1961) y (Lilly, 1961). *Language*, 39:448–466, 1963.

[1657] D. M. Rumbaugh y T. V. Gill. Language and acquisition of the language skills by chimpanzees (Pan). *Annals of the New York Academy of Sciences*, 270:90–123, 1976.

[1658] D. M. Rumbaugh, T. V. Gill, y E. C. Von Glasersfeld. La lectura y el completado de lecciones realizado por un chimpancé. En: V. Sánchez De Zavala (Ed.), *Sobre el Lenguaje de los Antropoides*, páginas 137–146. Siglo XXI, Madrid, España, 1976.

[1659] R. A. Gardner y B. T. Gardner. Teaching sign language to a chimpanzee. *Science*, 165:664–672, 1969. (Traducido al español: Cómo enseñar el lenguaje de los sordomudos a un chimpancé; en: <Sobre el Lenguaje de los Antropoides>, Sánchez De Zavala, V. (Ed.), Siglo XXI, Madrid, España, 1976).

[1660] R. S. Fouts. La adquisición y comprobación del uso de signos gestuales en cuatro chimpancés jóvenes. En: V. Sánchez De Zavala (Ed.), *Sobre el Lenguaje de los Antropoides*, páginas 59–68. Siglo XXI, Madrid, España, 1976.

[1661] R. S. Fouts y R. L. Rigby. Man-chimpanzee communication. En: T. A. Sebeok (Ed.), *How Animals Communicate*, páginas 1034–1054. Indiana University Press, Bloomington, 1977.

[1662] R. S. Fouts. *Next of Kin: What Chimpanzees Have Taught Me About Who We Are.* Bard Books, 1998. (Trad.: Primos Hermanos: Lo que me han Enseñado los Chimpancés acerca de la Condición Humana, Ediciones B, Barcelona, España, 1999, versión española de Rita da Costa).

[1663] H. S. Terrace, L. A. Petitto, R. J. Sanders, y T. G. Bever. ¿Puede un antropoide generar una oración? *Estudios de Psicología*, 5-6:50–70, 1981.

[1664] M. Lemay y N. Geshwind. Hemispheric differences in the brains of great apes. *Brain Behavior and Evolution*, 11:48–52, 1975.

[1665] B. Galdikas. Living with the great orange apes. *National Geographic*, 157(6):830–853, 1980.

[1666] C. A. Ristau. Symbols and indication in apes and other species? Comment on Savage-Rumbaugh et al. *Journal of Experimental Psychology: General*, 112(4):498–507, 1983.

[1667] C. A. Ristau y D. Robbins. Language in the great apes: a critical review. En: *Advances in the Study of Behaviour (Vol. 12)*, páginas 141–255. Academic Press, 1982.

[1668] H. L. W. Miles. El lenguaje y el orangután: la vieja "persona" de la selva. En: P. Cavalieri y P. Singer (Eds.), *El Proyecto <Gran Simio>. La Igualdad Más Allá de la Humanidad.* Trotta, Madrid, España, 1998.

[1669] F. Patterson. Conversations with a gorilla. *National Geographic*, 154(4):438–465, 1978.

[1670] W. Patterson, F. y Gordon. En defensa de la condición de persona de los gorilas. En: P. Cavalieri y P. Singer (Eds.), *El Proyecto <Gran Simio>. La Igualdad Más Allá de la Humanidad.* Trotta, Madrid, España, 1998.

[1671] B. B. Wolman. *Manual de Psicología (Vol. 3): Aprendizaje, lenguaje, pensamiento e inteligencia.* Martínez Roca, Barcelona, España, 1980.

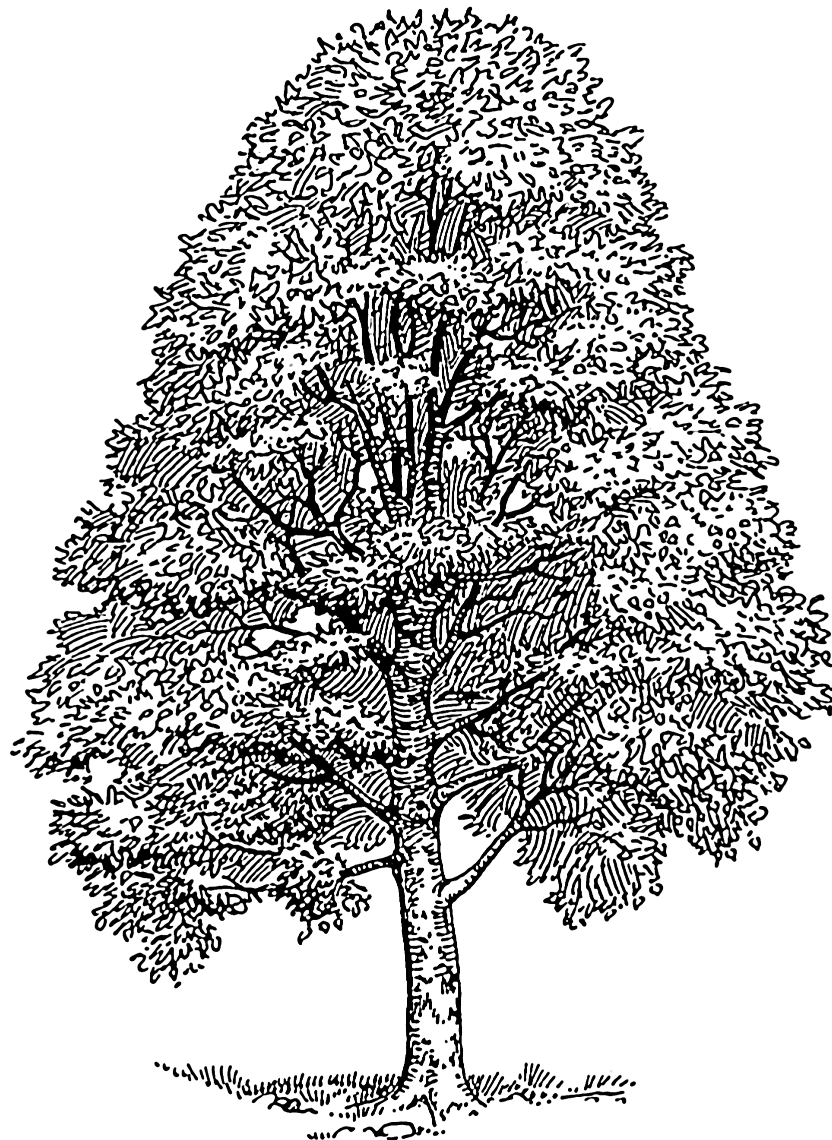
[1672] M. Adams, D. y Carwardine. El encuentro con un gorila. En: P. Cavalieri y P. Singer (Eds.), *El Proyecto <Gran Simio>. La Igualdad más allá de la Humanidad.* Trotta, Madrid, España, 1998.

[1673] H. Häyry y M. Häyry. ¿Quién es como Nosotros? En: P. Cavalieri y P. Singer (Eds.), *El Proyecto <Gran Simio>. La Igualdad Más Allá de la Humanidad*, páginas 218–229. Trotta, Madrid, 1998.

[1674] J. B. Burka y L. M. Yuen. *El Hábito de Posponer.* Javier Vergara Editor, Buenos Aires, Argentina, 1992. (Procrastination, Addison-Wesley, 1983).

Índice onomástico

En esta tesis doctoral se desarrollan modelos y se realizan estudios ilustrativos en relación con algunos temas en los que la incertidumbre, los juicios por comparación, inferencias lingüísticas y actos de decisión están presentes: gestión del talento en las organizaciones; evaluación de aprendizajes y de destrezas de ejecución; salud medioambiental; diagnosis y prognosis médicas sintomática y por imagen; medicina conductual; interpretación de signos; reutilización de componentes.



In this doctoral thesis a number of models and illustrative studies are developed and carried out for some issues in which uncertainty, comparison judgments, linguistic inferences and decision acts are present: talent management, apprenticeship and performance dexterity evaluation, environmental health, symptomatic and image-based medical diagnosis and prognosis; behavioural medicine; sign interpretation; component reuse.